

Jméno:

1	2	3	4	Σ

Zkoušková písemka z Matematické analýzy I
24. 6. 2024

Čas: 90 minut.

- *Nezapomeňte podepsat všechny papíry, které chcete odevzdat. Nemusíte odevzdávat papíry s pomocnými výpočty.*
- *Můžete psát i na papír se zadáním. Papír se zadáním je nutno podepsat a odevzdat, i když jste na něj nic nenapsali.*
- *Není povoleno používat kalkulačky a jinou elektroniku ani přinesené písemné materiály.*
- *Své odpovědi musíte zdůvodnit.*
- *Tvrzení z přednášky můžete používat bez důkazů, pokud není uvedeno jinak, je však nutno uvést, které tvrzení používáte.*

1. Uvažujme funkci $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definovanou vzorcem $f(x) = \exp(x^3 - x)$, kde $\exp(x)$ označuje exponenciální funkci e^x .
 - (a) [3 b.] Má funkce f limity v $+\infty$ a $-\infty$? Pokud ano, čemu se rovnají?
 - (b) [3 b.] Najděte všechny body, v nichž tato funkce nabývá lokální či globální extrémy, a určete, o jaký typ extrému se jedná (zda jen lokální nebo i globální, zda minimum nebo maximum).
 - (c) [4 b.] Spočítejte Taylorův polynom funkce f řádu 2 se středem v nule.
2.
 - (a) [3 b.] Napište, jak je definována *limita* posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ a co znamená, že limita je *vlastní*.
 - (b) [4 b.] Nechť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je libovolná posloupnost. Rozhodněte, zda některý z následujících dvou výroků implikuje ten druhý, případně zda jsou ekvivalentní:
 - (I) “Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ má vlastní limitu.”
 - (II) “Posloupnost $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ definovaná předpisem $b_n = a_{n+1} - a_n$ má limitu 0.”*(Nápověda: zde vám může pomoci uvážit situaci, kdy (a_n) je posloupnost částečných součtů nějaké nekonvergentní řady.)*
 - (c) [3 b.] Jaká je limita posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ definované vztahem $a_n = n^2 \cdot \sin(\frac{1}{n})$?
3.
 - (a) [2 b.] Co znamená, že interval $I \subseteq \mathbb{R}$ je *kompaktní*?
 - (b) [3 b.] Zformulujte větu o nabývání extrémů pro spojitě funkce, též známou jako ‘princip maxima’.
 - (c) [5 b.] Dokažte tu větu.
4.
 - (a) [3 b.] Jak je definován Newtonův integrál funkce f na intervalu (A, B) ?
 - (b) [3 b.] Uveďte příklad funkce, která má Riemannův integrál na intervalu $[0, 1]$, ale nemá Newtonův integrál na intervalu $(0, 1)$. Nezapomeňte zdůvodnit, proč má váš příklad požadované vlastnosti.
 - (c) [4 b.] Spočítejte, jaký objem má rotační těleso vzniklé otáčením plochy pod grafem funkce $f(x) = 1 + |3x|$ na intervalu $[-2, 2]$ kolem osy x .