

Seznam pojmů

- (P1) Model ve výrokové logice, pravdivostní funkce výroku.
- (P2) Sémantické pojmy (pravdivost, lživost, nezávislost, splnitelnost) v logice, vzhledem k teorii.
- (P3) Ekvivalence výroků resp. výrokových teorií, T-ekvivalence.
- (P4) Sémantické pojmy o teorii (sporná, bezesporná, kompletní, splnitelná).
- (P5) Extenze teorie (jednoduchá, konzervativní), odpovídající sémantická kritéria.
- (P6) Tablo z teorie, tablo důkaz.
- (P7) Kongruence struktury, faktorstruktura, axiomy rovnosti.
- (P8) CNF a DNF, Hornův tvar. Množinová reprezentace CNF formule, splňující ohodnocení.
- (P9) Rezoluční pravidlo, (nejobecnější) unifikace, rezoluční důkaz a zamítnutí.
- (P10) Signatura a jazyk predikátové logiky, struktura daného jazyka.
- (P11) Atomická formule, formule, sentence, otevřené formule.
- (P12) Pravdivostní hodnota formule ve struktuře při ohodnocení, platnost formule ve struktuře.
- (P13) Kompletní teorie v predikátové logice, elementární ekvivalence.
- (P14) Podstruktura, generovaná podstruktura, expanze a redukt struktury.

- (P15) Definovatelnost ve struktuře.
- (P16) Extenze o definice.
- (P17) Prenexní normální forma, Skolemova varianta.
- (P18) Izomorfismus struktur, ω -kategorická teorie.
- (P19) Axiomatizovatelnost, konečná axiomatizovatelnost, otevřená axiomatizovatelnost.
- (P20) Rekurzivní axiomatizace, rekurzivní axiomatizovatelnost, rekurzivně spočetná kompletaxe.
- (P21) Rozhodnutelná a částečně rozhodnutelná teorie.

Seznam lehkých otázek

- (L1) Množinu modelů nad konečným jazykem lze axiomatizovat výrokem v CNF, výrokem v DNF.
- (L2) 2-SAT, Algoritmus implikačního grafu, jeho korektnost.
- (L3) Horn-SAT, Algoritmus jednotkové propagace, jeho korektnost.
- (L4) Vlastnosti extenze o definice.
- (L5) Vztah definovatelných množin a automorfismů.
- (L6) Tablo metoda v jazyce s rovností.
- (L7) Věta o kompaktnosti a její aplikace.
- (L8) Věta o korektnosti rezoluce ve výrokové logice.
- (L9) Věta o korektnosti rezoluce v predikátové logice.
- (L10) Nestandardní model přirozených čísel.
- (L11) Existence spočetného algebraicky uzavřeného tělesa.
- (L12) Kritérium otevřené axiomatizovatelnosti.
- (L13) Rekurzivně axiomatizovaná teorie je částečně rozhodnutelná, kompletní je rozhodnutelná.
- (L14) Teorie konečné struktury v konečném jazyce s rovností je rozhodnutelná.
- (L15) Gödelovy věty o neúplnosti a jejich důsledky (bez důkazů).

Seznam těžkých otázek

- (T1) Věta o korektnosti tablo metody ve výrokové logice.
- (T2) Věta o korektnosti tablo metody v predikátové logice.
- (T3) Věta o úplnosti tablo metody ve výrokové logice.
- (T4) Věta o úplnosti tablo metody v predikátové logice.
- (T5) Věta o konečnosti sporu, důsledky o konečnosti a systematičnosti důkazů.
- (T6) Věta o úplnosti rezoluce ve výrokové logice.
- (T7) Věta o úplnosti rezoluce v predikátové logice (Lifting lemma stačí vyslovit).
- (T8) Skolemova věta.
- (T9) Herbrandova věta.
- (T10) Löwenheim-Skolemova věta včetně varianty s rovnostmi, jejich důsledky.
- (T11) Vztah izomorfismu a elementární ekvivalence.
- (T12) Neaxiomatizovatelnost konečných modelů.
- (T13) Věta o konečné axiomatizovatelnosti.
- (T14) Rekurzivně axiomatizovaná teorie s rekurzivně spočetnou kompletací je rozhodnutelná.

P1: 2.2.2 + 2.2.5: Ordinovatna funkcija
 njzroku φ u konciznom jeziku P je f-ica
 $f_{\varphi, P}: \{0, 1\}^{|P|} \rightarrow \{0, 1\}$ definovana induktivno:

- ako je φ i-ty ~~prvoizak~~ ~~prvoizak~~ $\neq P$,
 potom $f_{\varphi, P}(x_0, \dots, x_{n-1}) = x_i$

- ako je $\varphi = (\neg \varphi')$, potom
 $f_{\varphi, P}(x_0, \dots, x_{n-1}) = \neg (f_{\varphi', P}(x_0, \dots, x_{n-1}))$

- ako je $\varphi = (\varphi' \square \varphi'')$, gde $\square \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$,
 potom $f_{\varphi, P} = f_{\square}(f_{\varphi', P}(x_0, \dots, x_{n-1}), f_{\varphi'', P}(x_0, \dots, x_{n-1}))$

Model jezika P je linearno ordinovana
 odredjenje $v: P \rightarrow \{0, 1\}$. Moćima svih
 modela jezika nazivamo Π_P :

$$\Pi_P = \{v \mid v: P \rightarrow \{0, 1\}\} = \{0, 1\}^P$$

P2: pre VL: "Mojma teorija T u jeziku P . Hovorimo,
 da njzrok φ u jeziku P je:"
 pre PL: "Mojma L -teorija T a L -formulu φ ;
 hovorimo, da φ je:

- satisfying v T , pokiaľ platí v každom modeli T (pri každom ohodnotení)
- satisfying v T , pokiaľ neplatí v žiadnom modeli T (pri žiadnom ohodnotení)
- unsatisfying v T ; pokiaľ nie je satisfying, dni sporný
- satisfying v T , pokiaľ ~~platí aspoň v~~ modeli (v PL teda pri každom ohodnotení) nie je sporný
- pokiaľ $T = \emptyset$, tak máme napríklad "satisfying" v logike

P3: Vytvorte ϕ, ψ (v rovnakom jazyku P) sú T -ekvivalentné, pokiaľ platia v tých istých modeloch T . V prípade, že $T = \emptyset$, sú logicky ekvivalentné.

T^1 a T^2 sú ekvivalentné teórie, pokiaľ T je extension T^1 a T^1 je extension T .

- P4: Poviem, že teória T je:
- oporna, pokiaľ v nej platí $VL + PL$
 - besporná = splniteľná, pokiaľ nie je $VL + PL$ oporná
 - kompletná VL: nie je oporná a každý výrok je v nej pravdivý alebo oporný (nie je neurčitý) $\Leftrightarrow$ má práve 1 model
 - kompletná PL: je besporná a každý sen-
tenia je v nej buď pravdivý, alebo oporný $\Leftrightarrow$ má práve 1 model ať na elem. úrovni.

- P5: Máme teóriu T v jazyku P
- Extenzia teórie T je liberálna teória T' v jazyku $P' \supseteq P$ splňujúca $Mod_{P'}(T') \supseteq Mod_P(T)$
 - je to jednoduchá extenzia, pokiaľ $P = P'$
 - ^^ rovnako pre VL aj PL , len PL má jazyk omnoho väčší L
 - konservatívna VL: $Mod_P(T) = Mod_P(T') = Mod_{P'}(T') \cap VFP$
 - konservatívna PL: $Mod_L(T) = Mod_L(T') = Mod_L(T') \cap Fm_L$

Semantičné kritéria VL:

$\rightarrow T'$ je jednoduchou ext. $T \Leftrightarrow P' = P$ a
 $\Pi_P(T') \subseteq \Pi_P(T)$

$\rightarrow T'$ je ext. $T \Leftrightarrow \Pi_{P'}(T') \subseteq \Pi_{P'}(T')$

$\hookrightarrow$ existencia jednoduchého modelu $v \in \Pi_{P'}(T')$
na pôvodný jazyk P musí byť modelom T

$\rightarrow T'$ je konserватívna ext. T , pokiaľ je extenziou
a najmä každý model T vieme rozšíriť na
model T'

Semantičné kritéria PL:

~~$\rightarrow T'$ je extenzia $T \Leftrightarrow \Pi_L(T')$~~

Majme teórie T, T' v jazyku L , potom

T' je jednoduchou ext. $T \Leftrightarrow \Pi_L(T') \subseteq \Pi_L(T)$

Majme jazyk $L \subseteq L'$, T v jazyku L a T' v L' , potom:

1) T' je extenzia $T \Leftrightarrow$ redukci každého modelu T'
na L je modelom T

2) Pokiaľ je T' ext. T a každý model T ide
expandovať na L' na model T' , potom T'
je konservatívna ext. T

P6 - hlavne 7.2:

DEF (Tablo): Hovéné tablo $\geq$ lezie T je usporiadanj, položkami označovaný dom, kt. smihol aplikáciou hovéné veta nasledujúcich pravidiel:

- jednoprvkový dom označovaný ľubovoľnou položkou je tablo $\geq T$
- pre ľubovoľnú položku p na veku V môžeme na horie V pripojiť domi ch tablo pre položku P

↳ ak je P "medok": môžeme pridať len nový konst. symbol $c_i \in C$ (jazyk sme rozšírili o spoi. veta konstant)

↳ P "rieši": ľubovoľný konst. Lc -term t_i

- na horie ľubovoľnej veku môžeme pripojiť T_d pre ľub. deion $d \in T$

Nehovéné tablo: smihlo v spoi. veta hokoch, kde T_0 je 1 prvové tablo; T_{i+1} smihlo $\geq T_i$ v 1 hoku

$$T = \bigcup_{i \geq 0} T_i$$

T_i : hovéné tablo

$\geq T$

DEF (Tablo dôkaz): Tablo dôkaz redukcie (jazyk so VL) je $\geq$ lezie T je spoi. tablo $\geq$ lezie T a položkou $F \in$ v hoku (pre položku $F \in$)

DEF (Tablo dôhod $\sim =$): Ak je T leviá jazyka $L \sim =$, potom označíme T^* ako rozšírenie T o gúľatúne univerzálne rovnosti pre jazyk L . Tablo dôhod $\neq$ leviá T je tablo dôhod $\neq T^*$

P7 ÷ 7.3: Kongruencia, faktoriálna, akčný rovnosť

DEF (^{Kongruencia} Faktoriálna): Máme ekvivalenciu $\sim$ na množine A , funkciu $f: A^n \rightarrow A$ a reláciu $R \subseteq A^n$.

Oviedme, že $\sim$ je:

- kongruencia pre f , ak pre všetky $a_i, b_i \in A$ 1.-z. $a_i \sim b_i$ platí $f(a_1, \dots, a_n) \sim f(b_1, \dots, b_n)$
- kongruencia pre R , ak pre všetky $a_i, b_i \in A$ 1.-z. $a_i \sim b_i$ platí $(a_1, \dots, a_n) \in R \Leftrightarrow (b_1, \dots, b_n) \in R$

Kongruencia štruktúry A je ekv. $\sim$ na množine A , kt. je kongruencia pre všetky f a relácie $\mathcal{A}$

DEF (Faktoriálna): Máme štruktúru A a jej kongruenciu $\sim$. Faktoriálna A podľa $\sim$ je štruktúra $A/\sim$ v tom istom jazyku, kt. univerzum $A/\sim$ je množina všetkých zoskupení tried podľa $\sim$ a jej f a relácie sú def. pomocou reprezentantov

P7 - pohľadom

DEF (deixing rovnosti): deixing rovnosti pre jazyk L
a rovnosťou m :

1) $x = x$

2) $x_1 = y_1 \wedge \dots \wedge x_n = y_n \rightarrow f(x_1, \dots, x_n) = f(y_1, \dots, y_n)$

3) $x_1 = y_1 \wedge \dots \wedge x_n = y_n \rightarrow (R(x_1, \dots, x_n) \rightarrow R(y_1, \dots, y_n))$

* symetria + tranzitivita platí z 3

P8 - 2-3: CNF, DNF, $\exists$ reprezentácia, skrajné odhodnotenie

- litrál: ^{atom. formula} prvok alebo jeho negácia
- klauzula: disjunktia litrálov, prázdna klauzula: $\perp$,
jednotková klauzula - samotný litrál
- rych v CNF: konjunktia klauzul, prázdny rych
v CNF: T
- mnôžinový zápis CNF: jedna klauzula - jedna množina, celé usporiadanie do "vetty" množ., zápis:
 $(p \vee q) \wedge r \wedge s \rightarrow \{ \{p, q\}, \{r\}, \{s\} \}$
- Hornova forma: každá klauzula môže mať najviac 1 pozitívny litrál
- elementárna konjunktia: $E = l_1 \wedge l_2 \wedge \dots \wedge l_n$, prázdna elem. konjunktia je T , jednotková: samotný litrál

- sjrok ~ DNF: disjunktívna elem. konjunktív,
práchy sjrok: $\perp$

- čistočné obočkovanie: ľubovoľná konjunktívna
množina literálov (t.j. neobchádza sa o pravé literály)

- sjrké obočkovanie: sjrké obočkovanie, t.j. obchádza sa
pozitívny alebo negatívny literál pre každú
sjrkovú premennú

- sjrkivné obočkovanie: obočkovanie v sjrkiv
(NF formulu S (VFS) sjrkiv v obchádza sa
nejaký literál z ľavej strany S :

$$V \cap C \neq \emptyset \text{ pre každú } C \in S$$

Ť: 2 obočkovania sjrké / sjrkivné obočkovania
nie sú jednoduché prejsť k modelom (a
napríklad; napr. $\{ \neg \mu_1, \mu_2, \mu_3 \} \rightsquigarrow (0, 1, 1)$

Pg- 5.2.1. + 8.5.2: Resolucija + pojmy obolo nej
 DEF (R. pravidlo VL): Majme hladnuj $(\gamma$ a $(\gamma$ a
 literal l 1. i. $l \in (\gamma$ a $l \in (\gamma$. Potom resol-
 venta hladnuj $(\gamma$ a $(\gamma$ ch literal l je

$$C = (C_1 - \{l\}) \cup (C_2 - \{l\}).$$

DEF (R. pravidlo PL): Majme hladnuj $(\gamma$ a $(\gamma$ a
disjunktivni množinami premenných a nech

$$C_1 = C_1 \cup \{A_1, \dots, A_m\}; C_2 = C_2 \cup \{\neg B_1, \dots, \neg B_m\},$$

 kde $m, m \geq 1$ a množinou výrazov (dobrá atom.
 formulí) $S = \{A_1, \dots, A_m, B_1, \dots, B_m\}$ nie je unifikovat-
 a nech σ je najväčš. unif. S . Potom resol-
 venta $(\gamma$ a $(\gamma$ je $C_1 \sigma \cup C_2 \sigma$.

DEF (R. dobré VL): Resolucij dobré hladnuj $C \neq$
 CNF formulí S je postupnosť hladnuj $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n = C$
 1. i. pre každé i buď $\gamma_i \in S$, alebo γ_i je resol-
 ventou nejakých γ_j, γ_k , kde $j < i$ a $k < i$

DEF (R. dobré PL): Resolucij dobré hladnuj $C \neq$
 CNF formulí S je postupnosť hladnuj $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n = C$
 1. i. pre každé i je:

- buď $\gamma_i = \gamma_i \sigma$ pre $\gamma_i \in S$ a premenovanie premen-
 ných σ_i

• dlebo (i) je resolventou C_h a (i) , bde L_i i

→ resolventi samistnutie je dōbas $\square \geq S$ (aj
pre VL a aj pre PL)

DEF (najisoblenejšia uniliteria):

Majme konečni množinu výrazov $S = \{E_1, \dots, E_n\}$.

Substitúcia σ je uniliteria pre S poliat

$E_i \sigma = - = E_i \sigma$, resp. $S \sigma$ obsahuje jediný výraz

→ uniliteria pre S je najisob., poliat
pre každú uniliteriu T pre S existuje
mno. λ t.j. $\sigma = \tau \lambda$ ~~$\sigma = \tau \lambda$~~ $\tau = \sigma \lambda$

Q: dve rôzne najisob. unil. sa líšia len
pomerovaním premenných

- univerzálny a existenčný kvantifikátor
 $(\forall x), (\exists x)$ pre každú $x \in Var$ (premená zoznam)
- symboly pre logické spojky $\neg, \rightarrow, \leftrightarrow, \vee, \wedge$, zámkový
 a čiarka
- ! jazyk musí obsahovať aspoň 1 relačný symbol !

P11 - 6.3.3 + 6.3.5:

DEF (atomická formula): Atomická formula jazyka L
 je výraz $R(a_1, \dots, a_n)$, kde R je n -~~ary~~^{árny} relačný
 symbol (musí byť $a_j =$) a $a_i \in Term$

DEF (Formula): Formula jazyka L je honestný vý-
 raz definovaný indukciou:

- $\rightarrow$ každá atomická formula jazyka L je formula
- $\rightarrow$ ak je φ formula, potom aj $(\neg \varphi)$ je formula
- $\rightarrow$ ak sú φ a ψ formuly, potom aj $(\varphi \square \psi)$ je formula,
 kde $\square \in \{\neg, \rightarrow, \leftrightarrow, \vee, \wedge\}$
- $\rightarrow$ ak je φ formula, potom aj $(\forall x) \varphi$ je formula

Atómová formula: zložená z výrazu kvantifikátor

Vetstvenia: zložená z výrazu premennej

P10-6.2: Liguatūra, žargb PL, struktūra

DEF (~~struktūra~~) (liguatiura): Liguatiura je 2-ica
są $\langle R, S \rangle$, bde R, S nē disjunktus množiny
relacių ir funkcijų simbolių (konst. nē funkcijų
simbolių dirg 0) opolu s daugini diktami (t. j.
funkcija ar: $S \cup R \rightarrow N$). R, S neobskiriję simbolis
'='; An je skleronaij pde rorost

DEF (struktūra): Struktūra n liguatiura $\langle R, S \rangle$
je 3-ica $\mathcal{A} = \langle A, R^{\mathcal{A}}, S^{\mathcal{A}} \rangle$, bde

- A je neprazdra množina
- $R^{\mathcal{A}} = \{ R^{\mathcal{A}} \mid R \in R \}$, bde $R^{\mathcal{A}} \in A^{ar(R)}$ je
interpretacia relaciųbo simboliu R
- $S^{\mathcal{A}} = \{ f^{\mathcal{A}} \mid f \in S \}$, bde $f^{\mathcal{A}}: A^{ar(f)} \rightarrow A$
je interpretacia funkcijųbo simboliu f
(igliciahu pde $c \in S$ naime $c^{\mathcal{A}} \in A$)

Do žargbu PL loogijy patai:

- kvocitakletine rela ptemenų ir $x_0, x_1, x_2, \dots$
- relacių, funkcijų (konst.) simbolių zo liguatiury a
simbolis '=', ah idle o žargbe s rorost or,

plati $\sim \mathcal{A}$, načasne $\mathcal{A} \models \varphi$.

- pokiaľ $\mathcal{A} \models \neg \varphi$; t.j. φ NE plati v $\mathcal{A}$ pri
ZIADKOM obchodeni, φ je oproti v $\mathcal{A}$.

* „oproti“ nie je to isté ~~to~~ ako „neložnosť“!

P13-6.5.1: Komplexná teória.

Teória je komplexná, pokiaľ je hesporna a
každá sentencia je v nej buď pravdivá, alebo
oproti.

DEF (elem. ekv.): Štruktúry $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ v tom istom
jazyku sú elem. ekvivalentné, pokiaľ v nich
platia tie isté sentencie, načasne $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$.

Q: Teória je komplexná práve vtedy, keď má
jeden model až na elem. ekv.

P14-6.6: Podštruktúra, expanzia, redukcia.

→ rozšobrenie podpisu, podpali, atď.

DEF (podštruktúra): Majme štruktúru $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{R}^{\mathcal{A}}, \mathcal{S}^{\mathcal{A}} \rangle$
v signatúre $\langle \mathcal{R}, \mathcal{S} \rangle$. Štruktúra $\mathcal{B} = \langle B, \mathcal{R}^{\mathcal{B}}, \mathcal{S}^{\mathcal{B}} \rangle$

$= \langle B, \mathcal{R}^{\mathcal{B}}, \mathcal{S}^{\mathcal{B}} \rangle$ je podštruktúra $\mathcal{A}$, načasne

$\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$, ak:

• $\emptyset \neq B \subseteq A$

• $\mathcal{R}^{\mathcal{B}} = \mathcal{R}^{\mathcal{A}} \cap B^{\text{ar}(\mathcal{R})}$ pre každý relačný symbol $\mathcal{R} \in \mathcal{R}$

P12-6.4.10: Preddefinovaná bočata formuly

Majme formulu φ v jazyku L , interpretáciu $\mathcal{A} \in \mathcal{A}_L$ a obchodenie premenných $e: V_{\text{var}} \rightarrow A$. Preddefinovaná bočata φ v $\mathcal{A}$ pri obchodení e , označovaná $\text{PH}^{\mathcal{A}}(\varphi)[e]$ je definovaná indukčnou podľa štruktúry formuly:

1) pre atom formulu $\varphi = R(t_1, \dots, t_n)$ majme

$$\text{PH}^{\mathcal{A}}(\varphi)[e] = \begin{cases} 1 & \text{pokial } (t_1^{\mathcal{A}}[e], \dots, t_n^{\mathcal{A}}[e]) \in R^{\mathcal{A}} \\ 0 & \text{inak} \end{cases}$$

2) pre negáciu:

3) pre lineárne spojky $\square \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$:

4) pre kvantifikátory:

$$\text{PH}^{\mathcal{A}}((\exists x)\varphi)[e] = \max_{a \in A} (\text{PH}^{\mathcal{A}}(\varphi)[e(x/a)])$$

DEF (platiť v interpretácii): Majme formulu φ a interpretáciu $\mathcal{A}$ v tom istom jazyku.

- ak je e obchodenie a $\text{PH}^{\mathcal{A}}(\varphi)[e] = 1$, potom φ platí v $\mathcal{A}$ pri obchodení e ; $\mathcal{A} \models \varphi[e]$

- pokial φ platí v $\mathcal{A}$ pri každom e , potom

P14 - pohľadovanie

• $f^B = f^A \cap (B^{alt} \times B)$ pre každý funkčný symbol $f \in \Sigma$

• pre konst. symbol $c \in \Sigma$ máme $c^B = c^A \in B$

DEF (Generovaná podštruktúra): Máme štruktúru

$\langle A, \mathcal{R}^A, \Sigma^A \rangle$ a nepárodnú podmnožinu $X \subseteq A$.

Oznaíme B ako vajnovšiu podmnožinu A , kt.

obdržiava množinu X a je uzavretá na všetky
funkcie štruktúry A .

Podom σ podštruktúry $A \upharpoonright B$ hovoríme, že je
generovaná množinou X , teda oznaíme $A\langle X \rangle$.

DEF (expansia, redukcia): Máme jazyk $L \subseteq L'$,
 L -štrukt. A a L' -štrukt. A' na rovnakom doméne, t.j.

$A = A'$. Obojstranná interpretácia každého symbolu $\tau \in L$

je rovnaká v A a v A' , potom hovoríme, že štruktúra

A je redukcia A' na jazyk L a A' je expansion

A do L'

P15 := 6.8: Definovatelnost v struktúre.

Majme formulu $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ a struktúru A v tom istom jazyku. Množina definovanej formulou $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ v struktúre A je:

$$\varphi^A(x_1, \dots, x_n) = \{ (a_1, \dots, a_n) \in A^n \mid A \models \varphi(x_1/a_1, \dots, x_n/a_n) \}$$

$$\varphi^A(\bar{x}) = \{ \bar{a} \in A^n \mid A \models \varphi[\bar{x}/\bar{a}] \}$$

Majme formulu $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$, kde $|\bar{x}| = n$ a $|\bar{y}| = k$, struktúru A a k -tice prvkov $\bar{b} \in A^k$.

Množina def. formulou $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ s parametrami $\bar{b}$ v struktúre A je:

$$\varphi^{A, \bar{b}}(\bar{x}, \bar{y}) = \{ \bar{a} \in A^n \mid A \models \varphi[\bar{x}/\bar{a}, \bar{y}/\bar{b}] \}$$

napr. Pre $\varphi(x_1) = E(x_1)$ je $\varphi^{G, v}(x_1)$ množina všetkých uzlov vrcholu v .

Pre struktúru A a množinu $B \subseteq A$ označme $Df^A(A, B)$ množinu všetkých množín definovateľných v struktúre A s parametrami pozbaďajúcimi z B .

Pr: Množina $Df^A(A, B)$ je uzavretá na prietok, zjednotenie, doplnok a obsahuje $\bar{a} \in A^n$ a aj $\emptyset$.

P16 - 6.7.1: Ekstenzia σ delimitirir.

DEF (Delimitirizatsiya relatsionnykh symbolov): Majme teoriiu T a formulu $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ v jazyku L . Otvornim L' nazivim jazyku L s novj n -~~arj~~ arj relatsijnykh symbolov R . Ekstenzia teoriiu T σ delimitirir R formulou φ iz L' teoriiu:

$$T' = T \cup \{R(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \varphi(x_1, \dots, x_n)\}$$

DEF (Delimitirizatsiya funktsionnykh symbolov): Majme teoriiu T a formulu $\varphi(x_1, \dots, x_n, y)$ v jazyku L . Otvornim L' nazivim jazyku L s novj n -~~arj~~ arj funktsionnykh symbolov f . Nech v T plati:

$\rightarrow$ aktsionnaja eksistencija: $(\exists y) \varphi(x_1, \dots, x_n, y)$

$\rightarrow$ aktsionnaja univernsal'nost': $\varphi(x_1, \dots, x_n, y) \wedge \varphi(x_1, \dots, x_n, z) \rightarrow y = z$

Potom delimitirir T σ delimitirir f formulou φ iz:

$$T' = T \cup \{f(x_1, \dots, x_n) = y \leftrightarrow \varphi(x_1, \dots, x_n, y)\}$$

Majme L teoriiu T a L' teoriiu T' , potom T' je delimitirir T σ delimitirir, pobiat smisla z T postupnom delimitirir σ del. relatsionnykh funktsionnykh symbolov.

P17 - 8.2.2 + 8.2.9: PNF + Skolemova varianta

DEF(PNF): Formula φ je v PNF, ak je
voľbou:

$(Q_1 x_1) \dots (Q_n x_n) \varphi'$, kde Q_i je kvantifikátor
a φ' je atrová.

DEF(Skolemova varianta): Majme L -súvetenie
 φ v PNF a nech isť je rôzne premen-
ové ni ktoré. Nech $\exists$ exist. kvantifikátorov prelika
ni $(\exists x_1), \dots, (\exists x_n)$ (v tomto poradí) a nech
pre každé i ni $(\exists x_i), \dots, (\exists x_n)$ prelika isť súvet.
kvantifikátor pred kvantifikátorom $(\exists x_i)$ v prelika φ .

Označme L' súvetenie L a nové ni - ktoré
bude nové symboly ~~$f_1, \dots, f_n$~~ $f_1, \dots, f_n$, kde symbol
 f_i je arit. ni pre každé i .

Skolemova varianta φ je L' -súvetenie φ_s , kt.
súveta $\exists \varphi$ tak, že pre každé $i = 1, \dots, n$:

- označime $\exists$ prelika $(\exists x_i)$
- substitúujeme za premennú x_i term $f_i(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$

P18 - 9.2.1 + 9.3.1: Izomorfizmus, w -kat.

Majme štruktúry A, B v jazyku $L = \langle R, S \rangle$.

Izomorfizmus A na B je bijekcia $h: A \rightarrow B$,

kt. spĺňa:

- pre každú funkčnú symbol $f \in S$ a pre všetky $a_i \in A$ platí: $h(f^A(a_1, \dots, a_n)) = f^B(h(a_1), \dots, h(a_n))$
- pre každú relačnú symbol $R \in R$ a pre všetky $a_i \in A$ platí: $R^A(a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow R^B(h(a_1), \dots, h(a_n))$

Pokiaľ taká funkcia h existuje, A a B sú izomorfne. Automorfizmus A je izomorfizmus A na A .

Izomorfné multivariety teórie T je počet $I(\kappa, T)$ modelov kardinality κ a či na izomorfizmus pre každú kardinalitu κ .

Teória T je κ -kategorická, pokiaľ $I(\kappa, T) = 1$.

je w -kategorická, teda $\kappa = w$, teda má jeden počiatočný nekonečný model (a či na izomorfizmus)

P19 - 9.4.1: Najme niedu štruktúr $K \subseteq \Pi_L$ v nejakom jazyku L . Overime, že K je:

- axiomatizovateľná, ak existuje L -teória T t.j. $\Pi_L(T) = K$
- končne axiomatizovateľná, ak je axiomatizovateľná a končnou teóriou
- občne axiomatizovateľná, ak je axiomatizovaná ~~končnou~~ ^{občnou} teóriou

O L -teórii^T hovoríme, že je končne / občne axiomatizovateľná, ak to platí o niedke modelov $K = \Pi_L(T)$

+ 10.1.8

P20 - 10.1.1 + 10.1.5: Teória T je rekurzívne axiomatizovaná, pokiaľ exist. alg., ktorú dobehne a pre každú vstupnú formulu φ určí, či $\varphi \in T$.
Nieda L -štruktúra $K \subseteq \Pi_L$ je rekurzívne axiomatizovateľná, pokiaľ exist. rekurzívne axiomatizovaná teória^T v jazyku L t.j. $K = \Pi_L(T)$.
Teória T je rekurzívne axiomatizovateľná, pokiaľ je ——— || ———
nieda jej modelov, resp. je ekv. nejakej rekurzívne axiomatizovanej teórii

Teória T má rekurzívne spočítateľnú komple-
xnosť, pokiaľ má aj na ekv. spočítateľne

neta komplexných jednoduchých extenzií a
 nejaka množina až na ekvenciu rovných
 jednoduchých extenzií je rekursívne spočítateľ-
ná, teda exist. alg., ktorý pre vstup
 $(i, j), i \in N, j \in N$ vypíše i -ty deň j -tej
 extenzie.

P20 - 10.1.3: O teórii T hovoríme, že je:

- rozhodnuteľná, pokiaľ exist. alg., ktorý
 pre zadanie formulu dobehne a odpovie,
 či $T \models \varphi$
- číselne rozhodnuteľná, pokiaľ exist.
 alg., kt. pre vstupnú formulu φ :
 - pokiaľ $T \models \varphi$ skončí a odpovie "áno"
 - pokiaľ $T \not\models \varphi$ buď nedobehne, alebo
 odpovie "nie"

L1-2.2.14 + 2.3.4: Mnóžinu modelov nad končným jazykom vieme diskretizovať jazykom v CNF, vsm.
v DNF

ab. Májme jazyk $P = \{p_1, \dots, p_n\}$ a množinu modelov Π . ~~Napr.~~ Najprv uvažujeme DNF, CNF bude dualo-
gické.

Napr.: pokiaľ by Π obsahovala jediný model $(1, 0, 1, 0)$,
tak ju vieme reprezentovať jazykom $\varphi_v = p_1 \wedge \neg p_2 \wedge p_3 \wedge$
 $\neg p_4$.

Pre jeden isob. model v :

$\varphi_v = p_1^{v_1} \wedge \dots \wedge p_n^{v_n} = \bigwedge_{p \in P} p^{v(p)}$, kde $p^{v(p)}$ je
jazyk p , pokiaľ $v(p) = 1$ a $\neg p$ inak.

Pre viac modelov:

$$\varphi_{\Pi} = \bigvee_{v \in \Pi} \bigwedge_{p \in P} p^{v(p)} \quad \bigvee_{v \in \Pi} \bigwedge_{p \in P} p^{v(p)}$$

v CNF sú modely hlavné $C_v = \bigvee_{p \in P} p^{1-v(p)}$ in

viest k ohľadu v ($\Pi_v = \Pi - \{v\}$), teda hľadá hlav-
nú v konjunkciu obsahujúcu 1 model; dohady:

$$\varphi_{\Pi} = \bigwedge_{v \in \Pi} \bigvee_{p \in P} p^{1-v(p)}$$

L2-3.2: Prerehivnik je 2-CNF výrok.

2-kladnou ~~chozeme~~ ~~ale~~ $l_1 \vee l_2$ chozeme
ale 2-ism implikaci: $\bar{l}_1 \rightarrow l_2$ a $\bar{l}_2 \rightarrow l_1$
jednotvari kladnula l : $\bar{l} \rightarrow l$

$V(\phi) = \{p, \neg p \mid p \in \text{Var}(\phi)\}$

$F(\phi) = \{(\bar{l}_1, l_2), (\bar{l}_2, l_1) \mid l_1 \vee l_2 \text{ je kladnula } \phi\}$
 $\cup \{(\bar{l}, l) \mid l \text{ je jednotvari kladnula } \phi\}$

1. najdene komponenty nizkej nizlosti

2. Kontrakcia komponent: graf G^*

3. Ma G^* je DAG $\rightarrow$ zostrojime topolog. usp.

4. Na najdenie splniveho obchodenia verime najtavejšiu satiat neobchodeniu hony, obchodime je 0 a 1 nej opacni 1

Uvodenie: Výrok ϕ je splniteľný $\Leftrightarrow$ žiadna nizlá hony n G^* neobahuje 2-ism opacnych literalov l a $\bar{l}$

ob. " $\Rightarrow$ ": Každý model musí obchodit' istý lit. z rovnakej komponenty rovnou hodnotou. Ma by exist. implikacia $l_1 \rightarrow l_2$, kde $v(l_1) = 1$ a $v(l_2) = 0$.

Teda n 1 hony. nemôžu byť opacné literaly.

" $\Leftarrow$ ": Predpokladajme, že žiadna hony. neobahuje 2-ism opacnych literalov. Najdene model.

To možeme sat, že n top. usp. G^* zostrojime najtavejšiu (neobchodeniu) hony. a tu obchodime 0.

1 nej opacni zas 1.

L2 - pohľad na nie

Toto rozhodenie bude fungovať. Hely nie, niek-
torá hlauula by vyplakala.

Jednotlivá hlauula platí: $n \in G$ máme
hodu $\bar{l} \rightarrow l$, táto hodva je aj v G ; teda
najprv sme rozhodli $\bar{l}$ nulou, teda l jed-
notkou (lebo top. exp.).

V prípade 2 - hlauuly l_1 a l_2 máme hody

$$\bar{l}_1 \rightarrow l_2 \quad \text{a} \quad \bar{l}_2 \rightarrow l_1$$

Ak sme l_1 rozhodli šor ako l_2 , museli
sme ~~to~~ hodi hodu $\bar{l}_1 \rightarrow l_2$ rozhodit $\bar{l}_1 = 0$,
teda $l_1 = 1$.

Na druhej strane, ak sme l_2 rozhodli šor,
tak to bolo hodi hodu $\bar{l}_2 \rightarrow l_1$. Teda $\bar{l}_2 = 0$
a $l_2 = 1$.

V oboch prípadoch l_1 a l_2 splníme.

L3-3.3:

Ochelnizeme homarshi blaunlu: max. 1 pozitivy litthal.

Vyisivame jednotvari propagaciu: pochat' vjrok obratnye jednotvari blaunlu, sieme, dho musi byt' ohodnoteni. Tuto malost' propagizeme d'alej.

Napr. dho vime jednotvari blaunlu " μ_4 ", potom nastavime $\mu_4 = 1$; blaunlu, kt. obratni μ_4 ni splynu a z blaunlu, kt. obratni $1/\mu_4$ vime $1/\mu_4$ odskomit' (to vemozu byt' ch tento litthal splynu).

$\varphi \mapsto \varphi^t$, dho vime jednotvari blaunlu l .

Ex: φ^t to neobratnye litthal l a dnu $\bar{l}$. Zaradu modely φ ni vime modely $\{\varphi^t, l\}$

dho vjzledny vjrok neobratnye jednotvari blaunlu, vyisivame homarshost', vjroku a ohodnotime vseth ostatni premenne 0 (hazda blaunlu obratnye negativy litthal).

24-6-7-8+6-3-12:

Indukcie: L - pôvodný jazyk, L' - rozšírený, T - pôvodná teória, T' - extenzia

Extenzia o def. relačného symbolu

⊆: každé model T nie je jednoznačne expandovať na model T'

Indukcie: Pre každú L' -formulu φ existuje L -formula 1.2. $T' \models \varphi \Leftrightarrow \varphi$

def. Nahradíme atomické podformuly o novom symbolom $R, 1.;$ tam $R(t_1, \dots, t_n)$.

Také podformuly nahradíme formulou $\varphi'(x_1(t_1, \dots, x_n(t_n))$, kde φ' je varianta φ , kt. zaručuje substitučnosť všetkých termov. Teda napríklad pomenujeme niektoré pomenenie φ na nové.

Extenzia o def. funkčného symbolu

⊆: každé model T nie je jednoznačne expandovať na model T'

Indukcie: Pre každú L' -formulu φ exist. L -formula 1.2. $T' \models \varphi \Leftrightarrow \varphi$.

def.: Každá vhodná pre formulu φ o 1 nových symboloch f . Ak je ich viac, aplikujeme postup indukcie a o prispôbujeme

výsledok v 1 leme: $f(-f(-)-)$ postupyujeme od
unifikujúc k rovnakým.

1) označme φ^* formulu vzniknutú z nahradením
všetkých $f(x_1, \dots, x_n)$ novou premennou z .

Potom $\varphi = (\exists z)(\varphi^* \wedge \psi'(x_1/x_1, \dots, x_n/x_n, y/z))$, kde
variabla ψ' vznikne substitúciou všetkých
termov.

Majme model A lemie T' a obodovanie e .

Označme $a = (f(x_1, \dots, x_n))^A[e]$.

Udava existenci a jednováznosti máme:

$$A \models \varphi'(x_1/x_1, \dots, x_n/x_n, y/z)[e] \Leftrightarrow e(z) = a$$

$$\text{Dokaz: } A \models \varphi[e] \Leftrightarrow A \models \varphi^*[e(z(a))] \Leftrightarrow A \models \varphi'[e]$$

dle to platí pre ľub. obodovanie e . Teda

$$A \models \varphi' \Leftrightarrow \varphi \text{ pre každý model } T', \text{ potom } T \models \varphi' \Leftrightarrow \varphi$$

L5-7.2.8: ah je $D \subseteq A^m$ delinovana v
strukture $\mathcal{A}$. Potem pre káždý automorf. $h \in$
 $\text{aut}(\mathcal{A})$ platí $h[D] = D$.

ah je D delinovana $\rightarrow$ parametrami $\bar{t}$, platí to
inšé pre automorfizmy identické na $\bar{t}$ (fixu-
júce $\bar{t}$)

al. Ľem. 7.3.1 $\rightarrow$ param. Nech $D = \varphi^{\mathcal{A}, \bar{t}}(\bar{x}, \bar{y})$,
potom pre káždé $\bar{a} \in A^m$ platí:

$$\bar{a} \in D \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi[\bar{x}/\bar{a}, \bar{y}/\bar{t}]$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi[h(\bar{x})/\bar{a}, h(\bar{y})/\bar{t}]$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi[\bar{x}/h(\bar{a}), \bar{y}/h(\bar{t})]$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi[\bar{x}/h(\bar{a}), \bar{y}/\bar{t}]$$

$$\Leftrightarrow h(\bar{a}) \in D$$

fixáciu na $\bar{t}$ potrebujeme, lebo inak by sme
mohli získať iné parametre, ako sme zadali
Ľm, že by sa na nich mohli zachrániť

L6-7.3: Duh na P6 a P7.

L7 - 4.7.1 + 7.5.3: Veta o kompaktnosti

Teória má model $\Leftrightarrow$ každá jej konštantná časť má model

def. "": Teória má model teória T je univerzálny model každých jej častí; inak by nemohol byť modelom celej teórie.

" $\subseteq$ ": Osojdenie reprezentácie; predpokladajme, že T nemá model (je správna) a nájdeme konštantnú časť $T' \subseteq T$, kt. je tiež správna (ideálne dokazovať $\Leftarrow$ ch $\neg \Rightarrow \neg$).

Keďže T je správna, platí $T \vdash \perp$ (i.e. fals). Teda exist. konštantný počet dokaz. T výroku $\perp \in T$. Ale konštantná počet dokaz. má len konštantné množ. výrokov $\Rightarrow$ exist. sme len konštantné množ. výrokov $\in T$. Definujme $T' = \{T \vdash \perp\}$, T' je podmnožina T . T' je dokaz. správ. z konštantnej T' (teda aj správnej), kt. je časťou T .

Aplikácia: T má limit. veľkú množ. $\Rightarrow$ má aj nek. konštantný model + každá jej kon. modelom nie je dokon.

- 2) $K \subseteq \Pi_L$, $\bar{K} = \Pi_L - K$; K je konečná axiomatizovateľná množ. $\Leftrightarrow K$ a aj $\bar{K}$ sú axiomatizovateľné
- 3) neštandardný model prin. č.

L8 - 5.3.1: dk je formula S resolution
samiplnietvā, potom je S neplnietvā
(VL).

dl. Nech $S \vdash \square$, teda neakčne resolú-
cijný dôkaz $C_0, C_1, \dots, C_n = \square$. Predpokla-
dáme pre spor, že S je splnietvā, teda
exist. interpretácie V t.j. $V \models S$.

Indukciou ukážeme, že $V \models C_i$, teda na-
hrom aj $V \models \square$, čo bude spor.

základ: pre $i=0$ to platí, lebo $C_0 \in S$

ind. krok: pre $i > 0$ máme 2 prípady:

$\rightarrow C_i \in S$, v tom prípade $V \models C_i$, lebo
 $V \models S$

$\rightarrow C_i$ je rezolúciou C_j, C_k , kde $j, k < i$.

2 ~~pre~~ TP máme, že $V \models C_j$ a $V \models C_k$ a

2 hocikvek rezolúčného pravidla aj $V \models C_i$

L9 - 8.0.2: Korektnost resolucije PL.

Twednie: Najme hladumy C_1, C_2 . C je ich resolventom. Ak κ nejakej inkluzie $\mathcal{A}$ platia hladumy C_1 a C_2 , potom κ nej platí aj C .
dl. 2 def. resolúčného pravidla rieme,

že hladumy $\mathcal{A}$ ich resolventu rieme vyjadrit' v' nasledovne: $C_1 = C_1' \sqcup \{A_1, \dots, A_m\}$; $C_2 = C_2' \sqcup \{\neg B_1, \dots, \neg B_n\}$,

$C = C_1' \cup C_2'$, kde σ je najv'sed. m'asib'ho'cia κ vz'asov $S = \{A_1, \dots, A_m, B_1, \dots, B_n\}$, resp. $S\sigma = \{A_1\sigma\}$.

C_1, C_2 ni obrovne formuly platia v $\mathcal{A} \Rightarrow \kappa$ $\mathcal{A}$ platia aj ich inkluzie po m'as. σ , leda $\mathcal{A} \models C_1\sigma$ a $\mathcal{A} \models C_2\sigma$.

Zorov'ni $C_1\sigma = C_1'\sigma \cup \{A_1\sigma\}$ a $C_2\sigma = C_2'\sigma \cup \{\neg A_2\sigma\}$.

a) pohl'at' $\mathcal{A} \models A_1\sigma^{[e]}$, potom $\mathcal{A} \not\models \neg A_1\sigma^{[e]}$, leda $\mathcal{A} \not\models C_2\sigma^{[e]}$
a aj $\mathcal{A} \not\models C^{[e]}$

b) analogicky, pohl'at' $\mathcal{A} \not\models A_1\sigma^{[e]}$, tak $\mathcal{A} \models C_1'\sigma^{[e]}$ a
aj $\mathcal{A} \models C^{[e]}$

ale toto platí pre ľub. obrovstvie e , leda $\mathcal{A} \not\models C$

Veta: Pohl'at' je CNF formula S resolúciou zamietnuteľná, potom je nesplniteľná

dl. Vieme, že $S \vdash_R \square$, leda zoberme resolúciu dobor $\square \geq S$. Hely existoval model $\mathcal{A} \models S$, tak

vd'aba korektnosti rez. hodu by sme indukciou mohli podľa d'ezby ďalšom mohli ukázať, že

$\mathcal{A} \models \square$, čo je ale spor.

L10 - 7.5.3. Nistandardni model priro. $\bar{c}$.

$\underline{N} = \langle N, S, +, \cdot, 0, 1 \rangle$ je std. model priro. $\bar{c}$.

Označimo $Th(\underline{N})$ množinu $\forall$ rečenica govori-
vju u $\underline{N}$ (Moris isključiv $\underline{N}$).

Še $n \in \mathbb{N}$ definišemo n -ti numerali ako
 $num^n = S(-S(0)-)$, gdje S je aplikativni n -bit.

Saberemo novi konst. simbol c a ujedinišmo, z e
je važi ili hođi n -ti numeral.

$$\bar{T} = \{ \cancel{Th(\underline{N})} \cup \{ \underline{n} < c \mid n \in \mathbb{N} \}$$

~~$\bar{T}$: nistandardni model priro. $\bar{c}$.~~

$\bar{c}$: Ita da hoćiva čast $\bar{T}$ na model (kada z
drugej časti pričinu moime len hoćime veća dol-
njih obmeđeni sa c) $\rightarrow$ saberišmo std. model
priro. $\bar{c}$. $\underline{N}$ a nastavimo c na dodatno veće
čisto.

2 velj o hompa horti: $\bar{c}$ $\bar{T}$ na model, važi sa
nistandardni, označimo to $\bar{A}$.

Ostalo u istom $\bar{A}$ isti rečenice ako u $\underline{N}$, ali važe
na prvob $c^{\bar{A}}$, gdje je važi ili hođi $\forall n \in \mathbb{N}$.

L11- 9.1.9: Spočetné, algebraické uzavretie
pole:

⊗: ak je L spočetný jazyk a normovaný,
potom bu každé nekonečné L -ideál,
existuje elem. chain spočetne nekonečná
ideál.

al. vypliva $\exists$ LS veľ (T10)

alebo A je algebraické uzavretie, potom každé pol.
nultové ho stupňa má v inom kore:

$$\varphi_n = (t^{n+1}) - (t^{n+1}) (t^0) (t^0) (t^0) + x_{n-1} t^{n-1} + \dots + x_1 t + x_0 = 0$$

alg. uzavretosť vyjadíme pomocou vety φ_n pre
každé $n > 0$. $\{t\}$ je skarta za tým $t \cdot t \cdot \dots \cdot t$

⊗ - A uzavretie nie je, A nie je, ale C áno

Príklad: Existuje spočetné alg. uzavretie pole.

al. podľa porovania existuje ideál A , ktorá je
elem. chain C a je spočetná. $\forall C$ platia

akýmsi φ_n pre veľ $n > 0$. ale nie platia aj v
elem. chain ideál A . Navyše C je pole, teda
aj A musí byť pole. Zároveň A je spočetná
ideál veľ ideál.

* teda ni elem. chain. ak je každý platia akýmsi pol.
musí aj druhý

++ musí tam byť, inak by sme neobdržali stupň pol.

L12 - 9.4.9.: Teória T obsahuje aksiomatizovateľnú, potom je každá podstruktúra modelu T takisto modelom T .

ob. Nech T' je obsahová aksiomatizácia T . Nech A je model T' , teda $A \models T'$. Ďalej máme podstruktúru $B \subseteq A$. Pre každú formulu $\varphi \in T'$ platí $B \models \varphi$ (lebo φ je obsahová). Teda aj $B \models T'$

poz. platí aj opačná implikácia

napr. DeLO nie je obsahová aksiomatizovateľná, lebo konečná podstruktúra nemôže byť hustá

napr.2: Teória ~~teória~~^{poli} nie je obsahová aksiomatizovateľná, lebo podstruktúra $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ polia racionálnych čísel nie je polom. $\forall \neq$ nekonečné involúcie množ. voči násobeniu k číslu 2.

L13 - 10.1.4: Nech T je rekurzívne dekomati-
zovdná, potom:

- 1) T je čiarová rozhodnuteľná
- 2) ak je T naviac kompletná, potom je
rozhodnuteľná

dl: "Algoritmom na čiarovú rozhodnuteľnosť
je systematické tablo! z teórie T a položou
 $F \vee v$ horní). Bohiaľ $\vee v T$ platí, takže
tablo bude správne a dôkaz skončí.inak ale
skončíť nemusíme.

2) ak je T naviac kompletná, vieme, že
platí ~~plat~~ jedna z možností:

- a) $T \vdash \varphi$
- b) $T \vdash \neg \varphi$

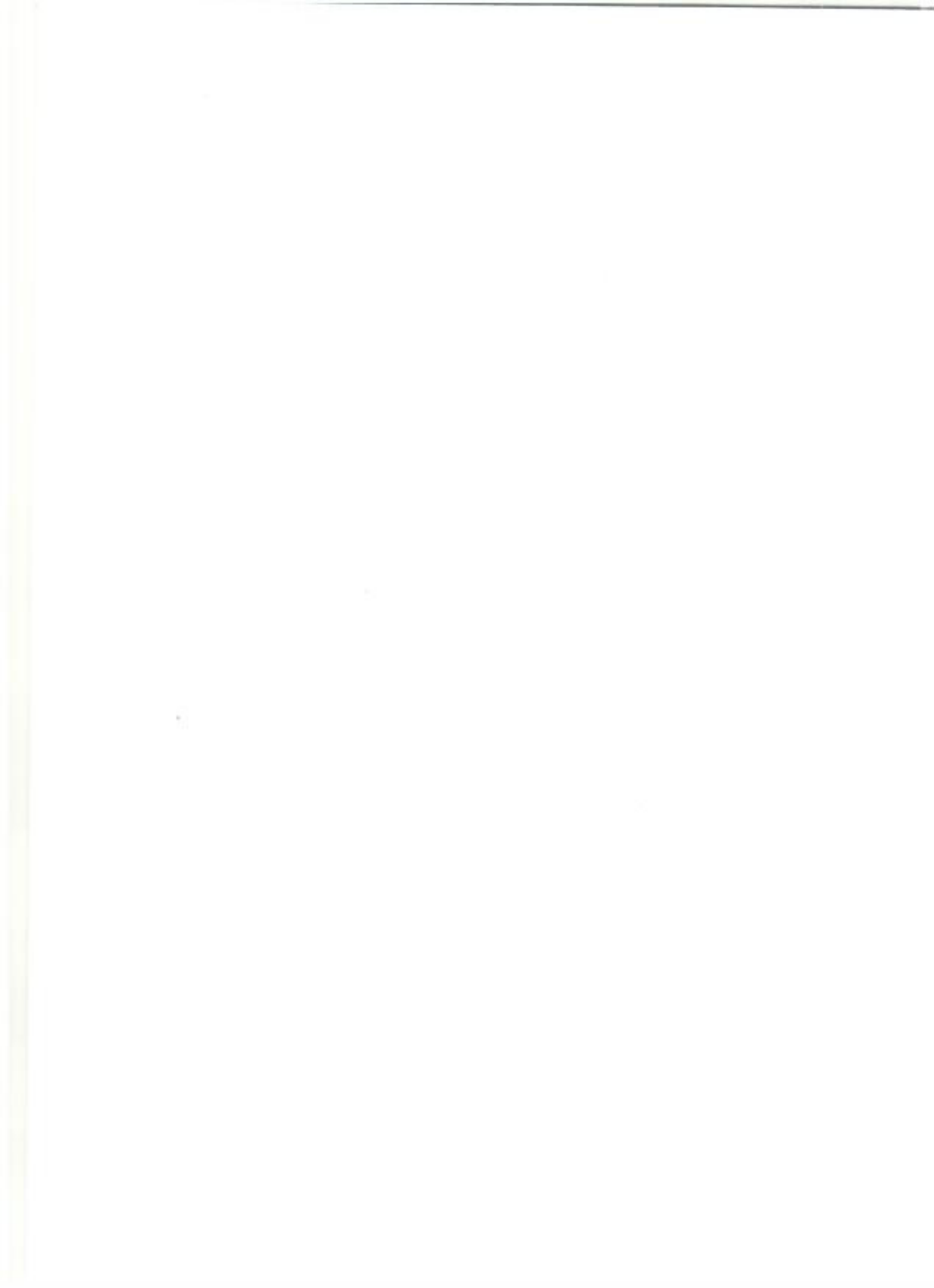
Budeme teda konštruovať tablo s položou
 $F \vee v$ horní a paralelne s ním aj tablo s
položkou $T \vee v$ horní (dôkaz zaviesť φ
z T). Jedna z konštrukcií po konečnej veľa
krokoch skončí.

L14 - 10.7.10. ak je $\mathcal{A}$ konečná štruktúra
 v konečnom jazyku s rovnosťou, potom je
 teória $Th(\mathcal{A})$ rekurzívne axiomatizovateľná
 2. lebo plynie, že $Th(\mathcal{A})$ je rozhodnuteľná,
 lebo $Th(\mathcal{A})$ je kompletná.

ch. Očíslujme prvky domény $A = \{a_1, \dots, a_n\}$.
 Teóriu $Th(\mathcal{A})$; Teóriu $Th(\mathcal{A})$ niekedy axiomati-
 zovať 1 ~~axiomom~~: sentenciou^{*}, kt. je tvaru:
 "Existuje práve n prvkov $a_1, \dots, a_n$ splňujúcich
 práve tie základné relácie s funkčnými hodnot-
 ami a reláciami, kt. platia v štruktúre $\mathcal{A}$ ".

napr. pohľad $f(a_1, a_2) = a_3$, pridáme do
 konjunkcie atom. formulu $f(x_{a_1}, x_{a_2}) = x_{a_3}$ (kde
 x_{a_i} sú premenné odpovedajúce jednotlivým
 prvkom; a pohľad $(a_3, a_3, a_1) \in R$ ^{*}, pridáme
 $\neg R(x_{a_3}, x_{a_3}, x_{a_1})$

* Termíny mat. relácie premenné, ktoré nie sú
 ich nájdením



L15 - 10.4: Gödelove vety

VETA (1. Gödelova): Pre každú besponnú rekursívne axiomatizovateľnú teóriu T Peanovej aritmetiky existuje sentencia, kt. je pravdivá v $\mathbb{N}$, ale nie je dokazateľná v T .
Táto sentencia hovorí o Gödelovej sentencii.

Dôsledok 1: ak je T rekursívne axiomatizovateľná teória R , aritmetiky a ak je model $\mathbb{N}$ modelom T , potom T nie je kompletná.

Dôsledok 2: Teória $Th(\mathbb{N})$ nie je rekursívne axiomatizovateľná.

$$Con_T = \neg (\exists y) P \vdash f_T(\underline{0=S(0)}, y)$$

Ť: $\mathbb{N} \models Con_T \Leftrightarrow T \nVdash 0=S(0)$, teda sentencia Con_T hovorí, že " T je besponná".

Veta (2. Gödelova): Pre každú besponnú rekursívne axiomatizovateľnú teóriu T Peanovej^A platí, že Con_T nie je dokazateľná v T .

Dôsledok 1: Existuje model PA , v ktorom platí sentencia $(\exists y) P \vdash_{PA} (\underline{0=S(0)}, y)$

Příklad 2: Existuje besporna rekursivně definovaná sentença T obsahující $\neg$, která dokazuje svou pravost; t.j. $T \vdash \text{true}$

Příklad 3: Je λ -term nově definovaná ZFC besporna, neboť λ -term obsahuje true ZFC $\neg$ nej dokazatelná.

T1 - 4.5.1: Korektnost tabla VL

Osvetljuje, že model $\mathcal{M}$ skladuje s polosi. P ,
pohiati $P = T \cup a$ a $v \in \mathcal{M}$ ali $P = F \cup a$
a $v \notin \mathcal{M}$. Model $\mathcal{M}$ skladuje s vechom V , pohlal
na skladuje so vsiljimi poloshkami na V .

Lema: Skladuje na model leinie T s poloshkou
v horeni tabla z leinie T , potom na skladuje s
niehlaou vechou.

al. Najme tabla $T = \bigcup_{i \geq 0} T_i \in T$. Najme model
 $\mathcal{M} \in \Pi(T)$ skladujeci na s horeniou T , kda aj
s 1-pmhkou V_0 a 1-pmhkou T_0 .

Indukcijo podla i najdene potujnost $V_0 \subseteq V_1 \subseteq \dots$
1.-2. V_i je vcha $\mathcal{M} \in T_i$, al. na na model $\mathcal{M}$
skladuje a V_{i+1} je predlizenie V_i . Osadovana
vcha je $\bigcup_{i \geq 0} V_i$.

- pohiati T_{i+1} nihto hz predlizenia vchy
 V_i , tak $V_{i+1} = V_i$
- pohiati T_{i+1} nihto $\in T_i$ pripojenim T_2 pre
nejaj deim T ~~definirane~~ na hore V_i ,
definirane V_{i+1} ako V_i predlizeni s kito
poloshkou - $\mathcal{M}$ je model T , skladuje na aj s
novo poloshkou

• Nech T_{i+1} smiablo $\exists T_i$ pripojením atom.
 tabla pre nejakej položku P na vetve V_i .
 Pretože model na shoduje s položkou P ,
 automaticky V s ^{na shoduje} nejakej vetvou atom. tabla,
 kt. sme pripojili. Definujeme V_{i+1} ako
 V_i predĺženú o túto vetvu

Veta (o hľadnosti): ~~Ak je správna tabla~~ $T \models \varphi \Rightarrow T \models \psi$
 Dokážeme sporom. Predpokladajme, že φ v T
 neplatí, t.j. exist. model $v \in \mathcal{M}(T)$, kde φ ne-
 platí.

φ je tabla dokázateľná z T , teda máme správu
 tabla z T s položkou $F\varphi$ v koreni. Model v
 na shoduje s $F\varphi$, teda na shoduje s nejakej
 vetvou V .

Vietť vetvy n' ale správa, teda aj V je správa.
 Na V sa teda nachádza $T\psi$ a aj $F\psi$ pre ne-
 jaký výrok ψ . Model v s týmto položkami
 ale shoduje, teda $v \models \psi$ a $v \not\models \psi$, čo
 je spor.

T2-7.4.1: Korektnost tabla PL

Model $\mathcal{A}$ na shoduje s položkom P , pokud
 $P = T \vee \mathcal{A} \models \varphi$ alebo $P = F \vee \mathcal{A} \not\models \varphi$.

Lema: Shoduje sa na model $\mathcal{A}$ ktoré T
shoduje s položkom v hornej tabli z T
(v jazyku L), potom $\mathcal{A}$ vieme expandovať
do jazyka L_c tak, že sa shoduje s jejovou
vehou v tabli.

Ob. Majme tablu $T = \bigcup_{i \geq 0} T_i$ z ktoré T a model
 $\mathcal{A} \in \Pi_L(T)$ shodujú sa s horňou T . Ďalej sa
shoduje s jednoprvkovou vechou V_0 v T_0 . Ďalej
indukciou podľa i najdlhšie postupnosť veliev V_i a
expandíí A_i . A_i budú expandície $\mathcal{A}$ o konstanty $c^A \in C$,
kt. sa vyskytujú na V_i . Ďeda V_i je vechou v
tabli T_i shodujú sa s A_i ; V_{i+1} je predĺžením V_i
a A_{i+1} je expandícia A_i .
Ďalšia vechou potom je $\bigcup_{i \geq 0} V_i = V$ a expandícia
 $\mathcal{A}$ do L_c je "limita" expandíí A_i : teda ak sa
vyskytne symbol $c \in C$ na V , vyskytne sa na nejakej
veche V_i a so ľavou expandíi, čo interpretujeme
ako $\mathcal{A}_i$. Naše ostatné pomocné symboly interpretujeme
ľubovoľne.

1) Pokiaľ T_{i+1} vzniklo z T_i tak predĺžením vetý,
 $V_{i+1} = V_i, A_{i+1} = A_i$

2) Pokiaľ T_{i+1} vzniklo z T_i pripojením položky T_d pre x definíciu z T na konci V_i , tak V_{i+1} bude predĺžením V_i o túto položku a $A_{i+1} = A_i$. Keďže A_{i+1} je modelom T_i , zhoduje sa s novou položkou T_d , takže všetko ok.

3) Nech T_{i+1} vzniklo z T_i pripojením atomického tabula pre položku P na konci V_i . Predlož A_i sa zhoduje s P (ktorá na V_i nie je), zhoduje sa aj s hodnotou pripojeného atom. tabula.

a) pre logickú spojku: $A_{i+1} = A_i$; A_{i+1} sa zhoduje s hodnotou atom. tabula $\Rightarrow$ zhoduje sa s jej hodnotou je to vetou, definujeme V_{i+1} ako predĺženie V_i o túto vetu

b) ak je položka P typom množiny, BÚNO $P = T(\exists x) \varphi(x)$, potom $A_i \models (\exists x) \varphi(x)$, teda exist. $a \in A$, kt. ho spĺňa. Vetou V_{i+1} definujeme ako predĺženie V_i o $T \varphi(x/a)$ a model A_{i+1} ako expanziu A_i o konšt. $a \neq c^A = a$.

c) ak je položka P typom niečoho, BÚNO $T(\forall x) \varphi(x) = P$, tak V_{i+1} definujeme ako predĺženie V_i o atom. tabula. Novou položkou je $T \varphi(x/\perp)$ pre nejaký $\perp$ -term $\perp$. A_{i+1} definujeme ako lin. expanziu A_i o konšt. vyplývajúce na $\perp$.
 $A_i \models (\forall x) \varphi(x) \Rightarrow A_{i+1} \models \varphi(\perp/\perp) \Rightarrow A_{i+1} \models \varphi(x/\perp)$ a model A_{i+1} sa zhoduje s V_{i+1} .

T2 - pohľadovnosť:

Veta: $T \vdash \varphi \Rightarrow T \models \varphi$

dl. Predpokladajme, že $T \not\models \varphi$. Potom exist. model $A \in \mathcal{A}(T)$ t.j. $A \not\models \varphi$.

Hedže $T \vdash \varphi$, existuje model $\mathcal{A} \models T \wedge \neg \varphi$ v jakejkej $\mathcal{L}$. Model $\mathcal{A}$ sa zhoduje s $\varphi \Rightarrow$ ~~zhoduje sa s negáciou $\neg \varphi$ do sa~~ ~~depandovať~~ do $\mathcal{L}$ tak, že sa zhoduje s negáciou $\neg \varphi$ v. Tie sú ale všetky modely.

T3 - 4.5.2: Úplnosť veta VL

Lemma: Kanonický model pre $\mathcal{L}$ je kompletný doménou V sa s ním zhoduje.

dl. Indukciou podľa štruktúry výrazu v položení $\mathcal{L}$ ukážeme, že kanonický model zhoduje s V (keď zhoduje sa s každou položkou P na V).

Základ indukcie:

- dl. $P = T p$ pre $p \in \mathcal{P}$, podľa def. $v(p) = 1$, teda v sa zhoduje

- dl. $P = F p$, tak na V nie môžeme byť $T p$, teda z def $v(p) = 0$ a model sa zhoduje.

Indukčný krok:

Ukážeme 1 prípad, ostatné sú analog. Nech napr. $P = T \vee \hat{A} \psi$. V je dokonalá, P je na nej redukovaná, vyplývajú na nej položky $T \vee a$ a $T \vee$. Podľa IP na α nimi v zhoduje. Teda $v \models \vee a$ a $v \models \vee$, čiže $v \models \vee a \wedge \vee$ a potom v na zhoduje s P .

Veta: $T \models \varphi \Rightarrow T \vdash \varphi$

Ukážeme, že line. dokonalé tablo α položkou $F\varphi$ v každej mŕi byť možné. Pre môžeme buďme predpokladať, že možné nie je.

Tak potom v inom line. dokonalom bleskovej vetve, označme ju V . Zoberme kon. model w pre V . V je dokonalá $\Rightarrow$ obsahuje T a pre všetky atomy $a \in T$ a w na α rovnako zhoduje. Teda platí, že $w \models T$. Zároveň w na zhoduje s $F\varphi$, teda $w \not\models \varphi$. Ale potom $T \not\models \varphi$, čo je spor.

T4 - 7.4.2: Vpřevod tabule PL.

Poslední: Pro každou formulu φ máme
 $B \models \varphi$ (kde = je interpretací dle línova
relace = B) $\Leftrightarrow A = B \models \varphi$ (kde = je inter-
pretací dle identita)

Lema: Kanonický model je besponný do-
honěmí vzhledem V a s ním shoduje.

dl. Pro každý $lk = :$

Indukcí podle strukturní složitosti v polo-
žkách, že kanon. model se shoduje s vzhledem
 V .

Náhled indukce: $\varphi = R(n_1, \dots, n_m)$ je atom. rel.
ab je na V položka $T\varphi$, potom $(n_1, \dots, n_m) \in R^A$
přímě přičmo z def. kanon. modelu. Naopak, ab
je na V položka $F\varphi$, tak na něj už nemůže být
 $T\varphi$ (je besponný), a tak $(n_1, \dots, n_m) \notin R^A$, čili $A \models \varphi$.

Indukční krok: Jen několik případů, ostatní si
dovodí.

Log. spojky: Pro $\neg$ ab na V , např. ab
 $P = F\varphi \hat{=} \neg\varphi$, tak kvůli redukovanosti P na na
 V vyplývá $F\varphi$ alebo $F\varphi$. Podle $\neg P$ se platí
 $A \models \varphi$ alebo $A \models \neg\varphi$ a potom aj $A \models \neg\varphi \wedge \varphi$ a
 A se shoduje s P .

Polozha typu niebi: BUNO nech $P = (\forall x) \varphi(x)$.

Polom ni va V polozhy $T \models \varphi(x(1))$ pre kazdy
konst. L -term $x(1)$ pre kazdy prvok " 1 " $\in A$.

Podla TP: $A \models \varphi(x(1))$ pre kazdy " 1 " $\in A$, teda
aj $A \models (\forall x) \varphi(x)$

Polozha typu vedoh: BUNO nech $P = (\exists x) \varphi(x)$. Polom
je va V polozha $T \models \varphi(x(c))$ pre nejaky " c " $\in A$.

Podla TP: $A \models \varphi(x(c))$, teda aj $A \models (\exists x) (\varphi(x))$.

Ore jazyh $\mathcal{L}$: najme konv. model $A = B / \equiv^B$.

Ore model B plati dohad vyšie, i vah apliku-
jeme posramie na A .

Veta: $T \models \varphi \Rightarrow T \vdash \varphi$

dt. Ubašeme, ze l'nl. dohovlene kablo $\geq T$ a
polozhou $F \varphi$ je spome. Ubašeme sporom (teda nech
v nom je bezpova dohovorei vcha). Zoberme konv.
model kito vchu, oznaime ho A a oznaime A_0
jebo redukta na jazyh L (bez konstant c). Pretoze
vsa vcha je dohovorei, obsahuje $T \vdash$ pre vsetky deklary
 $\varphi \in T$. A na $\mathcal{L}$ vchu shoduje $\Rightarrow A_0 \models T$, ale aj
 $A_0 \models \varphi$ (lebo v horeni je $F \varphi$ a A na $\mathcal{L}$ shoduje
+ φ je z jazyha L). Polom ale $A_0 \in \Pi_c(T) - \Pi_c(\varphi)$.

Čize $T \not\models \varphi$, spr.

T5-4.4.3: konci-vost' sporu.

ak je $T = \bigcup_{i=20} T_i$ sporne tablo, potom existuje

$n \in \mathbb{N}$ 1.-i. T_n je sporne tablo.

ak. Zoberme množinu S všetkých vrcholov T ,
k. nad ktorou neobahuje spor, 1.-i. 2.-icu
položiek $T \models \psi$, $F \psi$.

Keď S bola nekončivá, podľa Königovej lemy
povísiť sa podstrom T na množine S by sme
mali nekonečnú klesajúcu vetvu v S . Potom by
de naše tablo T nebolo sporne, lebo by sa v
ňom nachádzala táto klesajúca vetva.

Množina S teda musí byť končivá. To znamená,
že exist. $d \in \mathbb{N}$ 1.-i. celý S leží na
výš. ~~hlbke~~ hĺbke d . Každý vrchol na
úrovni $d+1$ má nad sebou spor. Vezme si
tab, že T_n obsahuje všetkých vrcholov $\geq$ výš. $d+1$
úrovni: každá vetva T_n je teda sporna.

DÔSLÉDOK: Oohidť pri konštrukcii tabla reprezentujúcej
sporne vetvy, resp. pre systematické tablo, potom sporne
tablo je končivé.

DÔSLÉDOK: Oohidť $T \models \psi$, potom existuje aj končivý
dôkaz tablo dôkaz $\psi \models T$. Navyše, pohládť $T \models \psi$,
potom system. tablo je (končivý) tablo dôkaz $\psi \models T$.

T6 - 5.3.7: Úplňot' resolúcie VL.

ak je S nesplniteľná, potom je resolúciou
samiestniteľná ($\vdash S \text{ tr } \square$)

dl. ak je S nekončinná, má $\geq$ veľ σ kompaktné

~~honesti~~ kompaktnosti konečnú nesplniteľnú

časť S . Resolúciou samiestnutie S je ľahké
res. samiestnutie S . Ďalej predpokladáme, že S je končinná.

Dobrá môžeme ind. podľa # premenných v S .

ak $|Var(S)| = 0$, jediná možná nesplniteľná formula
bez premenných je $S = \{\square\}$ a máme jednoduchý
dobrá $S \text{ tr } \square$. Mäť vyberieme $p \in Var(S)$.

Najskôr, že S^p a $S^{\bar{p}}$ sú nesplniteľné. Máme σ
1 premennú menej, teda podľa TP ľahko. Resolúciou
meť strom T meť $S^p \text{ tr } \square$ a T' meť $S^{\bar{p}} \text{ tr } \square$.

Ukážeme, že so strom T máme vyrobiť resolúčný
strom $\hat{T}$ meť $S \text{ tr } \neg p$ a strom $\hat{T}'$ meť $S \text{ tr } p$.

Odom už ľahko vyrobíme strom meť $S \text{ tr } \square$:

ku boriam $\square$ pripojíme horšie strom $\hat{T}$ a $\hat{T}'$ ako
ľavého a praveho syna. Teda v porbe strom budú
samiestnutia vzhľadom $\square \geq \{p\}$ a $\{ \neg p \}$.

Lemma 8.6.4:

Množina vrcholů a jej uspořádání v řadě.
Máme jen hlavní v nichových vrcholů, a
to tak, že přidáme -p

Na každém listě struny T je nějaká hlavní
 $C \in S^p$. Některé 2 situace:

- 1) $C \in S$
- 2) $C \notin S$, ale potom už $C \cup \{1, 2\} \in S$.

V prvním případě vezmeme každý řádek, v
druhém přidáme do C a do některých hlavních
nad tímto listem třeba 1p. V listech si jen
hlavní $\in S$, do toho "vylučal" 1p (namísto
 $\square$) a každý vnější vrchol je resolvable v jejich
typu.

T7 - 8.6.5: úplnost resolvable PL.

Lemma (lifting lemma): Máme hlavní C_1 a C_2
a disjunktní množiny proměnných. Ab si

C_1^* a C_2^* základní instance hlavních C_1 a C_2 a
ab je C^* resolvable C_1^* a C_2^* , potom existuje re-
solvable C hlavní C_1 a C_2 1.2 C^* je základ-
nou instancí C.

DĀSLEDOK: Majme CNF formulu S a omaime
dho S^* množinu rielthjeh jeh zāhlachjeh
intakmā. Oohial $S^* \vdash_P C^*$ (va irāni VL) ~~potom~~
me mējahi zāhlachnā hlaumla C^* , potom lēist.
hlaumla C a zāhlachnā mls. 0 t.ē. $C^* = C$ a
 $S \vdash_P C$ (va irāni ~~PL~~ PL).

VEĀTA (o iqlnoti resolūcie): dho jeh CNF form.
 S nepilnietl'vā, potom jeh resolūciā samielmā-
l'vā.
dho omaime S^* množinu rielthjeh zāhlachjeh
intakmā hlaumla $\exists S$. Oholē S jeh nepilnietl'-
vā, ka dho S^* jeh nepilnietl'vā (Herbrandova
metā). 2 vef o iqlnoti jrohoj resolūcie
rieme jeh $S^* \vdash_P \Box$ (va irāni VL). 2 līfting
lēmā a dīrēdhu dōdārdmā hlaumla C t.ē.
 $C = \Box$ a $S \vdash_P C$ (va irāni PL).
dho bēdžē $\Box$ jeh intakmā C , mēn' l'ft $C = \Box$,
kēdā $S \vdash_P \Box$.

T8-8.2.75: Skolemova veta.

Lemma: Majme L -vety $\varphi = (\forall x_1) \dots (\forall x_n) (\exists y) \psi$
a nech je φ' veta $(\forall x_1) \dots (\forall x_n) \psi(y/f(x_1, \dots, x_n))$,

hde f je nový funkčný symbol. Potom:

- 1) L -redukt každého modelu $\mathcal{A}'$ je modelom φ
- 2) každý model $\mathcal{A}$ ide expandovať na model $\mathcal{A}'$

dt. 1) Majme model $\mathcal{A} \models \varphi'$. Nech $\mathcal{A}$ je jeho
redukt na L . Pre každé ohodnotenie premenných
 e platí $\mathcal{A} \models \psi[e(y/a)]$, hde $a = f^{\mathcal{A}}($

$$\cancel{f^{\mathcal{A}}(e(x_1), \dots, e(x_n))}^{\mathcal{A}'}[e]. \quad a = (f^{\mathcal{A}}(x_1, \dots, x_n))^{\mathcal{A}'}[e].$$

2) ~~Keďže $\mathcal{A}$~~ No ale exist. kvantifikátor vo
 φ sa opakuje a máme niečo rýchle, teda aj
 $\mathcal{A} \models \varphi$.

2) Keďže $\mathcal{A} \models \varphi$, existuje funkcia $f^{\mathcal{A}'}: A^n \rightarrow A$ t.j.
pre každé ohodnotenie e platí $\mathcal{A} \models \psi[e(y/a)]$,
hde $a = f^{\mathcal{A}}(e(x_1), \dots, e(x_n))$. To znamená, že
expandácia $\mathcal{A}$ do $\mathcal{A}'$, kt. vznikla prídáním
fkt. $f^{\mathcal{A}}$ je modelom φ' .

DŮSLEDEK: ak aplikujeme Lemu opakovan, dostane-
me, že veta φ a jej Skolemova varianta φ'
sú ekvivalentné.

UETA (Yhdenmuka): Teorema má ohrovní
konstruktivnu teorii.

dt. Máme L -teorii T . Každý axiom nahradíme
jeho globálním usávkou a přivedeme do
PNF $\rightarrow$ získáme ekvivalentní teorii T' .

Teraz nahradíme každý axiom jeho SK. V.
Získali jsme T'' v rozšířeném jazyku L' . Z lemy
plyne, že L -redukt každého modelu T' je
modelem T' , tedy T'' je extenzí T' a zároveň
každý model T' jsme expandovali na model
 T'' do jazyka L , tedy jde o horr. extenzi.

Teorie T'' je axiomatizovaná univerzálními
sklenními a ak odháníme kvantili hátorové
předixy, získáme ohrovní T''' ekv. s T'' ,
tedy aj T''' je horr. det. T .

T9 - 8.3.6: Herbrandova veta.

Majme skorini teoriju T v jeziku L bez
~~aspekta~~ konvencije o aspekta i konv. simbolom
Polom:

- bodi ma T Herbrandov model,
- delo konstruje konvencije veta sahladnjih
instancij teorije T , kt. konvencija je
nepopravljiva.

dh. Omaime T_{ground} ako množinu svih
sahladnjih instanci teorije T . Konstru-
irame sistematički tablo z T_{ground} o položaju $F \perp$
v konvenciji, de z jezika L bez konvencije o
povraću konv. simbolu (aj tak ich nepopravljive,
debo vnaime konvencije).

Polici tablo obrauje bespravni veta, potom je
konvencij model po kito veta Herbrandovim
modelom T .

V opacnom pripade maime tabla dobar veta,
kda teorija T_{ground} je nepopravljiva a kda aj
 T je nepopravljiva. Hed'je tabla dobar je ^{konv.} ^{veta}
me ltu konvencije veta opred instanci teorije
d opred $\in T_{ground}$. Vrh konvencija je kda
nepopravljiva.

T10 - 7.3.2: Löwenheim-Skolemova věta,

at je L prvotelný jazyk hes norma, potom každá hespová L -teória má prvotelné nehesný model.

at Vezme napr. systematické tablo $\exists T$.

Dajme $F \vdash$ do kalva. Keďže T je hespová, nie je v nej dokazateľný por. Tablo teda obsahuje hespovú vetu. Zoberme jebo hem. model pre túto vetu a jeho L -redukt je hľadáný prv. ∞ model.

DŮSLEDOK: at je L prvotelný jazyk hes =, potom ku každej L -štruktúre exist. elem. chin. prvotelné ∞ štruktúra

at Majme L -štruktúru A . Teória $Th(A)$ je hespová (má model A), teda podľa LS veľ. má prvotelné nehesný model $B \models Th(A)$. Potom ale $B \equiv A$

VEĽA (LS o normu): at je L prvotelný ∞ norma, potom každá hespová L -teória má prvotelný model (hesný alebo prv. nehesný).

DŮSLEDOK: at je L prvotelný jazyk ∞ =, tak ku každej nehesnej štruktúre existuje elem.

elem. spoj. a istinitost.

T90 - pokazivanje

def. Majme a istinitu A. ~~Da~~ Zbogme Morice
 $Th(A)$. To je bespravna a podla L3 ref a
samo on mo pokazati model $B \models Th(A)$.

Tada $B \equiv A$.

Ešte morame uvažat, da je nekoncizno: n
A plati pre baidi $n \in N$ rešenja "kintuje
dopu n prava". Jedice $B \equiv A$ platio tiho
rešenja aj n B. No dle potom B nemoze
biti koncizna, lto by sme morali na laktenech.

T11 - 9.2.3 + 9.2.6 : Homomorfizmus a elem. elem.

DEFINICIE: Majme istinitu A, B jezika $L = \langle R, S \rangle$.

Bižebia $h: A \rightarrow B$ je izomorfizmus $\Leftrightarrow$ plati
1) pre baidi L-term A a obodolenie $e: Var \rightarrow A$ plati:

$$h(A^B[e]) = A^B[e \circ h].$$

2) pre baidi L-formula φ a obodolenie $e: Var \rightarrow A$
plati: $A \models \varphi[e] \Leftrightarrow B \models \varphi[e \circ h]$.

def. " $\Rightarrow$ ": pre atom formuly a term by zovremia
(sem. baidi) prismo $\exists$ def. ; inak indukcio podla
istinitu term/formuly.

$L =$: al je h bižebia splinjiva 1), 2), dodadim $L =$
 $= h(x_1 - x_2)$ a $\varphi = R(x_1 - x_2)$ dokazeme vlastosti $\exists$ def.

isomorfizmu.

DÔSLÉDOK: $A \simeq B \Rightarrow A \equiv B$.

TVRDENIE: ak je L jazyk $\wedge =$, A, B konečné

L -štruktúry, potom platí: $A \simeq B \Leftrightarrow A \equiv B$.

$\Rightarrow$ all " $\Rightarrow$ ": DÔSLÉDOK.

" $\Leftarrow$ ": Predpokladajme, že $A \equiv B$; ukážeme, že
existuje izomorf. medzi A a B . Ide o jazyk $\wedge =$,
teda môžeme rekurzívne vyjadriť, že 'existuje
práve n prvkov'. Teda $|A| = |B|$.

Označme ako A' lepanštinu A o nultu prvok
z A ; ide o štruktúru s jazykom $L' = L \cup \{c_a \mid a \in A\}$.

Ukážeme, že B nie je lepanštinou na L' -štruktúre
 B' tak, že $A' \equiv B'$. Odom zohľadníme $h(a) = c_a^{B'}$ je
isomorfizmom A' a B' (teda aj ich L -redukty A, B):
(pre A my): $f^A(a_1, \dots, a_n) = a \Leftrightarrow A' \models f(c_{a_1}, \dots, c_{a_n}) = c_a$

$$\Leftrightarrow B \models f(c_{a_1}, \dots, c_{a_n}) = a \Leftrightarrow f^{B'}(\underbrace{c_{a_1}^{B'}}_{h(a_1)}, \dots, \underbrace{c_{a_n}^{B'}}_{h(a_n)}) = \underbrace{c_a^{B'}}_{h(a)}$$

$\downarrow$
Toto ale potvrdzuje $A' \equiv B'$

$$f^{B'}(h(a_1), \dots, h(a_n)) =$$

$$= h(f^A(a_1, \dots, a_n)) \quad \checkmark$$

(tak isto pre B a B')

7.11 - pohľadovanie

Nášim cieľom bude teda ukázať, že $A' \equiv B'$.

AKA: že v nich platia tie isté vety.

Ukážeme, že pre každé $c_a^{A'} = a \in A$ existuje prvok $b \in B$ t.j. pre lepanie o interpretáciu hovorí symbolu c_a platí $\langle A, a \rangle \equiv \langle B, b \rangle$

A označíme množinu foriem $\varphi(x)$ t.j.

$\langle A, a \rangle \models \varphi(x(c_a))$ (tie reprezentujú vety pod-
dávaj v $\langle A, a \rangle$ obsahujúce hovorí c_a). Keďže A je
hovorí množina, exist. hovorí veta foriem
 $\varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x)$ t.j. pre každú formulu $\varphi \in \mathcal{L}$
platí: $A \models \varphi \Leftrightarrow \varphi_i$. Odôvodnenie: formuly jedny
písmennej vyjadrujú "vlastnosť" prvku. T.j. množ-
ja podmnožinu domény, pre kt. platia. Ale množina
 A je hovorí, t.j. má $2^{|A|}$ podmnožín, teda $\varphi(x)$ má
lebo $2^{|A|}$ možností vyjadrujú, pre kt. bude platiť.

Získali aj $B \models \varphi \Leftrightarrow \varphi_i$ (lebo $A' \equiv B$ a táto
zobrat ghu. možno tejto formuly, čo je veta).

Keďže v A platí veta $(\exists x) \bigwedge_{i=1}^m \varphi_i$ (symbolu
veta prvku $a \in A$) a $A \equiv B$, dostaneme aj

$$B \models (\exists x) \bigwedge_{i=1}^m \varphi_i$$

To znamená, že existuje $b \in B$ a. i. $B \models$

$$B \models \bigwedge_{i=1}^m \varphi_i [x/b]$$

platí $B \models \varphi [x/b]$; tedy aj $\langle B, b \rangle \models \varphi(x/a)$

~~Takto sme ukázali: „^(valimenní) platí $\langle A, a \rangle \models \varphi(x/a)$
 $\Rightarrow$ platí $\langle B, b \rangle \models \varphi(x/a)$ “.~~
 (to isté)

~~Postup rovnaký by bol každý iný.~~

Ako chceli ukázať, že $\langle A, a \rangle \equiv \langle B, b \rangle$.
 Ak máme $\langle A, a \rangle \models \varphi(x/a)$, tak $\exists$ kon-
 štantu $b \in B$ platí $\langle B, b \rangle \models \varphi(x/a)$. Tým rovnakým: že môžeme
 predpokladať, že exist. $\langle A, a \rangle \models \neg \varphi(x/a)$ a $\langle B, b \rangle \models \neg \varphi(x/a)$. Musí chovať horš. sa,
 lebo $A \equiv B$:

$$\langle B, b \rangle \models \varphi(x/a)$$

$$\langle A, a \rangle \not\models \varphi(x/a), \text{ ak je to konštantou: } \langle A, a \rangle \models \neg \varphi(x/a)$$

Teda $\neg \varphi(x) \in \mathcal{L}$. Ak potom $\langle B, b \rangle \models \neg \varphi(x/a)$,
 môžeme.

T12 - 9.4.4: Pokiaľ má teória ľubovoľne veľké ~~počítateľné~~ končné modely, má aj nekonečný model.

ab. 1) Pokiaľ ide o jazyk bez rovnosti, so-
beríme kanonický model pre niektorí bezporní
relou $\sim$ takle $\exists T \cap \text{položku } F \perp . T$ je
bezporná $\Rightarrow$ má modely $\Rightarrow$ takto nebude sporné.

2) V prípade jazyka s rovnosťou: Zoberme elementárnu
 T' teóriu T v jazyku, kt. je rozšírený o
počítateľne (nekonečno) veľa konstant c_i :
$$T' = T \cup \{c_i = c_j \mid i \neq j \in \mathbb{N}\}$$

Pr. Každá končná časť T' má model. Nech
 k je najväčšie $n. z.$ ch sa vyskytujú v tejto
končnej časti T' . Potom stačí zobrať ľubovoľný
aspoň $k+1$ -prvkový model T a interpretovať
konst. $c_0, \dots, c_k$ ako rôzne prvky.

$\exists$ veľký o kompaktnosti: aj celá T' má model, keď je
nutne nekonečný i jeho redukcia na pôvodný jazyk
(zahrnutie konstant) je nekonečným modelom T .
DŮSLEDOK: V tomto prípade nie je nikdy veľkých
končných modelov axiomatizovateľná.

T13-9.4.6: $K \subseteq \mathcal{L}$ je hieda struktūra a $\bar{K} = \mathcal{L} - K$ je jās doplnoš. K je konēne aksiomatizovātēna $\Leftrightarrow K$ a a $\bar{K}$ ir aksiomatizovātēnē.

dh. " $\Rightarrow$ ": dh je K konēne aksiomatizovātēna, mēme jo aksiomatizovat a j pamoza konēne veta sēlumi $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ (formula $\rightarrow$ jās ghu. izsaki). Ņotom na aksiomatizācijā $\bar{K}$ sēlume sēlumi* $\psi = \neg(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n)$.

" $\Leftarrow$ ": Ņech T a S ir teorije l.ē. $\mathcal{L}(T) = K$ a $\mathcal{L}(S) = \bar{K}$.

Sēlume A teorijā $T \cup S$, hl. muih bjt pēvā:

$\mathcal{L}(T \cup S) = \mathcal{L}(T) \cap \mathcal{L}(S) = K \cap \bar{K} = \emptyset$. $\exists$ velt σ homomorfizmi ekvāli hē konēne podteorije $T' \subseteq T$ a $S' \subseteq S$ l.ē. $\emptyset = \mathcal{L}(T' \cup S') = \mathcal{L}(T') \cap \mathcal{L}(S')$.

Īdejs plāns: $\mathcal{L}(T) \subseteq \mathcal{L}(T') \subseteq \overline{\mathcal{L}(S')} \subseteq \overline{\mathcal{L}(S)} = \mathcal{L}(T)$.

Tēda $\mathcal{L}(T') = \mathcal{L}(T)$. dh T' je konēnā, tēda T' je konēnon aksiomatizācijā K .

* lebo lēn pē sēlumi: $\mathcal{L}(\neg\varphi) = \overline{\mathcal{L}(\varphi)}$

T14 - 10.1.6: Pokiaľ je teória T rekursívne
 axiomatizovateľná a má rekursívne spočítateľnú
 kompletáciu, je T rozhodnuteľná.

dl. Pre danú teóriu $\mathcal{L}$ buď $T + \mathcal{L}$, alebo
 existuje proti príklad $\mathcal{A} \models \mathcal{L}$, teda jednoduchá
kompletná extensia T_i teórie T t.j. $T_i \models \mathcal{L}$.

$\exists$ kompletnosti ale plynie, že $T_i \models \neg \mathcal{L}$

Nás alg. bude paralelne konštruovať tablo
 dôkaz $\mathcal{L} \models T$ a (postupne) tablo dôkaz $\neg \mathcal{L}$ zo
 všetkých komplet. jednoduchých teórií $T_1, T_2, \dots$

Viem, že aspoň $\neg$ paralelne konštruovaných
 tabiel je konečné, teda aj konečné, lebo ne-
 predlžujeme konečnú veľk. alg. teda skončí.

$\rightarrow$ vyúsťujeme dove tailing: najprv 1. krok konštrukcie
 1. tabla, potom 2. krok 1. tabla, 1. krok 2. tabla,
 3. krok 1. tabla, atď.:

hrok $\rightarrow$

	1	2	3	...
1	1	2	4	
2	3	5		
3	6			
...				

Tabla

