MATEMATICKÁ ANALÝZA 3, ZIMNÍ SEMESTR 2025–2026
ZADÁNÍ PÍSEMNÉ ČÁSTI ZKOUŠKY - VARIANTA A

LUBOŠ PICK

Příklad A1 Nalezněte všechna maximální řešení diferenciální rovnice

$$y' = 2\sqrt{|y|}e^{-x}$$

splňující podmínku

$$y(\log \tfrac{1}{2}) = -1,$$

určete jejich definiční obory a jednostranné limity v krajních bodech definičních oborů. **(10 bodů)**

Příklad A2 Nechť x, y jsou diferencovatelné funkce proměnné $t \in \mathbb{R}$. Nalezněte všechna maximální řešení soustavy diferenciálních rovnic

$$x' = y - x,$$
$$y' = y - 2x + \frac{3}{\cos t}.$$

(10 bodů)

Příklad A3 Dokažte, že vztahy

$$x^2 + 2y^3 + 4u^2 - v = 0$$
$$x^2u^2 + y + 2v = 11$$

definují na jistém okolí bodu $[x, y] = [1, 0]$ diferencovatelné funkce $u(x, y)$, $v(x, y)$ takové, že $u(1, 0) = 1$ a $v(1, 0) = 5$. Rozhodněte, zda existuje okolí bodu $[x, y] = [1, 0]$, na kterém je zobrazení

$$\Phi(x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y))$$

difeomorfismus. **(10 bodů)**

Příklad A4 Rozhodněte, zda má funkce

$$f(x, y) = e^{-(x^2+2y^2)}(x^2 + 9y^2)$$

body globálního maxima a globálního minima na množině

$$M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + 4y^2 \leq 4\},$$

a pokud ano, určete je. **(10 bodů)**

Příklad A5 Uvažujte metrický prostor $(P, \varrho) = (\mathcal{C}([0, 1]), \varrho_{\text{int}})$ a množinu

$$A = \{f \in P : \forall x \in P : |f(x)| \leq 1\}.$$

(a) Rozhodněte, zda A je omezená v (P, ϱ).
(b) Rozhodněte, zda A je křivkově souvislá v (P, ϱ).
(c) Rozhodněte, zda (A, ϱ) je Baireův prostor.

Tvrzení dokažte. **(10 bodů)**

2025-2026-ZS-A1

$\boxed{A1}$ Nalezněte všechna maximální řešení rovnice

(A1-1) $$y' = 2\sqrt{|y|}\,e^{-x}$$

splňující podmínku

(A1-2) $$y(\log \tfrac{1}{2}) = -1,$$

určete jejich definiční obory a jednostranné limity v krajních bodech jejich def. oborů

Řešení: Položme

$$h(x) = e^{-x}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Označme $I = \mathbb{R}$, pak $\mathcal{D}(h) = I$.

Jediným stacionárním řešením rovnice (A1-1) je $y(x) = 0$, $x \in I$.

Označme dále

$$g(y) = 2\sqrt{|y|}, \quad y \in \mathbb{R}$$

a

$$J_1 = (-\infty, 0), \quad J_2 = (0, \infty).$$

Potom J_1, J_2 jsou jediné maximální otevřené intervaly v množině

$$\{y \in \mathbb{R} : g(y) \neq 0\}.$$

Položme pro $y \in J_1$

$$G_1(y) = \int \frac{1}{g(y)}\,dy = \int \frac{dy}{2\sqrt{-y}} \stackrel{c}{=} -\sqrt{-y}$$

a pro $y \in J_2$

$$G_2(y) = \int \frac{1}{g(y)}\, dy = \int \frac{dy}{2\sqrt{y}} \overset{c}{=} \sqrt{y}\ .$$

Potom

$$G_1(J_1) = (-\infty, 0) \quad \text{a} \quad G_2(J_2) = (0, \infty).$$

$I \times J_1$: Řešení na I s hodnotami v J_1 splňují

$$\text{(A1-3)} \qquad -\sqrt{-y(x)} = -e^{-x} + C, \qquad x \in I_C,$$

kde $C \in \mathbb{R}$ a I_C je nějaký maximální otevřený interval v množině

$$A_C = \{x \in \mathbb{R} : -e^{-x} + C \in (-\infty, 0)\}.$$

Protože

$$-e^{-x} + C \in (-\infty, 0) \iff -e^{-x} + C < 0$$

$$\iff e^{-x} > C,$$

jest

$$\text{(A1-4)} \qquad I_C = \begin{cases} \mathbb{R}, & C \leq 0, \\ (-\infty, -\log C), & C > 0. \end{cases}$$

$I \times J_2$: Řešení na I s hodnotami v J_2 splňují

$$\text{(A1-5)} \qquad \sqrt{y(x)} = -e^{-x} + C, \qquad x \in \tilde{I}_C,$$

kde $C \in \mathbb{R}$ a $\tilde{I}_C$ je nějaký maximální otevřený interval v množině

$$B_C = \{x \in \mathbb{R} : -e^{-x} + C \in (0, \infty)\}.$$

Protože

$$-e^{-x}+C \in (0,\infty) \iff -e^{-x}+C > 0$$

$$\iff -e^{-x} > -C \iff e^{-x} < C,$$

platí $\qquad \tilde{I}_c = \emptyset \quad$ pro $\quad C \leq 0$

a $\qquad \tilde{I}_c = (-\log C, \infty) \quad$ pro $\quad C > 0.$

Označme y_p řešení splňující (A1-2). Potom po dosazení $x = \log \frac{1}{2}$ a $y(x) = -1$ do (A1-3) máme

$$-\sqrt{1} = -e^{-\log \frac{1}{2}} + C,$$

tedy

$$-1 = -2 + C,$$

takže $C = 1$. Dle (A1-4) tedy jest $I_c = (-\infty, 0)$.

Odtud plyne, že

$$y_p(x) = -\left(e^{x}-1\right)^2, \quad x \in (-\infty, 0).$$

Protože

$$\lim_{x \to 0-} y_p(x) = 0,$$

lze v bodě $x = 0$ slepit y_p a stac. řešení!

Všechna maximální řešení splňující (A1-2) jsou tedy buď tvaru

$$\text{(A1-6)} \quad y(x) = \begin{cases} -(e^{-x}-1)^2, & x \in (-\infty, 0), \\ 0, & x \in [0, \infty), \end{cases}$$

nebo tvaru

$$(A1\text{-}7)\quad y(x) = \begin{cases} -(e^{-x}-1)^2, & x\in(-\infty,0),\\ 0, & x\in[0,-\log C],\\ (-e^{-x}+C)^2, & x\in(-\log C,\infty) \end{cases}$$

pro nějaké $C\in(0,1]$. Definičním oborem každého z těchto řešení je $\mathbb{R}$. Pro každé řešení (kteréhokoli tvaru) platí

$$\lim_{x\to-\infty} y(x) = -\infty.$$

Pro řešení tvaru (A1-6) je

$$\lim_{x\to\infty} y(x) = 0$$

a pro řešení tvaru (A1-7) je

$$\lim_{x\to\infty} y(x) = C^2, \qquad C\in(0,1].$$

<u>Hodnocení:</u>

stacionární řešení	1
obecná řešení	3
partikulární řešení	2
diskuse všech řešení (lepení)	3
limity v $\pm\infty$	1

$\boxed{A2}$ Nechť x a y jsou diferencovatelné funkce proměnné $t \in \mathbb{R}$. Nalezněte všechna maximální řešení soustavy

$$x' = y - x$$
$$y' = y - 2x + \frac{3}{\cos t}.$$

Řešení: Řešení hledáme pro $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Sestavíme matici soustavy a upravujeme:

$$\left(\begin{array}{cc|c} \lambda+1 & -1 & 0 \\ 2 & \lambda-1 & \frac{3}{\cos t} \end{array}\right) \quad + (\lambda-1) \times \text{první řádek}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} \lambda+1 & -1 & 0 \\ \lambda^2+1 & 0 & \frac{3}{\cos t} \end{array}\right)$$

neboť $(\lambda+1)(\lambda-1)+2 = \lambda^2-1+2 = \lambda^2+1$.

Z druhého řádku dostaneme rovnici

$$x'' + x = \frac{3}{\cos t}.$$

Fundamentální systém homogenní rovnice (reálný!) je tedy $\{\cos t, \sin t\}$.

Řešení nehomogenní rovnice hledáme ve tvaru

$$x_p = a(t)\cos t + b(t)\sin t.$$

Víme, že $\quad a'(t)\cos t + b'(t)\sin t = 0$

a $\quad a'(t)(-\sin t) + b'(t)\cos t = \frac{3}{\cos t}.$

Tedy $\qquad a'(t) = -\dfrac{\sin t}{\cos t}\, b'(t).$ Dosadíme:

$$\frac{\sin^2 t}{\cos t}\, b'(t) + b'(t)\cos t = \frac{3}{\cos t},$$

tedy $\quad (\sin^2 t + \cos^2 t)\, b'(t) = 3,$

tedy $\qquad b'(t) = 3.$

Integrací dostaneme $\quad b(t) \overset{c}{=} 3t.$

Dopočítáme a:

$$a'(t) = -3\,\mathrm{tg}\, t,$$

tedy

$$a(t) \overset{c}{=} 3\log(|\cos t|).$$

Celkem tudíž

$$x(t) = 3\log(|\cos t|)\cdot\cos t + 3t\sin t + \alpha\cos t + \beta\sin t,$$

$$\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Z první rovnice dostaneme

$$x' + x - y = 0,$$

tedy

$$y = x' + x = -3\,\mathrm{tg}\, t\cdot\cos t - 3\log(|\cos t|)\sin t + 3\sin t + 3\cos t$$
$$-\alpha\sin t + \beta\cos t + 3\log(|\cos t|)\cos t + 3t\sin t +$$
$$+ \alpha\cos t + \beta\sin t$$
$$= \sin t\left(-3\log(|\cos t|) + 3t - \alpha + \beta\right) +$$
$$+ \cos t\left(3\log|\cos t| + 3t + \alpha + \beta\right).$$

Všechna maximální řešení jsou tedy tvaru

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin t\,(3t+\beta) + \cos t\,(3\log|\cos t| + \alpha) \\ \sin t\,(-3\log(|\cos t|) + 3t - \alpha + \beta) + \\ + \cos t\,(3\log(|\cos t|) + 3t + \alpha + \beta) \end{pmatrix},$$

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

<u>HODNOCENÍ</u>

λ-matice a FS hom. soustavy:	3
obecné řešení	7

$\boxed{A3}$ Dokažte, že vztahy

$$x^2+2y^3+4u^2-v=0$$

$$x^2u^2+y+2v=11$$

definují na okolí bodu $[x,y]=[1,0]$ diferencovatelné funkce u,v proměnných x,y splňující

$$u(1,0)=1, \quad v(1,0)=5.$$

Rozhodněte, zda existuje okolí bodu $[x,y]=[1,0]$, na kterém je zobrazení

$$\Phi(x,y)=\big(u(x,y),v(x,y)\big)$$

difeomorfismus.

Řešení: Uvažujme funkci $F:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^2$, $F=(F_1,F_2)$, definovanou předpisem

$$F_1(x,y,u,v)=x^2+2y^3+4u^2-v,$$

$$F_2(x,y,u,v)=x^2u^2+y+2v-11.$$

Potom $F\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^4,\mathbb{R}^2)$, $F(1,0,1,5)=[0,0]$ a platí

$$\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}8u & -1\\ 2x^2u & 2\end{vmatrix}=(16+2x^2)u,$$

tedy $\dfrac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(u,v)}(1,0,1,5)=18\neq 0.$

Tedy dle VOIF existují okolí $U \subset \mathbb{R}^2$ bodu $[1,0]$ a okolí $V \subset \mathbb{R}^2$ bodu $[1,5]$ taková, že pro každé $[x,y] \in U$ existuje právě jedna dvojice $[u(x,y), v(x,y)] \in V$, přičemž $u, v \in C^{\infty}(U)$.

Dále platí

$$\frac{\partial u}{\partial x}(1,0) = - \frac{\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(x,v)}(1,0,1,5)}{\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(u,v)}(1,0,1,5)} =$$

$$= -\frac{1}{18} \begin{vmatrix} 2x & -1 \\ 2xu^2 & 2 \end{vmatrix}_{(1,0,1,5)}$$

$$= -\frac{1}{18}\left(4x + 2xu^2\right)\Big|_{(1,0,1,5)} = -\frac{1}{3},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(1,0) = \frac{-\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(y,v)}(1,0,1,5)}{\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(u,v)}(1,0,1,5)} = -\frac{1}{18} \begin{vmatrix} 6y^2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}_{(1,0,1,5)}$$

$$= -\frac{1}{18}\left(12y^2 + 1\right)\Big|_{(1,0,1,5)} = -\frac{1}{18},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}(1,0) = - \frac{\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(u,x)}(1,0,1,5)}{\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(u,v)}(1,0,1,5)} = -\frac{1}{18} \begin{vmatrix} 8u & 2x \\ 2xu^3 & 2xu^2 \end{vmatrix}_{(1,0,1,5)}$$

$$= -\frac{1}{18}\left(16xu^3 - 4x^3u^3\right)\Big|_{(1,0,1,5)} = -\frac{2}{3},$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}(1,0) = -\frac{\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(u,y)}(1,0,1,5)}{\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(u,v)}(1,0,1,5)} = -\frac{1}{18}\begin{vmatrix} 8u & 6y^2 \\ 2x^3u & 1 \end{vmatrix}(1,0,1,5)$$

$$= -\frac{1}{18}\left(8u - 12x^3uy\right) = -\frac{4}{9}.$$

Funkce Φ je tedy třídy $C^\infty(U)$, a tudíž třídy $C^1(U)$.

Navíc

$$J_\Phi([1,0]) = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(1,0) & \frac{\partial u}{\partial y}(1,0) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(1,0) & \frac{\partial v}{\partial y}(1,0) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{18} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{4}{9} \end{vmatrix} = \frac{4}{27} - \frac{2}{54} = \frac{6}{54}$$

$$= \frac{1}{9} \neq 0$$

Podle VOLD existuje okolí $\tilde{U} \in \mathbb{R}^2$ bodu $[1,0]$ takové, že $\Phi|_{\tilde{U}}$ je difeomorfismus.

<u>HODNOCENÍ</u>

	ověření předpokladů VOIF	3
	závěr (existence IF)	1
	výpočet J_Φ	4
	závěr – difeomorfismus	2

2025-2026-ZS-A4

$\boxed{A4}$ Rozhodněte, zda má funkce

$$f(x,y) = e^{-(x^2+2y^2)}\,(x^2+9y^2)$$

body globálního maxima a globálního minima na množině

$$M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : x^2+4y^2 \leq 4\},$$

a pokud ano, určete je.

Řešení: Je-li $[x,y] \in M$, potom

$$\|[x,y]\|^2_{\mathbb{R}^2} = x^2+y^2 \leq x^2+4y^2 \leq 4,$$

a tedy $\|[x,y]\|_{\mathbb{R}^2} \leq 2$. Tudíž je M omezená v $\mathbb{R}^2$.

Položme

$$g(x,y) = x^2+4y^2, \quad [x,y] \in \mathbb{R}^2,$$

potom $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je spojitá,

$$M = g^{-1}\big((-\infty,4]\big)$$

a $(-\infty,4]$ je uzavřená množina v $\mathbb{R}$. Tedy M je uzavřená v $\mathbb{R}^2$. Tudíž je M kompaktní podmnožina $\mathbb{R}^2$. Funkce $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je spojitá, a tedy nabývá na M svého globálního maxima i svého globálního minima.

Int M Protože $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$, extrémy na

$$\mathrm{Int}\, M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : x^2+4y^2<4\}$$

se mohou nabývat pouze ve stacionárních bodech.

Jest

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^{-(x^2+2y^2)}(-2x)(x^2+9y^2)+e^{-(x^2+2y^2)}\cdot 2x$$

$$= 2x\, e^{-(x^2+2y^2)}(1-x^2-9y^2),$$

a

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = e^{-(x^2+2y^2)}(-4y)(x^2+9y^2)+e^{-(x^2+2y^2)}\cdot 18y$$

$$= 2y\, e^{-(x^2+2y^2)}(9-2x^2-18y^2).$$

Stacionární body tedy vyhovují soustavě

$$x=0 \quad \text{nebo} \quad 1-x^2-9y^2=0$$

&

$$y=0 \quad \text{nebo} \quad 9-2x^2-18y^2=0.$$

Této soustavě vyhovují pouze body

$[0,0]$, $[0,\pm\frac{1}{\sqrt{2}}]$, $[\pm 1, 0]$ (všechny leží v Int M),

protože soustava $1-x^2-9y^2=0$

& $9-2x^2-18y^2=0$

nemá řešení, neboť z ní plyne

$$2-2x^2-18y^2=0$$

& $$9-2x^2-18y^2=0,$$

a tedy $7=0$.

∂M: Uvažujme funkci $h: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definovanou předpisem
$$h(x,y) = x^2 + 4y^2 - 4.$$
Potom
$$\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = 2x, \quad \frac{\partial h}{\partial y}(x,y) = 8y.$$
Tedy $\nabla h(x,y) = \theta$ pouze pro $[x,y] = [0,0]$, tento bod ale není prvkem množiny
$$\partial M = \{[x,y] \in \mathbb{R} : h(x,y) = 0\}.$$
Tudíž, dle VOLM, je-li $[x,y]$ bodem extrému f na ∂M, pak $[x,y]$ vyhovuje soustavě
$$(1) \quad 2x e^{-(x^2+2y^2)}(1-x^2-9y^2) = 2x\lambda$$
$$(2) \quad 2y e^{-(x^2+2y^2)}(9-2x^2-18y^2) = 8y\lambda$$
$$(3) \quad x^2+4y^2-4 = 0.$$

Z (1) plyne, že buď $x=0$ nebo $e^{-(x^2+2y^2)}(1-x^2-9y^2) = \lambda$.

Je-li $x=0$, pak z (3) plyne $y = \pm 1$.

Z (2) plyne, že buď $y=0$ nebo $e^{-(x^2+2y^2)}(9-2x^2-18y^2) = 4\lambda$.

Je-li $y=0$, pak z (3) plyne $x = \pm 2$.

Jestliže
$$e^{-(x^2+2y^2)}(1-x^2-9y^2) = \lambda$$
&
$$e^{-(x^2+2y^2)}(9-2x^2-18y^2) = 4\lambda$$
pak
$$4-4x^2-36y^2-9+2x^2+18y^2 = 0,$$

tedy

$$-2x^2 - 18y^2 - 5 = 0,$$

což neplatí pro žádná $[x,y] \in \mathbb{R}^2$, neboť výraz vlevo je záporný pro každá $[x,y] \in \mathbb{R}^2$.

Globální extrémy f na M se tedy mohou nabývat pouze v bodech

$$A = [0,0],\ B_\pm = \left[0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right],\ C_\pm = [\pm 1, 0],\ D_\pm = [0, \pm 1],\ E_\pm = [\pm 2, 0].$$

Jest

$$f(A) = 0,\ f(B_\pm) = \frac{9}{2e},\ f(C_\pm) = \frac{1}{e},\ f(D_\pm) = 9e^{-2},\ f(E_\pm) = 4e^{-4}.$$

Protože $f \geq 0$ na $\mathbb{R}^2$, je zřejmé $A = [0,0]$ bodem globálního minima f na M a platí $\min\limits_M f = 0$.

Protože

$$\frac{4}{e^4} < \frac{1}{e} < \frac{9}{e^2} < \frac{9}{2e},$$

jsou $B_\pm = \left[0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ body globálních maxim f na M a platí $\max\limits_M f = \frac{9}{2e}$.

HODNOCENÍ

zdůvodnění existence extrémů	2
kandidáti na extrém na Int M	2
kandidáti na extrém na ∂M	5
závěr	1

$\boxed{A5}$ Uvažujte metrický prostor

$$(P,\varrho) = (C([0,1]), \varrho_{int})$$

a množinu

$$A = \{f \in P : \forall x \in [0,1] : |f(x)| \leq 1\}.$$

(a) Je A omezená v (P,ϱ)?

(b) Je A křivkově souvislá v (P,ϱ)?

Řešení. Víme, že P je NLP s normou $\|f\| = \int_0^1 |f(x)|\,dx$.

(a) ANO

Pro každou $f \in A$ platí

$$\|f\| \leq \int_0^1 |f(x)|\,dx \leq \int_0^1 1\,dx = 1,$$

a tedy $\operatorname{diam} A \leq 2$. Tudíž je A omezená v P.

(b) ANO

Pro $f, g \in A$ a $\lambda \in [0,1]$ je $(1-\lambda)f + \lambda g \in C([0,1])$ a

$$\int_0^1 |(1-\lambda)f(x) + \lambda g(x)|\,dx \leq$$

$$\leq (1-\lambda)\int_0^1 |f(x)|\,dx + \lambda \int_0^1 |g(x)|\,dx$$

$$\leq (1-\lambda)\cdot 1 + \lambda \cdot 1 = 1,$$

tedy $(1-\lambda)f + \lambda g \in A$. Tudíž A je konvexní množina v NLP, a tedy je křivkově souvislá.

Hodnocení (a) 4

(b) 6