Skript k přednášce Teorie míry a integrálu - nmma203

Petr Kaplický

Obsah

1 Přednáška

Poslední změna: 12.02.2020 15:26:52

Přednáška a skript vznikají hlavně s využitím skriptu prof. Rataje k této přednášce, [Rataj, 2017].

Některé části jsem nestihl zcela odpřednést, ale je dobré je v celém textu pro úplnost mít. Jsou uvedeny šedě jako tento odstavec.

1 Úvod, motivace, nástin, opakování

Podle [Tao, 2011, Část 1.1].

- Archimedes: Výpočet objemu pomocí vepisování a opisování množin se známým objemem — atomů. Funguje pro jednoduché množiny. Pro obecné množiny není jasné, jak definovat jejich míru, jaké atomy použít.
- Typická množina se skládá z nekonečně mnoha bodů. Kolik by měla být míra bodu?
- Dvě množiny se stejným počtem bodů evidentně nemají mít stejný objem. Například, funkce $f(s) = 2s$ zobrazuje interval $(0, 1)$ prostě na interval $(0, 2)$, tedy oba intervaly mají stejný počet bodů. Přitom bychom chtěli, aby objem intervalu $(0, 1)$ byl 1 a objem intervalu $(0, 2)$ byl 2. Můžeme namítat, že problém je v tom, obě množiny jsou nespočetné.

  Opakování 1.1. *Zopakujte si definici spočetných a nespočetných množin, např. podle [Pick et al., 2019, Sekce 1.6]. Ujasněte si, že $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$ jsou spočetné a $(0, 1)$, $(0, 2)$, $\mathbb{R}$ nespočetné, viz [Pick et al., 2019, Poznámka 1.6.23].*

- Ve skutečnosti je problém nejen v počtu částí, na které dělíme množiny. Platí totiž *Banach-Tarského paradox.*

  Věta 1.2 (Banachův-Tarkého paradox)**.** *Jednotková koule v $\mathbb{R}^3$ může být rozložena na konečný počet částí, které mohou (po posunutí a otočení) být složeny do dvou disjunktních kopií této jednotkové koule.*

  Více o tomto paradoxu je možné nalézt v bakalářských pracích `https://is.cuni.cz/webapps/zzp/detail/62875/` a `https://is.cuni.cz/webapps/zzp/detail/85604/`.

Není tedy možné definovat míru, které by nezávisela na posunutí a otočení a byla aditivní pro *všechny* podmnožiny $\mathbb{R}$. Množiny, pro které budeme definovat míru nazveme *měřitelné* množiny.

Musíme vyřešit následující problémy:

- Co jsou to měřitelné množiny?
- Jak pro ně definovat míru?
- Jaké pěkné vlastnosti míra má?
- Jsou pěkné množiny (koule, kvádr, otevřené množiny) měřitelné?
- Je jejich míra přirozená?

Popíšeme dva základní přístupy

- Jordanův-Peanův objem a Riemannův integrál
- Míra a (abstraktní) Lebesgueův integrál

1.1 Jordanův Peanův objem

Zavádí se podobně jako Riemannův integrál pomocí vnitřních a vnějších aproximací figurami — konečnými disjunktními sjednoceními intervalů. Zavádí se horní a dolní Jordanův Peanův objem. Pokud se rovnají prohlásíme množinu za J.P. měřitelnou a společnou hodnotu horního a dolního objemu za její Jordanův Peanův objem. Tento koncept má podstatné nevýhody

- Každá J.P. množina je omezená.
- Mnoho množin není J.P. měřitelných. Například $(0,1)^2 \setminus \mathbb{Q}^2$.

Více o Jordanově Peanově objemu je možné nalézt v [Tao, 2011, Část 1.1].

1.2 Míra a (abstraktní) Lebesgueův integrál

Zbytek přednášky se bude podrobně věnovat tomuto přístupu. Začneme s abstraktním pojmem míry, měřitelné funkce a poté zavedeme abstraktní Lebesgueův integrál. Pro míru a integrál dokážeme některá obecná tvrzení. Nakonec opravdu zkonstruujeme (konkrétní) Lebesgueovu míru.

2 Míra, prostor s mírou

Zkopírováno ze skriptu prof. J. Rataje s drobnými úpravami.

Buď X libovolná neprázdná množina. Symbolem $\mathcal{P}(X) = \{A : A \subset X\}$ značíme potenční množinu množiny X.

Definice 2.1. $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ je *σ-algebra* na X, jestliže

(i) $\emptyset, X \in \mathcal{A}$;

(ii) $A \in \mathcal{A} \implies X \setminus A \in \mathcal{A}$;

(iii) $A_i \in \mathcal{A}$, $i \in \mathbb{N} \implies \bigcup_i A_i \in \mathcal{A}$.

$\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ je *algebra*, splňuje-li (1), (2) a

(iii') $A, B \in \mathcal{A} \implies A \cup B \in \mathcal{A}$.

Poznámka 2.2. *Algebra je uzavřená na konečné množinové operace (průnik, sjednocení, rozdíl), σ-algebra na spočetné množinové operace.*

Příklady:

- $\{\emptyset, X\}$, $\mathcal{P}(X)$ jsou σ-algebry na X.
- $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{1\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$ je σ-algebra na $X = \{1,2,3\}$.
- $\mathcal{A} = \{A \subset \mathbb{N} : A \text{ konečná nebo } \mathbb{N} \setminus A \text{ konečná}\}$ je algebra na $\mathbb{N}$, ale není to σ-algebra.

Věta 2.3. *Buďte $\mathcal{A}_\alpha : \alpha \in I$ σ-algebry na množině X, přitom I je libovolná indexová množina. Pak $\bigcap_{\alpha \in I} \mathcal{A}_\alpha$ je σ-algebra na X.*

Důkaz: Plyne jednoduše z definice. □

Důsledek 2.4. *Pro libovolný množinový systém $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ existuje nejmenší σ-algebra $\sigma\mathcal{S}$ obsahující $\mathcal{S}$.*

Důkaz: Položme

$$\sigma\mathcal{S} := \bigcap \{\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X) : \mathcal{S} \subset \mathcal{A}, \mathcal{A} \text{ je } \sigma\text{-algebra}\}.$$

□

Definice 2.5. *Buď (X, ρ) metrický prostor a $\mathcal{G}$ systém všech otevřených podmnožin X. Pak $\mathcal{B}(X) := \sigma\mathcal{G}$ nazýváme borelovskou σ-algebrou na X.*

Příklad: Následující množinové systémy spadají do borelovské σ-algebry:

- $\mathcal{F}$ - systém uzavřených množin
- $\mathcal{G}_\delta$ - spočetné průniky otevřených množin
- $\mathcal{F}_\sigma$ - spočetná sjednocení uzavřených množin
- $\mathcal{G}_{\delta\sigma}$ - spočetná sjednocení množin z $\mathcal{G}_\delta$
- ...

Pozn.: Je obtížné popsat třídu borelovských množin konstruktivně (je třeba transfinitní indukce). Více se dovíte v přednášce Reálné funkce 2 - NMMA404.

Pozn.: [Rana, 2002, Sekce 4.5] Ne všechny množiny jsou borelovské. Platí dokonce

$$\operatorname{card} \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \operatorname{card} (\mathbb{R}) =: \mathfrak{c} < 2^{\mathfrak{c}} := \operatorname{card} \mathcal{P}(\mathbb{R}),$$

kde $\mathfrak{c}$ značí mohutnost množiny reálných čísel. Tedy neborelovských podmnožin $\mathbb{R}$ je více než borelovských. Například alespoň jedna z množin z rozkladu ve Větě 1.2 není borelovská.

.... konec přednášky 1, 2.10.

Definice 2.6. *Je-li $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ a $\mathcal{A} = \sigma\mathcal{S}$, říkáme, že $\mathcal{S}$ generuje σ-algebru $\mathcal{A}$. Množinu $\mathcal{S}$ nazýváme generátorem σ-algebry $\mathcal{A}$.*

Věta 2.7. *Borelovská σ-algebra $\mathcal{B}^n := \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ je generovaná*

1. *otevřenými kvádry s racionálními krajními body (tj. množinami $(a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n)$, $-\infty < a_i < b_i < \infty$, $a_i, b_i \in \mathbb{Q}$, $i = 1, \ldots, n$;*
2. *systémem $\mathcal{S} = \{(-\infty, a_1) \times \ldots \times (-\infty, a_n) : a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Q}\}$.*

Speciálně, $\mathcal{B}^1 = \sigma\{(-\infty, a) : a \in \mathbb{Q}\}$.

Důkaz: 1. Plyne přímo z faktu, že každou otevřenou množinu $G \subset \mathbb{R}^n$ lze vyjádřit jako spočetné sjednocení otevřených kvádrů s racionálními krajními body. Skutečně, označíme-li symbolem $\mathcal{Q}$ systém všech otevřených kvádrů v $\mathbb{R}^n$ s racionálními krajními body, pak lze psát

$$G = \bigcup \{I \in \mathcal{Q} : I \subset G\}.$$

K ověření vlastnosti 2. stačí ukázat, že každý otevřený kvádr s racionálními krajními body leží v $\sigma\mathcal{S}$. Ověříme tuto vlastnost v $\mathbb{R}^2$ (případ obecné dimenze je zcela analogický). Pro otevřený kvádr $I = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2)$ můžeme psát

$$I = ((-\infty, b_1) \times (-\infty, b_2)) \setminus ((-\infty, a_1] \times (-\infty, b_2) \cup (-\infty, b_1) \times (-\infty, a_2]),$$

přitom

$$(-\infty, a_1] \times (-\infty, b_2) = \bigcap_{k=1}^{\infty} (-\infty, a_1 + k^{-1}) \times (-\infty, b_2) \in \sigma\mathcal{S},$$

a analogicky pro $(-\infty, b_1) \times (-\infty, a_2]$. □

Pozn.: Jako generátor $\mathcal{B}^n$ lze vzít rovněž uzavřené či polouzavřené kvádry.

Definice 2.8. *Budeme značit* $\mathbb{R}^* := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$, $\mathcal{B}^* := \sigma(\mathcal{B}^1 \cup \{\{-\infty\}, \{\infty\}\})$.

Poznámka 2.9. *Na* $\mathbb{R}^*$ *zavádíme standardní algebraické operace* $\pm$ *a* $/$. *Součin má smysl vždy. V případě* $\pm\infty \cdot 0$ *definujeme výsledek jako* 0.

Dovolujeme, aby posloupnosti a řady měly i nekonečné členy. Pro $a, a_i \in \mathbb{R}^*$, $i \in \mathbb{N}$ *řekneme, že* $\lim_{i \to \infty} a_i = a$, *pokud pro každé* $\epsilon > 0$ *platí, že* $a_i \notin U(a, \epsilon)$ *pouze pro konečně mnoho* $i \in \mathbb{N}$. *Otevřená okolí nekonečen definujeme pro* $\epsilon > 0$ *jako* $U(+\infty, \epsilon) = (1/\epsilon, +\infty]$ *a* $U(-\infty, \epsilon) := [-\infty, -1/\epsilon)$. *Součet řad s nekonečnými členy je definován jako limita částečných součtů (jsou-li definovány).*

Cvičení. *Rozmyslete si, že na* $\mathbb{R}^*$ *je možné definovat metriku* ρ *předpisem* $\rho(a, b) = |\operatorname{arctg}^*(a) - \operatorname{arctg}^*(b)|$ *pro* $a, b \in \mathbb{R}^*$, *kde funkce* $\operatorname{arctg}^* : \mathbb{R}^* \to [-\pi/2, \pi/2]$ *je funkce* arctg *dodefinovaná v* $\pm\infty$ *svými limitami. Tato metrika dává konvergenci posloupností popsanou nahoře pomocí okolí.*

Cvičení 2.10. $\mathcal{B}^*$ *je borelovská* σ*-algebra na* $(\mathbb{R}^*, \rho)$. *Je generována například intervaly* $[-\infty, a)$ *s* $a \in \mathbb{R}$.

Definice 2.11. $(X, \mathcal{A})$ je *měřitelný prostor*, jestliže X je neprázdná množina a $\mathcal{A}$ je σ-algebra na X.
μ je *míra* na $(X, \mathcal{A})$, jestliže $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ splňuje

(a) $\mu(\emptyset) = 0$,

(b) (σ-aditivita) Jsou-li $A_i \in \mathcal{A}$ po dvou disjunktní, platí

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mu(A_i).$$

Trojici $(X, \mathcal{A}, \mu)$ nazýváme *prostor s mírou*. Prvky $\mathcal{A}$ nazýváme μ-měřitelné množiny.

Poznámka. *Místo (a) by stačilo předpokládat, že* μ *není identicky rovna* $+\infty$. *(a) potom plyne z (b).*

Příklady: Buď X neprázdná množina. Následující množinové funkce μ jsou míry na $(X, \mathcal{P}(X))$. Trojice $(X, \mathcal{P}(X), \mu)$ tvoří prostor s mírou.

- $\mu(A) = 0 \ \forall A \in \mathcal{P}(X)$ - nulová míra ($\mu = 0$)

- pro $x \in X$ pevný položme
$$\delta_x(A) = \begin{cases} 0 & x \notin A, \\ 1 & x \in A. \end{cases}.$$
δ_x se nazývá *Diracova míra* v bodě x.

- Míra
$$\mu(A) = \begin{cases} \operatorname{card}(A) & A \subset X \text{ konečná}, \\ \infty & A \subset X \text{ nekonečná}. \end{cases}$$
se nazývá *aritmetická míra* na X.

Lemma 2.12 (Základní vlastnosti míry)**.** *Buď $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou. Pak platí:*

1. $(A, B \in \mathcal{A}, A \cap B = \emptyset) \implies \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$
2. $(A, B \in \mathcal{A}, A \subset B) \implies \mu(A) \leq \mu(B)$

Věta 2.13 (Spojitost míry)**.** *Buď $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou, $A_i \in \mathcal{A}$, $i \in \mathbb{N}$.*

1. $A_1 \subset A_2 \subset \cdots \implies \mu(A_i) \nearrow \mu(\bigcup_i A_i)$,
2. $\mu(A_1) < \infty$, $A_1 \supset A_2 \supset \cdots \implies \mu(A_i) \searrow \mu(\bigcap_i A_i)$.

Poznámka. *Je-li $\{a_i\} \subset \mathbb{R}$ posloupnost, $a_i \to a \in \mathbb{R}$ pro $i \to +\infty$ a $a_i \geq a_{i+1}$ pro $i \in \mathbb{N}$, píšeme $a_i \searrow a$. Podobně definujeme také $a_i \nearrow a$.*

Důkaz: 1. Nechť $A_i \in \mathcal{A}$, $A_i \nearrow A$. Pak $A = A_1 \cup (A_2 \setminus A_1) \cup (A_3 \setminus A_2) \cup \ldots$ je disjunktní rozklad na měřitelné množiny, tedy $\mu(A) = \mu(A_1) + \sum_{j=2}^{\infty} \mu(A_j \setminus A_{j-1})$. Zároveň $\mu(A_i) = \mu(A_1) + \sum_{j=2}^{i} \mu(A_j \setminus A_{j-1})$, takže $\mu(A_i) \nearrow \mu(A)$, $i \to \infty$.

2. Nechť $A_i \in \mathcal{A}$, $A_i \searrow A$, $\mu(A_1) < \infty$. Položme $B_i := A_1 \setminus A_i$, $i \in \mathbb{N}$. Zřejmě platí $B_i \nearrow B := A_1 \setminus A$, tedy $\mu(A_1) - \mu(A_i) = \mu(B_i) \nearrow \mu(B) = \mu(A_1) - \mu(A)$, a odečtením výrazu $\mu(A_1) < \infty$ dostaneme $\mu(A_i) \searrow \mu(A)$. □

Poznámka 2.14. *Předpoklad konečnosti míry množiny je nutný. Uvažujme aritmetickou míru na $\mathbb{N}$ a množiny $A_k := \{k, k+1, \ldots\}$ pro $k \in \mathbb{N}$. Pak $\lim_{k \to +\infty} \mu(A_k) = +\infty \neq \mu(\emptyset) = 0$.*

.... konec přednášky 2, 3.10.

Definice 2.15. *Buď $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou. Řekneme, že $N \subset X$ je nulová množina, jestliže existuje $A \in \mathcal{A}$ taková, že $\mu(A) = 0$ a $N \subset A$.*

Symbolem $\mathcal{N}$ značíme systém všech nulových množin.

Řekneme, že prostor s mírou $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je úplný, pokud $\mathcal{N} \subset \mathcal{A}$.

Příklad. *Existují prostory s mírou, které nejsou úplné.*

Volme $X = \{1, 2, 3\}$, $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{1\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$ a δ_1. Zjevně množina $\{2\}$ není měřitelná, ale je nulová.

Definice 2.16. *Buď $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou. Značíme*
$$\mathcal{A}_0 := \sigma(\mathcal{A} \cup \mathcal{N})$$
zúplněnou σ-algebru $\mathcal{A}$ vzhledem k míře μ.

Lemma. *Je dán prostor s mírou $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Ať pro $j \in \mathbb{N}$ platí $A_j \in \mathcal{A}$. Pak platí:*

1. *Pro $j \in \mathbb{N}$ existují množiny $B_j \in \mathcal{A}$ takové, že $B_j \subset A_j$, B_j jsou po dvou disjunktní pro $j \in \mathbb{N}$, $\bigcup_{j=1}^{J} A_j = \bigcup_{j=1}^{J} B_j$ pro $J \in \mathbb{N}$ a $\bigcup_{j=1}^{+\infty} A_j = \bigcup_{j=1}^{+\infty} B_j$.*
2. *(σ-subaditivita míry)*
$$\mu(\bigcup_{j=1}^{+\infty} A_j) \leq \sum_{j=1}^{+\infty} \mu(A_j).$$

Důkaz. 1. Stačí volit $B_j = A_j \setminus \bigcup_{k=1}^{j-1} A_k$.

2. Počítáme
$$\mu(\bigcup_{j=1}^{+\infty} A_j) = \mu(\bigcup_{j=1}^{+\infty} B_j) = \sum_{j=1}^{+\infty} \mu(B_j) \leq \sum_{j=1}^{+\infty} \mu(A_j).$$
Druhá rovnost v předchozím výpočtu platí ze σ-aditivity míry. Nerovnost plyne z monotonie míry a bodu 1.

□

Věta 2.17 (Zúplnění míry)**.** *Je dán prostor s mírou $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Pak platí:*

1. *$\mathcal{A}_0 = \{E \subset X : \exists A, B \in \mathcal{A}, A \subset E \subset B, \mu(B \setminus A) = 0\}$*
2. *Míru μ lze jednoznačně rozšířit na prostor $(X, \mathcal{A}_0)$ (značíme μ_0).*
3. *$(X, \mathcal{A}_0, \mu_0)$ je úplný prostor s mírou.*

Důkaz. 1. Označme $\overline{\mathcal{A}}_0 := \{E \subset X : \exists A, B \in \mathcal{A}, A \subset E \subset B, \mu(B \setminus A) = 0\}$. Ukážeme nejprve, že $\overline{\mathcal{A}}_0$ je σ-algebra.

Zřejmě platí $\emptyset, X \in \overline{\mathcal{A}}_0$. Je-li $E \in \overline{\mathcal{A}}_0$, pak existují $A, B \in \mathcal{A}$ takové, že $A \subset E \subset B, \mu(B \setminus A) = 0$. Pak platí $X \setminus B \subset X \setminus E \subset X \setminus A$ a $\mu((X \setminus A) \setminus (X \setminus B)) = \mu(B \setminus A) = 0$. Jsou-li $E_j \in \overline{\mathcal{A}}_0$ pro $j \in \mathbb{N}$, existují $A_j, B_j \in \mathcal{A}$, pro které platí $A_j \subset E_j \subset B_j, \mu(B_j \setminus A_j) = 0$. Pak $\bigcup_{j=1}^{+\infty} A_j \subset \bigcup_{j=1}^{+\infty} E_j \subset \bigcup_{j=1}^{+\infty} B_j$ a $\mu(\bigcup_{j=1}^{+\infty} B_j \setminus \bigcup_{j=1}^{+\infty} A_j) \leq \mu(\bigcup_{j=1}^{+\infty} (B_j \setminus A_j)) = 0$.

Ze zřejmé inkluze $\mathcal{A} \cup \mathcal{N} \subset \overline{\mathcal{A}}_0$ plyne $\mathcal{A}_0 = \sigma(\mathcal{A} \cup \mathcal{N}) \subset \sigma\overline{\mathcal{A}}_0 = \overline{\mathcal{A}}_0$. Opačná inkluze je snadná: je-li $E \in \overline{\mathcal{A}}_0$ a $A, B \in \mathcal{A}$ množiny z definice $\overline{\mathcal{A}}_0$, pak $E = (E \setminus A) \cup A \in \mathcal{A}_0$, protože $A \in \mathcal{A}$ a $E \setminus A \in \mathcal{N}$.

2. Je-li $E \in \mathcal{A}_0$ a $A, B \in \mathcal{A}$ taková, že $A \subset E \subset B$ a $\mu(B \setminus A) = 0$, položíme $\mu_0(E) := \mu(A)$.

Nejprve musíme ukázat, že toto rozšíření je korektní, tedy že nezávisí na volbě A. Je-li $A', B' \in \mathcal{A}$ jiná množina s vlastností $A' \subset E \subset B'$ a $\mu(B' \setminus A') = 0$, pak z inkluze $A \subset E \subset A' \cup (B' \setminus A')$ plyne $\mu(A) \leq \mu(A') + \mu(B' \setminus A') = \mu(A')$. Protože role A a A' jsou symetrické dostáváme $\mu(A) = \mu(A')$.

Ukážeme, že μ_0 je míra na $\mathcal{A}_0$. Zřejmě platí $\mu_0(\emptyset) = 0$. Buď (E_i) posloupnost po dvou disjunktních množin z $\mathcal{A}_0$. Existují tedy množiny $A_i, B_i \in \mathcal{A}$ s vlastností $A_i \subset E_i \subset B_i$, $\mu(B_i \setminus A_i) = 0$ pro $i \in \mathbb{N}$. Pak $\mu_0(\bigcup_{j=1}^{+\infty} E_j) = \mu(\bigcup_{j=1}^{+\infty} A_j) = \sum_{j=1}^{+\infty} \mu(A_j) = \sum_{j=1}^{+\infty}(E_j)$. Využili jsme výpočet z 1. části, fakt, že A_j jsou po dvou disjunktní a σ aditivitu μ.

Míra μ_0 rozšiřuje μ z $\mathcal{A}$ na $\mathcal{A}_0$. Toto rozšíření je jediné možné, protože z $A \subset E \subset B$ a $\mu(B \setminus A) = 0$ plyne $\mu_0(A) \leq \mu_0(E) \leq \mu_0(A) + \mu_0(B \setminus A) = \mu_0(A)$.

3. Buď $M \subset X$ nulová v $(X, \mathcal{A}_0, \mu_0)$. Pak existuje $N \in \mathcal{A}_0$ s $\mu_0(N) = 0$, a tedy také $A, B \in \mathcal{A}$ s $A \subset N \subset B$, $\mu(A) = \mu(B \setminus A) = 0$. Tedy $\emptyset \subset M \subset N \subset B$ a $\mu(B \setminus \emptyset) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) = 0$. Platí tedy $M \in \mathcal{A}_0$ a $\mu_0(M) = 0$. □

Definice 2.18. *Buď $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou.*

1. *Míra μ je borelovská, je-li X metrický prostor a $\mathcal{A} = \mathcal{B}(X)$.*
2. *Míra μ je konečná, jestliže $\mu(X) < \infty$.*
3. *Míra μ je pravděpodobnostní, jestliže $\mu(X) = 1$.*
4. *Míra μ je σ-konečná, jestliže existují $E_n \in \mathcal{A}$ takové, že $X = \bigcup_n E_n$ a $\mu(E_n) < \infty$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.*
5. *Řekneme, že výrok $V(x)$ platí pro μ-skoro všechna $x \in X$, pokud existuje $N \in \mathcal{A}$ taková, že $\mu(N) = 0$ a pro všechna $x \in X \setminus N$ výrok $V(x)$ platí.*

Příklad. *Uvažme $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \delta_0)$. Jedná se o měřitelný prostor s borelovskou konečnou mírou. Tato míra není na tomto prostoru úplná, ale je pravděpodobnostní.*

Najděte její zúplnění!

Věta 2.19. *Existuje právě jedna borelovská míra $\lambda^n_{\mathcal{B}}$ na $\mathbb{R}^n$ taková, že pro všechna $-\infty < a_i < b_i < \infty$, $i = 1, \dots, n$, platí*

$$\lambda^n_{\mathcal{B}}([a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]) = (b_1 - a_1) \cdot \ldots \cdot (b_n - a_n).$$

[Důkaz bude později]

Definice 2.20 (Lebegueova míra)**.** *Zúplnění míry $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \lambda^n_{\mathcal{B}})$ nazveme Lebesgueova míra a označíme $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^n), \lambda^n)$.* $\blacksquare$

Poznámka 2.21.

1. *Lebesgueova míra je σ-konečná.*
2. *Množinu $\mathcal{B}_0(\mathbb{R}^n)$ nazýváme σ algebra Lebesgueovsky měřitelných množin. Platí $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subsetneq \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^n) \subsetneq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$.*

.... konec přednášky 3, 9.10.

3 Měřitelné funkce

Věta 3.1. *Uvažujme zobrazení $f : X \to Y$.*

(i) *Je-li $\mathcal{B}$ σ-algebra na Y, pak $f^{-1}\mathcal{B} := \{f^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}\}$ je σ-algebra na X.*

(ii) *Pro libovolný množinový systém $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(Y)$ platí $\sigma(f^{-1}\mathcal{S}) = f^{-1}(\sigma\mathcal{S})$.*

Cvičení. *Za situace ve větě dokažte, že platí $X \setminus f^{-1}(B) = f^{-1}(Y \setminus B)$ a $\bigcup_i f^{-1}(B_i) = f^{-1}(\bigcup_i B_i)$, kdykoliv $B, B_1, B_2, \dots \subset Y$.*

Důkaz Věty 3.1. (i) se snadno dokáže s využitím faktu, že vzor množiny komutuje s množinovými operacemi, viz cvičení nahoře.

(ii) Zřejmě σ-algebra $f^{-1}(\sigma\mathcal{S})$ obsahuje $f^{-1}\mathcal{S}$, a tedy $\sigma(f^{-1}\mathcal{S}) \subset \sigma(f^{-1}(\sigma\mathcal{S})) = f^{-1}(\sigma\mathcal{S})$.

Pro důkaz opačné inkluze označme množinový systém

$$\mathcal{A} := \{B \subset Y : f^{-1}(B) \in \sigma(f^{-1}\mathcal{S})\}$$

.

- Je snadné ověřit, že $\mathcal{A}$ je σ-algebra.
- Zřejmě $\mathcal{S} \subset \mathcal{A}$, a tedy také $\sigma\mathcal{S} \subset \mathcal{A}$.
- Platí $f^{-1}(\sigma\mathcal{S}) \subset f^{-1}\mathcal{A} \subset \sigma(f^{-1}\mathcal{S})$, kde poslední inkluze plyne přímo z definice systému $\mathcal{A}$.

□

Definice 3.2. *Buďte $(X, \mathcal{A})$ a $(Y, \mathcal{B})$ měřitelné prostory. Zobrazení $f : X \to Y$ je měřitelné (vzhledem k $\mathcal{A}, \mathcal{B}$), jestliže $f^{-1}\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$. Píšeme pak $f : (X, \mathcal{A}) \to (Y, \mathcal{B})$.*

Je-li některý z prostorů X, Y metrickým prostorem a není explicitně uvedeno něco jiného, pak za příslušnou σ-algebru bereme borelovskou σ-algebru. Měřitelné zobrazení mezi dvěma metrickými prostory nazýváme borelovsky měřitelné nebo stručně borelovské.

Je-li některý z prostorů X, Y roven $\mathbb{R}$ případně $\mathbb{R}^*$ a není explicitně uvedeno něco jiného, pak za příslušnou σ-algebru bereme σ-algebru $\mathcal{B}$ případně $\mathcal{B}^*$.

Pozn.: Složení dvou měřitelných zobrazení je zřejmě měřitelné.

Věta 3.3. *Jsou-li $(X, \mathcal{A})$ a $(Y, \mathcal{B})$ měřitelné prostory a $\mathcal{S} \subset \mathcal{B}$ libovolný generátor σ-algebry $\mathcal{B}$, pak $f : X \to Y$ je měřitelné právě tehdy, když $f^{-1}\mathcal{S} \subset \mathcal{A}$.*

Důkaz. Implikace " $\Longrightarrow$ " je jasná. Opačná implikace plyne hned z Věty 3.1, protože

$$f^{-1}(\mathcal{B}) = f^{-1}(\sigma\mathcal{S}) = \sigma(f^{-1}\mathcal{S}) \subset \mathcal{A}.$$

□

Důsledek 3.4. 1. *Je-li $(X, \mathcal{A})$ měřitelný prostor, $n \in \mathbb{N}$, pak $f : X \to \mathbb{R}^n$ je měřitelné právě tehdy, když je splněna jedna z následujících podmínek:*

   (a) pro každé $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Q}$ platí $f^{-1}((-\infty, a_1) \times \cdots \times (-\infty, a_n)) \subset \mathcal{A}$

   (b) pro každé $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{Q}$ platí $f^{-1}((a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n)) \subset \mathcal{A}$

   (Plyne z Vět 3.3 a 2.7.)

2. *Je-li $(X, \mathcal{A})$ měřitelný prostor, pak $f : X \to \mathbb{R}^*$ je měřitelná právě tehdy, když pro každé $a \in \mathbb{Q}$ platí $f^{-1}([-\infty, a)) \subset \mathcal{A}$. (Plyne z Vět 3.3 a 2.7.)*

3. *Je-li $(X, \mathcal{A})$ měřitelný prostor a Y metrický prostor, pak zobrazení $f : X \to Y$ je měřitelné právě tehdy, když $f^{-1}(G) \in \mathcal{A}$ pro každou otevřenou množinu $G \subset Y$. (Plyne z Věty 3.3 a Definice 2.5.)*

Cvičení. *Ukažte, že v Důsledku 3.4, část 1 a 2 je možné také brát uzavřené rohy a intervaly, případně rohy a intervaly otočené na druhou stranu.*

Věta 3.5. *Každé spojité zobrazení mezi dvěma metrickými prostory je borelovsky měřitelné.*

Důkaz. Plyne z Důsledku 3.4 a z faktu, že f je spojité právě tehdy, když vzory otevřených množin jsou otevřené. □

Věta 3.6. 1. *Jsou-li $f : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}^n$ a $g : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}^m$ měřitelná zobrazení, pak i $(f, g) : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}^{n+m}$ je měřitelné.*

2. *Jsou-li $f, g : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}^n$ měřitelná, jsou i $f + g$ a $f - g$ měřitelná.*

3. *Jsou-li $f, g : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}$ měřitelné funkce, je i $f \cdot g$ měřitelná.*

Důkaz: 1. Každý otevřený kvádr $I \subset \mathbb{R}^{n+m}$ je tvaru $I = U \times V$, kde $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ jsou otevřené kvádry. Pak platí

$$(f,g)^{-1}(U \times V) = f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V) \in \mathcal{A},$$

a tedy (f,g) je měřitelné podle Věty 2.7.

2. Měřitelnost $f+g$ plyne z toho, že součet funkcí můžeme psát jako složení

$$f + g = + \circ (f,g),$$

kde $+ : (x,y) \mapsto x+y$ je operace sčítání v $\mathbb{R}^n$ a $(f,g)(x) = (f(x), g(x))$ je spojení zobrazení z prvního tvrzení. Měřitelnost složení pak plyne z měřitelnosti obou komponent. Měřitelnost zbývajících zobrazení (funkcí) se ukáže analogicky. $\square$

Definice 3.7. *Jsou-li $f,g : (X,\mathcal{A}) \to \mathbb{R}$ funkce, označíme $\{f \le g\} = \{x \in X; f(x) \le g(x)\}$. Symboly $\{f < g\}$, $\{f = g\}$,$\{f \ne g\}$, $\{f \ge g\}$, $\{f > g\}$ definujeme obdobně.*

Důsledek 3.8. *Jsou-li $f,g : (X,\mathcal{A}) \to \mathbb{R}$ měřitelné funkce, pak leží množiny $\{f \le g\}$, $\{f < g\}$, $\{f = g\}$, $\{f \ne g\}$, $\{f \ge g\}$, $\{f > g\}$ v σ-algebře $\mathcal{A}$.*

Poznámka 3.9. *Předchozí tvrzení pro reálné měřitelné funkce platí i pro měřitelné funkce z $(X,\mathcal{A})$ do $(\mathbb{R}^*, \mathcal{B}^*)$.*

Důkaz. Intervaly $[-\infty, a)$, $[-\infty, a]$, $(a, +\infty]$, $[a, +\infty]$ patří do $\mathcal{B}^*$. Platí

$$\{f < g\} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \{f < q\} \cap \{g > q\}$$

a všechny množiny na pravé straně jsou měřitelné. Platí $\{f \ge g\} = X \setminus \{f < g\}$, a tedy je také měřitelná. Dále $\{f = g\} = \{f \le g\} \cap \{f \ge g\}$ a $\{f \ne g\} = \{f < g\} \cup \{f > g\}$. $\square$

Definice 3.10. *Pro funkci $f : X \to \mathbb{R}^*$ definujeme funkce*

- *kladná část f — $f^+ = \max(f, 0)$*
- *záporná část f — $f^- = \max(-f, 0)$*

Poznámka. *Pro funkci $f : X \to \mathbb{R}^*$ platí $|f| = f^+ + f^-$, $f = f^+ - f^-$.*

Věta 3.11. *Buďte $f, g, f_n : (X,\mathcal{A}) \to \mathbb{R}^*$ měřitelné, $n \in \mathbb{N}$. Pak jsou funkce $\max\{f,g\}$ a $\min\{f,g\}$, f^+, f^-, $|f|$, $\sup_n f_n$, $\inf_n f_n$, $\limsup_{n\to\infty} f_n$ a $\liminf_{n\to\infty} f_n$ rovněž měřitelné.*

.... konec přednášky 4, 10.10.

Důkaz: Platí $\{\max(f,g) < a\} = \{f < a\} \cap \{g < a\}$ a pravá strana je měřitelná množina. Tedy $\max(f,g)$ je měřitelná podle Důsledku 3.4.

Označme $g := \sup_n f_n$. Pak pro libovolné $b \in \mathbb{R}^*$ platí

$$g^{-1}([-\infty, b]) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{f_n \le b\} \in \mathcal{A},$$

tedy g je měřitelná podle Věty 3.3, neboť intervaly $[-\infty, b]$: $b \in \mathbb{R}^*$ generují $\mathcal{B}^*$. Měřitelnost infima funkcí se ukáže podobně. Dále

$$\limsup_{n\to\infty} f_n = \inf\{\sup\{f_j(x); j \ge n\}; n \in \mathbb{N}\}.$$

Pravá strana je měřitelná podle předešlého. Případ liminf je analogický. $\square$

Pozn.: Z předchozí věty plyne, že bodová limita měřitelných funkcí je měřitelná, pokud existuje.

Definice 3.12. *Funkce $s : X \to [0, \infty)$ je jednoduchá, jestliže $s(X)$ je konečná množina. Platí $s = \sum_{\alpha \in s(X)} \alpha \chi_{\{s=\alpha\}}$. Součet vpravo nazveme kanonickým tvarem jednoduché funkce s.*

Buď $\{a_n\} \subset \mathbb{R}^*$, $a \in \mathbb{R}^*$. Symbolem $a_n \nearrow a$ pro $n \to +\infty$ značíme: $a_n \to a$ pro $n \to +\infty$ a posloupnost $\{a_n\}$ je neklesající.

Buď $f, s_n : X \to \mathbb{R}^*$. Řekneme, že s_n konvergují pro $n \to +\infty$ bodově nahoru k f na X , pokud pro všechna $x \in X$ je $s_n(x) \nearrow f(x)$ pro $n \to +\infty$.

Podobně definujeme bodovou konvergenci dolů na X. Značíme $s_n \searrow f$ na X pro $n \to +\infty$.

Věta 3.13. *Je-li $f : (X, \mathcal{A}) \to [0, \infty]$ měřitelná, existují funkce $s_n : (X, \mathcal{A}) \to [0, \infty)$ jednoduché měřitelné takové, že $s_n \nearrow f$ na X pro $n \to +\infty$.*

Důkaz: Položme

$$s_n(x) := \max \left\{ \frac{k}{2^n} : \frac{k}{2^n} \le f(x),\, k = 0, 1, \ldots, n2^n \right\}, \quad x \in X.$$

Není těžké ověřit, že s_n jsou jednoduché měřitelné funkce a že $s_n \nearrow f$ pro $n \to +\infty$. □

Poznámka. *Je-li f v předchozí Větě navíc omezená, konvergují k ní jednoduché funkce s_n dokonce stejnoměrně.*

4 Abstraktní Lebesgueův integrál

V celé kapitole budeme předpokládat, že $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou.

Definice 4.1. *(a) Je-li $s : (X, \mathcal{A}) \to [0, \infty)$ jednoduchá měřitelná, zapíšeme ji v kanonickém tvaru $s = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \chi_{E_j}$ (tj. $\alpha_j \ge 0$ jsou všechny různé hodnoty s a $E_j = \{s = \alpha_j\}$). Pak klademe*

$$I(s) := \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \mu(E_j).$$

(Je-li některé $\alpha_j = 0$, klademe $\alpha_j \mu(E_j) = 0$, tedy používáme konvenci $0 \cdot \infty = 0$.)

(b) Je-li $f : (X, \mathcal{A}) \to [0, \infty]$ měřitelná, klademe

$$\int_X f \, d\mu := \sup \left\{ I(s) : 0 \le s \le f,\ s \text{ jedn. měř.} \right\}.$$

(c) Je-li $f : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}^*$ měřitelná, klademe

$$\int_X f \, d\mu := \int_X f^+ \, d\mu - \int_X f^- \, d\mu,$$

má-li rozdíl smysl.

(d) Je-li $f : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}^*$ měřitelná a $E \in \mathcal{A}$, značíme

$$\int_E f \, d\mu := \int_X f \chi_E \, d\mu$$

.

Poznámka. *Je zřejmé, že definice (b) a (c) dávají stejný výsledek pro funkce $f : X \to [0, +\infty]$.*

Věta 4.2 (Monotonie integrálu)**.** *Pro $f, g : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}^*$ měřitelné s vlastností $0 \le f \le g$ platí $0 \le \int_X f\, d\mu \le \int_X g\, d\mu$.*

Důkaz. Plyne přímo z definice a z monotonie suprema. □

Poznámka. 1. *Je-li f měřitelná taková, že $\int f^+ \, d\mu = \int f^- \, d\mu = \infty$, pak $\int f \, d\mu$ není definován. Říkáme proto, že (abstraktní) Lebesgueův integrál je* absolutně konvergentní *(na rozdíl od Newtonova integrálu).*

2. *Je-li $\int_X |f| \, \mathrm{d}\mu$ konečný, je i $\int_X f \, \mathrm{d}\mu$ konečný. Skutečně, z $\int_X |f| \, \mathrm{d}\mu < +\infty$ plyne $\int_X f^+ \, \mathrm{d}\mu < +\infty$ i $\int_X f^- \, \mathrm{d}\mu < +\infty$. Tedy $\int_X f \, \mathrm{d}\mu$ je konečný.*

3. *Platí také obrácená implikace: Je-li $\int_X f \, \mathrm{d}\mu$ konečný, je i $\int_X |f| \, \mathrm{d}\mu$ konečný. Důkaz necháme jako cvičení až bude známa linearita integrálu.*

Věta 4.3. *Nechť f, g jsou měřitelné funkce na X takové, že $f = g$ s.v. Pak platí*

$$\int f \, d\mu = \int g \, d\mu, \text{ má-li jedna strana smysl.}$$

Důkaz: Předpokládejme nejprve, že f i g jsou nezáporné funkce. Je-li $s \le f$ libovolná měřitelná jednoduchá funkce, pak $s' := s\chi_{\{f=g\}}$ je rovněž jednoduchá měřitelná a splňuje $s' \le g$ a $\int s \, d\mu = \int s' \, d\mu$. Musí tedy být $\int f \, d\mu \le \int g \, d\mu$. Obrácená nerovnost plyne ze symetrie. Bez předpokladu nezápornosti ukážeme rovnost integrálu z kladných a záporných částí (platí totiž zřejmě také $f^+ = g^+$ s.v. a $f^- = g^-$ s.v.). □

Věta 4.4 (Leviho věta/(Lebesgue's) monotone convergence theorem)**.** *Jsou-li $f_n : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}^*$ nezáporné měřitelné funkce a $f_n \nearrow f$, pro $n \to +\infty$ a s.v. v X, platí $\int_X f_n \, \mathrm{d}\mu \nearrow \int_X f \, \mathrm{d}\mu$ pro $n \to +\infty$.*

Poznámka. *Věta 2.13, bod 1. je speciální případ Leviho věty. Za situace z Věty 2.13, bod 1 položíme $f_n = \chi_{A_n}$ a $f = \chi_{\bigcup_{j=1}^{+\infty} A_j}$, pak $f_n \nearrow f$ pro $n \to +\infty$ a $\mu(A_j) = I(f_j) \to I(f) = \mu(\bigcup_{j=1}^{+\infty} A_j)$.*

. . . . konec přednášky 5, 16.10.

Důkaz. Označme $a_n := \int f_n \, d\mu \in [0, \infty]$, $a := \lim_{n\to\infty} a_n$ (posloupnost (a_n) je neklesající podle předchozího tvrzení). Zřejmě platí nerovnost $a \le \int f \, d\mu$. Ukážeme, že také $a \ge \int f \, d\mu$.

Je-li $a = \infty$, nerovnost zřejmě platí. Předpokládejme tedy dále, že $a < \infty$. Ukážeme, že $a \ge \int s \, d\mu$ pro každou jednoduchou měřitelnou funkci $s \le f$. Pak bude i $a \ge \int f \, d\mu$ podle definice integrálu.

Buď tedy $0 \le s \le f$ jednoduchá měřitelná funkce. Označme $\sum_{j=1}^k \alpha_j \chi_{A_j}$ její kanonický tvar.

Zvolme $0 < \tau < 1$ a označme $A_{j,n} := A_j \cap \{f_n > \tau\alpha_j\}$ pro $j \in \{1, \ldots, k\}$, $n \in \mathbb{N}$. Zřejmě $A_{j,n} \in \mathcal{A}$, $A_{j,n} \subset A_{j,n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, a $\bigcup_n A_{j,n} = A_j$. Podle věty o spojitosti míry platí pro každé $j \in \{1, \ldots, k\}$ také $\mu(A_{j,n}) \nearrow \mu(A_j)$ pro $n \to \mathbb{N}$.

Definujeme pomocné jednoduché funkce předpisem $s_n = \sum_{j=1}^k \alpha_j \chi_{A_{j,n}}$. Pak platí $\tau s_n \le f_n$ pro $n \in \mathbb{N}$, $s_n \to s$ a $I(s_n) \to I(s)$ pro $n \to +\infty$.

$$a \ge \tau I(s), \quad \text{protože} \quad a \ge \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu \ge \tau I(s_n) \to \tau I(s) \quad \text{pro } n \to +\infty.$$

V předchozí nerovnosti vezmeme sup přes $\tau \in (0, 1)$ a důkaz je dokončen. □

Věta 4.5. *[Rudin, 1977, Tvrzení 1.25] Nechť $s, t : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}$ jsou jednoduché nezáporné měřitelné funkce, $\tau \ge 0$.*

1. *Pro každé $A \in \mathcal{A}$ definujeme*
$$\nu_s(A) = I(s\chi_A).$$
Potom je ν_s míra na $(X, \mathcal{A})$.

2. *Platí*
$$I(s+t) = I(s) + I(t), \quad I(\tau s) = \tau I(s).$$

Důkaz. 1. Zřejmě je $\nu(\emptyset) = I(0) = 0$. Ověříme σ-aditivitu. Ať $A_\gamma \in \mathcal{A}$, $\gamma \in \mathbb{N}$ jsou po dvou disjunktní, $A := \bigcup_{\gamma=1}^{+\infty} A_\gamma$, $s = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \chi_{E_i}$ je kanonický tvar funkce s. Pak

$$\nu_s(A) = I(s\chi_A) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mu(E_i \cap A) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{\gamma=1}^{+\infty} \alpha_i \mu(E_i \cap A_\gamma)$$
$$= \sum_{\gamma=1}^{+\infty} \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mu(E_i \cap A_\gamma) = \sum_{\gamma=1}^{+\infty} I(s\chi_{A_\gamma}) = \sum_{\gamma=1}^{+\infty} \nu_s(A_\gamma).$$

Rozmyslete si podrobně 2. a 4. rovnost!

2. Necháme s jako výše a navíc označíme $t = \sum_{j=1}^{l} \beta_j \chi_{F_j}$ kanonický tvar funkce t a $A_{ij} = E_i \cap F_j$ pro $i \in \{1, \ldots, k\}$, $j \in \{1, \ldots, l\}$. Jasně jsou F_j i E_i, a tedy i A_{ij} po dvou disjunktní. Navíc

$$\bigcup_{j=1}^{l} F_j = \bigcup_{i=1}^{k} E_j = \bigcup_{j=1}^{l} \bigcup_{i=1}^{k} A_{ij} = X.$$

Platí $\nu_{s+t}(A_{ij}) = (\alpha_i + \beta_j)\mu(A_{ij}) = \alpha_i \mu(A_{ij}) + \beta_j \mu(A_{ij}) = \nu_s(A_{ij}) + \nu_t(A_{ij})$. První rovnost plyne z aditivity měr ν_s, ν_t a ν_{s+t}. Druhá rovnost plyne hned z definice. □

Důsledek 4.6. 1. *Pokud pro nezáporné jednoduché funkce s, t měřitelné na X platí $s \le t$ na X, platí $I(s) \le I(t)$.*

2. *Pro jednoduchou nezápornou funkci s měřitelnou na X platí $\int_X s \, \mathrm{d}\mu = I(s)$.*

Definice 4.7. *Označíme*

$$\mathcal{L}^*(\mu) := \left\{ f : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}^* \text{ měř.} : \int f \, d\mu \text{ je definován} \right\}.$$

Věta 4.8 (Linearita integrálu)**.** *Jsou-li funkce $f, g \in \mathcal{L}^*(\mu)$ a $\alpha \in \mathbb{R}$, pak platí*

$$\int_X \alpha f \, \mathrm{d}\mu = \alpha \int_X f \, \mathrm{d}\mu, \qquad \int_X (f+g) \, d\mu = \int_X f \, d\mu + \int_X g \, d\mu,$$

má-li pravá strana smysl.

Poznámka. *Má-li $\int_X f \, d\mu + \int_X g \, d\mu$ smysl, není funkce $f + g$ definována na množině míry nula. Dodefinujeme ji tam nulou. Integrál $\int_X (f+g) \, \mathrm{d}\mu$ pak chápeme jako integrál z této nové funkce.*

Důkaz: (i) Je-li $f \in \mathcal{L}^*(\mu)$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ pak i $\alpha f \in \mathcal{L}^*(\mu)$ a $\int (\alpha f) \, d\mu = \alpha \int f \, d\mu$ (cvičení).

(ii) Buďte $f, g \in \mathcal{L}^*(\mu)$. Ukážeme, že $\int_X (f+g) \, d\mu = \int_X f \, d\mu + \int_X g \, d\mu$, má-li pravá strana smysl.

(a) Jsou-li f, g nezáporné jednoduché, rovnost integrálů plyne z Věty 4.5 a druhé části Důsledku 4.6.

(b) Jsou li f, g nezáporné, pak podle Věty 3.13 existují jednoduché měřitelné funkce s_n, t_n takové, že $s_n \nearrow f$ a $t_n \nearrow g$, tedy $\int s_n \, d\mu \nearrow \int f \, d\mu$ a $\int t_n \, d\mu \nearrow \int g \, d\mu$ podle Leviho věty. Ze stejného důvodu platí i $\int (s_n + t_n) \, d\mu \nearrow \int (f+g) \, d\mu$. Víme již, že $\int (s_n+t_n) \, d\mu = \int s_n \, d\mu + \int t_n \, d\mu$, a limitním přechodem $(n \to \infty)$ dostaneme požadovanou rovnost.

(c) Buďte nyní $f, g \in \mathcal{L}^*(\mu)$ libovolné. Definujme $N = (\{f = +\infty\} \cap \{g = -\infty\}) \cup (\{f = -\infty\} \cap \{g = +\infty\})$. Jelikož má $\int_X f \, d\mu + \int_X g \, d\mu$ smysl, platí $\mu(N) = 0$. Na N předefinujeme funkce f a g nulou. Pak platí rovnost $f + g = (f+g)^+ - (f+g)^- = (f^+ - f^-) + (g^+ - g^-)$, tedy $(f+g)^+ + f^- + g^- = (f+g)^- + f^+ + g^+$. Všechny zde vystupující funkce jsou nezáporné, tudíž platí

$$\int (f+g)^+ \, d\mu + \int f^- \, d\mu + \int g^- \, d\mu = \int (f+g)^- \, d\mu + \int f^+ \, d\mu + \int g^+ \, d\mu.$$

Jelikož má $\int_X f \, d\mu + \int_X g \, d\mu$ smysl, nemohou být všechny integrály $\int f^- \, \mathrm{d}\mu$, $\int g^- \, \mathrm{d}\mu$, $\int f^+ \, \mathrm{d}\mu$, $\int g^+ \, \mathrm{d}\mu$ nekonečné. Například, je-li $\int f^+ \, \mathrm{d}\mu = +\infty$, musí být $\int f^- \, \mathrm{d}\mu$, $\int g^- \, \mathrm{d}\mu$ konečné. Díky nerovnosti $(f+g)^- \leq f^- + g^-$ je pak konečný i $\int (f+g)^- \, \mathrm{d}\mu$ a vhodným odečtením dostaneme požadovanou rovnost $\int (f+g) \, d\mu = \int f \, d\mu + \int g \, d\mu$. Ostatní případy se dokáží podobně. □

. . . . konec přednášky 6, 17.10.

Věta 4.9 (Zobecněná Leviho věta). *Buďte funkce $f_n : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}^*$ měřitelné pro $n \in \mathbb{N}$.*

1. *Jsou-li $f_n \nearrow f$ pro $n \to +\infty$ s.v. X a $\int_X f_1 \, \mathrm{d}\mu > -\infty$, platí $\int_X f_n \, \mathrm{d}\mu \nearrow \int_X f \, \mathrm{d}\mu$.*
2. *Jsou-li $f_n \searrow f$ pro $n \to +\infty$ s.v. X a $\int_X f_1 \, \mathrm{d}\mu < +\infty$, platí $\int_X f_n \, \mathrm{d}\mu \searrow \int_X f \, \mathrm{d}\mu$.*

Důkaz. Z předpokladu víme, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ je $\int f_n \, d\mu > -\infty$. Je-li $\int f_{n_0} \, d\mu = \infty$ pro nějaké $n_0 \in \mathbb{N}$, tvrzení zřejmě platí. Zbývá situace kdy pro všechna $n \in \mathbb{N}$ je $\int f_n \, d\mu \in \mathbb{R}$. Označme $N_n = \{f_n = +\infty\} \cup \{f_n = -\infty\}$. Pak je pro $n \in \mathbb{N}$ $\mu(N_n) = 0$, a tedy také $\mu(\bigcup_{n=1}^{+\infty} N_n) = 0$. Předefinujeme-li všechny funkce f_n nulou na $\bigcup_{n=1}^{+\infty} N_n$ integrály se nezmění a bude platit $0 \leq f_n - f_1 \nearrow f - f_1$ s.v. v X, podle Leviho věty platí $\int (f_n - f_1) \, d\mu \nearrow \int (f - f_1) \, d\mu$, a z aditivity integrálu dostaneme $\int f_n \, d\mu \nearrow \int f \, d\mu$. □

Příklad 4.10. *V předchozí větě nelze vynechat omezenost integrálu z f_1. Volíme-li totiž $X = \mathbb{N}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, μ počítací míru a $f_n = -\chi_{(n,+\infty)\cap X}$, je $f_n \nearrow 0$ pro $n \to +\infty$, ale $-\infty = \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu \to -\infty \neq \int_X 0 \, \mathrm{d}\mu = 0$.*

Definice 4.11. *Označíme $\mathcal{L}^1(\mu) := \left\{ f \in \mathcal{L}^*(\mu) : \int |f| \, d\mu < \infty \right\}$.*

Cvičení 4.12.

1. *Je-li funkce f měřitelná a $|f| \leq g$ s.v. pro nějakou funkci $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$, pak i $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$.*
2. *Speciálně, je-li $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$, je i $|\int_X f \, \mathrm{d}\mu| < +\infty$.*
3. *Platí také: Je-li $f \in \mathcal{L}^*(\mu)$ a $|\int_X f \, \mathrm{d}\mu| < +\infty$, je $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$.*
4. *$f, g \in \mathcal{L}^1(\mu) \implies \max\{f, g\}, \min\{f, g\} \in \mathcal{L}^1(\mu)$.*

Věta 4.13 (Lebesgueova; o konvergentní majorantě). *Buď $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou a f_n, f měřitelné funkce takové, že $f_n \to f$ s.v. Nechť dále existuje funkce $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ taková, že $|f_n| \leq g$ s.v. pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Pak $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ a $\int f_n \, d\mu \to \int f \, d\mu$.*

Důkaz: Předefinujeme-li funkce f_n, f na množině

$$\{x : f_n(x) \not\to f(x)\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x : |f_n(x)| > g(x)\}$$

nulové míry, budou předpoklady věty platit pro všechna $x \in X$. Označme

$$g_n := \inf\{f_n, f_{n+1}, \dots\}, \quad h_n := \sup\{f_n, f_{n+1}, \dots\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Zřejmě platí

$$-g \le g_n \le f_n \le h_n \le g, \quad n \in \mathbb{N},$$

tedy $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$, a $g_n \nearrow f$, $h_n \searrow f$, $n \to \infty$, tedy podle zobecněné Leviho věty platí $\int g_n \, d\mu \to \int f \, d\mu$ a $\int h_n \, d\mu \to \int f \, d\mu$. Protože $\int g_n \, d\mu \le \int h_n \, d\mu \le \int h_n \, d\mu$, platí také $\int f_n \, d\mu \to \int f \, d\mu$ podle věty o dvou strážnících.
□

Věta 4.14 (Fatouovo lemma)**.** *Pro funkce f_n nezáporné měřitelné na X platí*

$$\int_X \left(\liminf_{n\to\infty} f_n \right) \, d\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu.$$

Důkaz: Označme $g_n(x) := \inf\{f_k(x) : k \ge n\}$, $x \in X$. Funkce g_n jsou měřitelné (Věta 3.11) a platí $g_n \nearrow g := \liminf_{n\to\infty} f_n$ (z definice lim inf). Podle Leviho věty platí $\int g_n \, d\mu \nearrow \int g \, d\mu$. Dále zřejmě $g_n \le f_n$, a tedy $\int g_n \, d\mu \le \int f_n \, d\mu$, $n \in \mathbb{N}$, a limitním přechodem dostaneme $\int g \, d\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu$. □

Uvedeme některé důsledky vět o limitních přechodech pro abstraktní Lebesgueův integrál.

Důsledek 4.15. *Pro nezáporné měřitelné funkce f_n na X platí*

$$\int \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n \, d\mu.$$

Důkaz: Podle Věty 4.8 platí

$$\int \left(\sum_{k=1}^{n} f_n \right) \, d\mu = \sum_{k=1}^{n} \int f_k \, d\mu, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Limitním přechodem a s využitím Leviho věty dostaneme tvrzení. □

Důsledek 4.16. *Jsou-li f_i měřitelné, $\sum_{i=1}^{\infty} f_i$ konverguje s.v., a $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ taková, že $|\sum_{i=1}^{n} f_i| \le g$ s.v. pro všechna n, pak $\sum_{i=1}^{\infty} f_i \in \mathcal{L}^1(\mu)$ a*

$$\int \left(\sum_{i=1}^{\infty} f_i \right) \, d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \int f_i \, d\mu.$$

Důkaz. Plyne z Lebesgueovy věty. □

. . . . konec přednášky 7, 23.10.

Důsledek 4.17. *Buď $f \in \mathcal{L}^*(\mu)$ nezáporná. Pro $A \in \mathcal{A}$ definujeme*

$$\nu(A) = \int_A f \, \mathrm{d}\mu.$$

Pak je ν míra na $\mathcal{A}$ a pro $g : (X, \mathcal{A}) \to [0, +\infty]$ měřitelnou platí

$$\int_X g \, \mathrm{d}\nu = \int_X f g \, \mathrm{d}\mu.$$

.

Důkaz. Zjevně $\nu(\emptyset) = 0$. Ať $A_j \subset \mathcal{A}$ jsou po dvou disjunktní a $A = \bigcup_{j=1}^{+\infty} A_j$. Definujeme $g_j = \chi_{A_j}$ a $g = \chi_A$. Pak

$$\nu(A) = \int_X fg \, \mathrm{d}\mu = \int_X \sum_{j=1}^{+\infty} fg_j \, \mathrm{d}\mu = \sum_{j=1}^{+\infty} \int_X fg_j \, \mathrm{d}\mu = \sum_{j=1}^{+\infty} \nu(A_j).$$

Dokážeme druhou rovnost. Pro nezáporné měřitelné jednoduché funkce plyne z Věty 4.8. Pro nezáporné měřitelné funkce ji získáme pomocí Leviho věty. □

Poznámka 4.18. *1. Nechť je prostor $(X, \mathcal{A}, \mu)$ úplný. Pak z rovnosti $f = g$ s.v. plyne*

$$f \text{ je měřitelná} \iff g \text{ je měřitelná.}$$

2. Pokud se dvě měřitelné funkce liší na množině míry nula, mají stejný integrál.

3. Při zúplnění prostoru s mírou se integrály definované v původním prostoru nemění.

Definice 4.19 (Měřitelné funkce na prostoru s mírou)**.** *Buď $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou. Řekneme, že funkce $f : \mathcal{D}(f) \subset X \to \mathbb{R}^*$ je μ-měřitelná na X, jestliže existuje $D \in \mathcal{A}$, $D \subset \mathcal{D}(f)$, $\mu(X \setminus D) = 0$ a pro každou $B \in \mathcal{B}$ platí $(f|_D)_{-1}(B) \in \mathcal{A}$. Dále budeme označení* funkce měřitelná na X *používat pro μ měřitelné funkce na X.*

Pro μ měřitelné funkce definujeme integrál předpisem $\int_X f \, \mathrm{d}\mu := \int_X \tilde{f} \, \mathrm{d}\mu$, kde $\tilde{f} = f$ na D a $\tilde{f} = 0$ na $X \setminus D$.

Poznámka 4.20. *1. Ve větách z této kapitoly stačí předpokládat, že funkce jsou μ měřitelné na X.*

5 Integrály závislé na parametru

V této kapitole označuje $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou a (T, ρ) metrický prostor. Dále budeme pracovat s funkcemi $f : T \times X \to \mathbb{R}$. Symbolem $f(\cdot, x)$ a $f(t, \cdot)$ budeme rozumět vždy funkci jedné proměnné (znázorněné tečkou) při pevné hodnotě (parametru) druhé proměnné, například $f(\cdot, x) := g$, kde $g : T \to \mathbb{R}$ je daná předpisem $g(t) = f(t, x)$.

Věta 5.1 (Lebesgueova; o spojité závislosti integrálu na parametru)**.** *Buďte $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou, T metrický prostor a $f : T \times X \to \mathbb{R}$ funkce. Nechť dále*

(i) *$f(t, \cdot)$ je měřitelná pro každé $t \in T$,*

(ii) *$f(\cdot, x)$ je spojitá na T pro s.v. $x \in X$,*

(iii) *existuje $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ taková, že pro všechna $t \in T$ je $|f(t, \cdot)| \le g$ s.v.*

Pak $f(t, \cdot) \in \mathcal{L}^1(\mu)$ pro všechna $t \in T$ a funkce

$$F : t \mapsto \int f(t, \cdot) \, \mathrm{d}\mu$$

je spojitá na T.

Důkaz. Buď $t \in T$. Z předpokladu $|f(t, \cdot)| \le g$ s.v. plyne podle Cvičení 4.12 $f(t, \cdot) \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Podle Heineovy věty stačí dokázat, že pro každou posloupnost $\{t_j\} \subset T$, $t_j \to t$ pro $j \to +\infty$ platí, $F(t_j) \to F(t)$ pro $j \to +\infty$. Zvolme tedy takovou $\{t_j\}$ a označme N množinu nulové míry, že $f(\cdot, x)$ je spojitá pro $x \notin N$. Pro libovolný $x \in X \setminus N$, platí opět podle Heineho věty $\lim_{j \to \infty} f(t_j, x) = f(t, x)$, a tedy $f(t_n, \cdot) \to f$ pro $n \to +\infty$ s.v. a $|f(t_n, \cdot)| \le g$ s.v. Podle Věty 4.13 platí $\lim_{j \to \infty} F(t_j) = F(t)$. □

Cvičení. *Zformulujte obdobu Věty 5.1 pro limitu funkce* F.

....konec přednášky 8, 24.10.

Věta 5.2 (Záměna integrálu a derivace). *Buď* $I \subset \mathbb{R}$ *otevřený interval a* $f : I \times X \to \mathbb{R}$ *funkce. Nechť dále*

(i) $f(t, \cdot)$ *je měřitelná pro každé* $t \in I$,

(ii) *existuje* $N \in \mathcal{A}$, $\mu(N) = 0$, *taková, že pro všechna* $x \in X \setminus N$ *a* $t \in I$ *existuje vlastní derivace* $\frac{\partial}{\partial t} f(t, x)$,

(iii) *existuje* $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ *taková, že pro všechna* $x \in X \setminus N$ *a* $t \in I$, $|\frac{\partial}{\partial t} f(t, x)| \le g(x)$,

(iv) *existuje* $t_0 \in I$ *takové, že* $f(t_0, \cdot) \in \mathcal{L}^1(\mu)$.

Pak $f(t, \cdot) \in \mathcal{L}^1(\mu)$ *pro všechna* $t \in I$, *funkce*

$$F : t \mapsto \int_X f(t, \cdot)\, \mathrm{d}\mu$$

je diferencovatelná na I *a pro* $t \in I$ *platí*

$$F'(t) = \int_X \frac{\partial}{\partial t} f(t, \cdot)\, \mathrm{d}\mu.$$

Důkaz: Pro libovolné $a, b \in I$, $a < b$, a $x \in X \setminus N$ existuje podle Lagrangeovy věty o střední hodnotě $c_x \in (a, b)$ takové, že

$$\frac{f(b, x) - f(a, x)}{b - a} = \frac{\partial}{\partial t} f(c_x, x).$$

Z předpokladu (iii) plyne, že funkce $x \mapsto \frac{\partial}{\partial t} f(c_x, x)$ leží v prostoru $\mathcal{L}^1(\mu)$. Zvolíme-li za jeden z bodů a, b bod t_0, dostaneme $f(t, \cdot) \in \mathcal{L}^1(\mu)$ pro všechna $t \in I$. Uvažujme nyní libovolnou posloupnost $t_j \to t \in I$, $I \ni t_j \neq t$. Platí

$$\lim_{j\to\infty} \frac{F(t_j) - F(t)}{t_j - t} = \lim_{j\to\infty} \int_X \frac{f(t_j, \cdot) - f(t, \cdot)}{t_j - t}\, \mathrm{d}\mu = \int_X \frac{\partial}{\partial t} f(t, \cdot)\, \mathrm{d}\mu;$$

poslední rovnost plyne z Lebesgueovy věty o konvergentní majorantě a z definice derivace. Protože uvedená rovnost platí pro libovolnou posloupnost $t_j \to t \in I$, $t_j \neq t$, dostáváme $F'(t) = \int_X \frac{\partial}{\partial t} f(t, \cdot)\, \mathrm{d}\mu$, $t \in I$. □

6 Lebesgueův integrál na přímce

Věta 6.1. *Je-li* $f \ge 0$ *na prostoru s mírou* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *a platí-li* $\int f\, d\mu = 0$, *je* $f = 0$ *s.v.*

Důkaz. Označme $A_n := \{x \in X : f(x) \ge \frac{1}{n}\}$. Zřejmě $A_n \in \mathcal{A}$, $\chi_{A_n} \le nf$, a tedy $\mu(A_n) = \int \chi_{A_n}\, d\mu \le n \int f\, d\mu = 0$, $n \in \mathbb{N}$. Protože $\{f > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, platí $\mu(\{f > 0\}) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = 0$. □

Důsledek. *Jsou-li* $f, g \in \mathcal{L}^1(\mu)$, $f \le g$ *a* $\int f\, d\mu = \int g\, d\mu$, *pak* $f = g$ *s.v.*

Důsledek. *Nechť pro funkci* $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ *platí* $\int_E f\, d\mu = 0$ *pro každou množinu* $E \in \mathcal{A}$. *Pak* $f = 0$ *s.v.*

Důkaz. Zvolme nejprve $E_+ := \{f > 0\}$. Pak podle předpokladu platí $\int f^+\, d\mu = \int_{E_+} f\, d\mu = 0$, a protože $f^+ \ge 0$, je $f^+ = 0$ s.v. podle Věty 6.1. Podobně volbou $E_- := \{f < 0\}$ odvodíme, že $f^- = 0$ s.v. Pak ale musí být $f = 0$ s.v. □

Značení: Budeme uvažovat restrikci (zúplněné) Lebesgueovy míry λ^1 na omezený uzavřený interval $[a,b]$, tj. $X = [a,b]$, $\mathcal{A} = \{A \subset [a,b]; A \in \mathcal{B}_0\}$, $\mu = \lambda^1|_{\mathcal{A}}$. Budeme značit $\mathcal{L}^1(a,b)$ příslušný prostor integrovatelných funkcí, $\mathcal{L}^*(a,b)$ prostor funkcí, které mají Lebesgueův integrál, a $\int_a^b f\,d\lambda^1$, $\int_a^b f(x)\,d\lambda^1(x)$, nebo $\int_a^b f(x)\,dx$ Lebesgueův integrál z funkce $f \in \mathcal{L}^*(a,b)$. Dále symbolem $\mathcal{R}[a,b]$ značíme množinu všech omezených funkcí na $[a,b]$, pro něž existuje Riemannův integrál (R) $\int_a^b f$.

Věta 6.2. *Je-li $f \in \mathcal{R}[a,b]$, pak $f \in \mathcal{L}^1(a,b)$ a* (R) $\int_a^b f = \int_a^b f\,d\lambda^1$.

. . . . konec přednášky 9, 30.10.

Důkaz. Protože $f \in \mathcal{R}[a,b]$, existuje posloupnost $(\mathcal{D}_n)$ zjemňujících se dělení intervalu $[a,b]$ taková, že

$$\mathfrak{s}(f,\mathcal{D}_n) \nearrow \text{(R)}\int_a^b f \swarrow \mathscr{S}(f,\mathcal{D}_n), \quad n \to \infty$$

($\mathfrak{s}(f,\mathcal{D}_n)$ a $\mathscr{S}(f,\mathcal{D}_n)$ značí dolní a horní Riemannův součet f přes dělení $\mathcal{D}_n$). Je-li $\mathcal{D}_n = \{a = x_0^{(n)} < x_1^{(n)} < \cdots < x_{k_n}^{(n)} = b\}$, zaveďme funkce s_n, S_n předpisem

$$s_n(x) = \inf_{[x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}]} f, \quad S_n(x) = \sup_{[x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}]} f, \quad x \in (x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}],\ i = 1,\dots,k_n,$$

a $s_n(x) = S_n(x) = 0$ pro ostatní hodnoty $x \in \mathbb{R}$. Pak zřejmě platí

$$\mathfrak{s}(f,\mathcal{D}_n) = \int_a^b s_n\,d\lambda^1, \quad \mathscr{S}(f,\mathcal{D}_n) = \int_a^b S_n\,d\lambda^1.$$

Funkce f je dle předpokladu omezená, tedy $|f| \le M$ pro nějaké $M \in \mathbb{R}$. Platí

$$-M \le s_1 \le s_2 \le \cdots \le f \le \cdots \le S_2 \le S_1 \le M.$$

Označme $f_1 := \lim_{n\to\infty} s_n$, $f_2 := \lim_{n\to\infty} S_n$ (monotónní omezená posloupnost vždy konverguje). Pak platí

$$-M \le s_n \nearrow f_1 \le f \le f_2 \swarrow S_n \le M.$$

a podle zobecněné Leviho věty tedy

$$\int_a^b s_n\,d\lambda^1 \to \int_a^b f_1\,d\lambda^1, \quad \int_a^b S_n\,d\lambda^1 \to \int_a^b f_2\,d\lambda^1.$$

Podle předpokladu ale také

$$\int_a^b s_n\,d\lambda^1 = \mathfrak{s}(f,\mathcal{D}_n) \nearrow \text{(R)}\int_a^b f \swarrow \mathscr{S}(f,\mathcal{D}_n) = \int_a^b S_n\,d\lambda^1,$$

takže $\int_a^b f_1\,d\lambda^1 = \int_a^b f_2\,d\lambda^1 =$ (R) $\int_a^b f$. Podle důsledku Věty 6.1 je $f_1 = f_2$ s.v., a zřejmě tedy také $f = f_1$ s.v. (neboť $f_1 \le f \le f_2$), a tedy také $\int_a^b f\,d\lambda^1 =$ (R) $\int_a^b f$. Měřitelnost f plyne z měřitelnosti $f_1 = \lim s_n$ a z úplnosti prostoru s mírou. $\square$

Důsledek 6.3. • *Je-li $f \in \mathcal{R}[a,b] \cap \mathcal{N}(a,b)$, pak $f \in \mathcal{L}^1(a,b)$ a* (R) $\int_a^b f = \int_a^b f\,d\lambda^1 =$ (N) $\int_a^b f$.

Věta 6.4. *Buď $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ omezená. Pak*

$$f \in \mathcal{R}[a,b] \iff f \text{ je spojitá } \lambda^1\text{-s.v. na } [a,b].$$

Důkaz. Důkaz plyne okamžitě z [Rana, 2002, Corollary 1.2.7]. □

V následujícím bude $X = (a, b) \subset \mathbb{R}$, $\mathcal{A} = \{A \subset (a, b); A \in \mathcal{B}_0\}$, $\mu = \lambda^1|_{\mathcal{A}}$. Označení integrálů podobně jako výše. Dále symbolem $\mathcal{N}(a, b)$ značíme množinu všech funkcí na (a, b), pro něž existuje Newtonův integrál (N) $\int_a^b f$.

Zbytek kapitoly je převzat ze skriptu [Malý, 2019, Sekce 5].

Definice 6.5 (Neurčitý Lebesgueův integrál). *Nechť f je spojitá funkce na intervalu (a, b). Funkci $F : (a, b) \to \mathbb{R}$ nazveme neurčitým Lebesgueovým integrálem funkce f, jestliže*

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = F(\beta) - F(\alpha)$$

pro každý interval $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$.

Poznamenejme, že každá spojitá funkce na otevřeném intervalu je měřitelná (protože otevřené množiny jsou borelovské a tudíž měřitelné) a má neurčitý Lebesgueův integrál. Ten se zkonstruuje např. jako

$$F(x) = \begin{cases} \int_c^x f(t)\,dt, & x \geq c, \\ -\int_x^c f(t)\,dt, & x < c \end{cases}$$

pro pevně zvolený bod $c \in (a, b)$. Konvergence integrálů plyne z omezenosti integrovatelných funkcí a integračních oborů.

Věta 6.6 (o neurčitém Lebesgueově integrálu). *Nechť f, F jsou spojité funkce na intervalu (a, b). Potom F je primitivní funkce k f, právě když F je neurčitý Lebesgueův integrál funkce f.*

Důkaz. Nechť nejprve F je neurčitý Lebesgueův integrál. Snadno ověříme, že

$$\lim_{h \to 0+} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \to 0+} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)\,dt = f(x), \qquad x \in (a, b),$$

podobně pro limitu zleva. F je tedy primitivní funkce. Nechť naopak F je primitivní funkce, najdeme neurčitý Lebesgueův integrál G. Podle předchozí části je G primitivní funkce, tedy G a F se liší jen o aditivní konstantu. Jelikož se F liší o aditivní konstantu od neurčitého Lebesgueova integrálu, je to také neurčitý Lebesgueův integrál. □

Definice 6.7 (Newtonův integrál). *Nechť f je funkce na intervalu (a, b). Připomeňme, že říkáme, že funkce f má Newtonův integrál I přes (a, b), jestliže f má na (a, b) primitivní funkci F, ta má limity*

$$F(a+) = \lim_{x \to a+} F(x), \qquad F(b-) = \lim_{x \to b-} F(x),$$

tyto limity jsou vlastní (ve smyslu "konečné") a

$$I = F(b-) - F(a+).$$

Integrál I značíme $(N) \int_a^b f(x)\,dx$. Když f má Newtonův integrál, říkáme, že Newtonův integrál f konverguje, v opačném případě říkáme, že diverguje, Jestliže Newtonův integrál f konverguje, rozlišujeme *absolutní konvergenci* (tj. též $(N) \int |f(x)|\,dx$ konverguje) a *neabsolutní konvergenci* (tj. $(N) \int |f(x)|\,dx$ diverguje).

Konvergence integrálu $|f|$ sama o sobě ještě nezaručuje absolutní konvergenci integrálu f. Např. funkce

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

nemá primitivní funkci, ale $(N) \int_{-1}^1 |f(x)|\,dx$ konverguje.

Věta 6.8 (vztah mezi Newtonovým a Lebesgueovým integrálem)**.** *Nechť f je nezáporná spojitá funkce na intervalu (a, b). Potom $(N)\int_a^b f(x)\,dx$ konverguje, právě když konverguje Lebesgueův integrál funkce f. V tom případě mají oba integrály společnou hodnotu.*

Důkaz. (a) Zvolme $c \in (a, b)$ a najděme intervaly $[a_j, b_j]$ tak, že $a < a_j < c < b_j < b$, $a_j \searrow a$, $b_j \nearrow b$. Nechť F je neurčitý Lebesgueův integrál funkce f, což je podle Věty 6.6 primitivní funkce k f. Potom F je neklesající a tudíž má limity $F(b-)$, $F(a+)$. Jelikož (z monotonie) $F(b-)$ nemůže být $-\infty$ a $F(a+)$ nemůže být $+\infty$, rozdíl $F(b-) - F(a+)$ má smysl a platí

$$F(b-) - F(a+) = \lim_k (F(b_k) - F(a_k)). \tag{1.1}$$

Označme

$$f_k = f\chi_{(a_k, b_k)}.$$

Funkce f má Lebesgueův integrál přes (a, b) (je totiž nezáporná a měřitelná). Podle Leviho věty 4.4 a (1.1) je

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_k \int_a^b f_k(x)\,dx = \lim_k \int_{a_k}^{b_k} f(x)\,dx = \lim_k (F(b_k) - F(a_k)) = F(b-) - F(a+),$$

takže $\int_a^b f(x)\,dx$ konverguje, právě když $F(b-) - F(a+) < \infty$, ale to je přesně podmínka pro konvergenci Newtonova integrálu. □

Důsledek 6.9 (Diskuse vztahu mezi Newtonovým a Lebesgueovým integrálem)**.** *Nechť f je spojitá funkce na intervalu (a, b).*

(a) Jestliže konverguje Lebesgueův integrál z f od a do b, konverguje i Newtonův a to absolutně.

(b) Jestliže Newtonův integrál z f od a do b konverguje absolutně, pak konverguje i Lebesgueův.

(c) Pokud konverguje jak Lebesgueův, tak Newtonův integrál z funkce f, pak oba mají stejnou hodnotu.

(d) Jestliže Newtonův integrál z f od a do b konverguje neabsolutně, pak Lebesgueův integrál nemá smysl.

Tvrzení (b) a (c) platí i bez předpokladu spojitosti, ale důkaz je složitější. Tvrzení (a) naopak spojitost vyžaduje. Jinak neplatí žádná inkluze mezi třídou všech Lebesgueovsky integrovatelných funkcí a třídou všech newtonovsky integrovatelných funkcí.

Důkaz je snadné cvičení, založené na rozkladu $f = f^+ - f^-$. Pokud Newtonův integrál f konverguje absolutně, konvergují i Newtonovy integrály funkcí f^+ a f^-, protože $f^+ = \frac{1}{2}(|f| + f)$ a $f^- = \frac{1}{2}(|f| + f)$.

.... konec přednášky 10, 31.10.

7 Věta o jednoznačnosti míry

Definice 7.1. *Řekneme, že $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(X)$ je Dynkinův systém, jestliže*

(i) $X \in \mathcal{D}$,

(ii) $D \in \mathcal{D} \implies X \setminus D \in \mathcal{D}$,

(iii) $D_n \in \mathcal{D}$, *D_n po dvou disjunktní* $\implies \bigcup_n D_n \in \mathcal{D}$.

Poznámka 7.2. *1. Důležitost Dynkinových systémů spočívá v tom, že jsou-li μ, ν dvě míry na $(X, \mathcal{A})$, $\mu(X) = \nu(X) < \infty$, potom systém množin $\{A \in \mathcal{A}; \mu(A) = \nu(A)\}$ je Dynkinův systém (obecně ne σ-algebra: uvažujte např. míry $A \mapsto \lambda(\{x \in A : x > 0\})$ a $A \mapsto \lambda(\{x \in A : x < 0\})$ na intervalu $[-1, 1]$). Pro množiny $(-1/2, 1/2)$ a $(-1, -1/2) \cup (0, 1/2)$ jsou obě míry stejné, ale pro jejich sjednocení již ne.*

2. *Dynkinův systém obsahuje $\emptyset$, a tedy je uzavřen na konečná sjednocení po dvou disjunktních množin.*

3. *Dynkinův systém je uzavřen i na vlastní množinové rozdíly: Jsou-li $A, B \in \mathcal{D}$, $A \subset B$, pak i $B \setminus A \in \mathcal{D}$. Platí totiž $B \setminus A = X \setminus ((X \setminus B) \cup A)$ a množiny $X \setminus B$ a A jsou disjunktní.*

4. *Každá σ-algebra je zřejmě Dynkinův systém, ale ne naopak.*

Věta 7.3. (a) *Průnik libovolného systému Dynkinových systémů je opět Dynkinův systém.*

(b) *Pro každý množinový systém $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ existuje nejmenší Dynkinův systém, obsahující $\mathcal{S}$:*

$$\delta\mathcal{S} := \bigcap \{\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(X) \text{ Dynkinův syst.}, \mathcal{S} \subset \mathcal{D}\}.$$

(c) $\delta\mathcal{S} \subset \sigma\mathcal{S}$

Důkaz. Plyne jednoduše z definice Dynkinových systémů. □

Věta 7.4. *Nechť je množinový systém $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ uzavřen na konečné průniky. Pak $\delta\mathcal{S} = \sigma\mathcal{S}$.*

Důkaz. Ukážeme, že $\delta\mathcal{S}$ je uzavřen na konečné průniky. Z toho již vyplyne, že $\delta\mathcal{S}$ je σ-algebra, a tedy $\delta\mathcal{S} = \sigma\mathcal{S}$. Skutečně, pak stačí ukázat že pro $A_n \in \delta\mathcal{S}$, $n \in \mathbb{N}$ platí $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \in \delta\mathcal{S}$. Volme induktivně $B_1 = A_1$, $B_n = A_n \setminus (A_n \cap \bigcup_{k=1}^{n-1} B_k)$. Pak $B_n \in \delta\mathcal{S}$, jsou po dvou disjunktní a $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n \in \delta\mathcal{S}$.

Nejdříve ukážeme, že $\delta\mathcal{S}$ je uzavřený na průniky s množinami z $\mathcal{S}$. Položme

$$\mathcal{D} := \{D \in \delta\mathcal{S} : D \cap S \in \delta\mathcal{S} \text{ pro každou } S \in \mathcal{S}\}.$$

Z předpokladu věty víme, že $\mathcal{S} \subset \mathcal{D}$. Ukážeme, že $\mathcal{D}$ je Dynkinův systém. (i) Zřejmě $X \in \mathcal{D}$. (ii) Je-li $D \in \mathcal{D}$ a $S \in \mathcal{S}$, pak

$$(X \setminus D) \cap S = S \setminus (S \cap D) \in \delta\mathcal{S},$$

tedy $X \setminus D \in \mathcal{D}$. (iii) Jsou-li $D_n \in \mathcal{D}$ po dvou disjunktní a $S \in \mathcal{S}$, pak

$$(\bigcup_n D_n) \cap S = \bigcup_n (D_n \cap S) \in \delta\mathcal{S},$$

tedy $\bigcup_n D_n \in \mathcal{D}$. $\mathcal{D}$ je tedy Dynkinův systém splňující $\mathcal{S} \subset \mathcal{D} \subset \delta\mathcal{S}$. Musí se tudíž shodovat se $\delta\mathcal{S}$.

Konečně dokážeme, že $\delta\mathcal{S}$ je uzavřen na průniky. Položme

$$\mathcal{E} := \{E \in \delta\mathcal{S} : E \cap D \in \delta\mathcal{S} \text{ pro každou } D \in \delta\mathcal{S}\}.$$

Z dokázané rovnosti $\mathcal{D} = \delta\mathcal{S}$ plyne $\mathcal{S} \subset \mathcal{E}$. $\mathcal{E}$ je rovněž Dynkinův systém (to se dokáže stejně, jako pro systém $\mathcal{D}$). Platí tedy také $\mathcal{E} = \delta\mathcal{S}$, což znamená, že $\delta\mathcal{S}$ je uzavřen na konečné průniky, a důkaz je hotov. □

Věta 7.5 (Věta o jednoznačnosti míry)**.** *Nechť je množinový systém $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ uzavřen na konečné průniky a μ, ν nechť jsou dvě míry na $\sigma\mathcal{S}$ takové, že $\mu(S) = \nu(S)$ pro každou $S \in \mathcal{S}$. Nechť dále existují množiny $A_n \in \mathcal{S}$ $(n \in \mathbb{N})$ takové, že $A_n \nearrow X$ a $\mu(A_n) < \infty$, $n \in \mathbb{N}$. Pak $\mu = \nu$ na $\sigma\mathcal{S} (= \delta\mathcal{S})$.*

Důkaz. (1) Předpokládejme, nejprve, že μ je konečná. Množina

$$\mathcal{D} := \{A \in \sigma\mathcal{S} : \mu(A) = \nu(A)\}$$

je Dynkinův systém (vlastnost (i) plyne z $\mu(X) = \lim_n \mu(A_n) = \lim_n \nu(A_n) = \nu(X)$, vlastnost (ii) z rovností $\mu(X) = \mu(X \setminus A) + \mu(A)$, $\nu(X) = \nu(X \setminus A) + \nu(A)$. Všimněte si, že rovnost $\mu(X \setminus A) = \nu(X \setminus A)$ z nich odvodíme pouze díky $\mu(A) = \nu(A) \in \mathbb{R}$. Vlastnost (iii) pak plyne ze spočetné aditivity míry). Protože $\mathcal{S} \subset \mathcal{D}$ podle předpokladu, musí být $\sigma\mathcal{S} = \delta\mathcal{S} \subset \mathcal{D} \subset \sigma\mathcal{S}$. První rovnost platí podle Věty 7.4. Tedy $\mathcal{D} = \sigma\mathcal{S}$ a μ a ν se shodují na $\sigma\mathcal{S}$.

(2) Je-li μ nekonečná, položíme

$$\mathcal{D}_n := \{A \in \sigma\mathcal{S} : \mu(A \cap A_n) = \nu(A \cap A_n)\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Stejně jako v části (1) se ověří, že $\mathcal{D}_n$ je Dynkinův systém obsahující $\mathcal{S}$, a tedy $\mathcal{D}_n = \sigma\mathcal{S}$, $n \in \mathbb{N}$. Ze spojitosti míry pak pro libovolnou $A \in \sigma\mathcal{S}$ dostaneme

$$\mu(A) = \lim_n \mu(A \cap A_n) = \lim_n \nu(A \cap A_n) = \nu(A),$$

čímž je důkaz ukončen. □

Poznámka 7.6. *V druhém kroku důkazu jsme vlastně aplikovali první krok důkazu na* $X_n = A_n$, $\mathcal{S}_n = \{A \in \mathcal{S}; A \subset A_n\}$, $\mu_n = \mu|_{\sigma\mathcal{S}_n}$, $\nu_n = \nu|_{\sigma\mathcal{S}_n}$.

..........konec přednášky 11, 6.11.

Příklad: Je-li μ míra na $(\mathbb{R}^1, \mathcal{B}^1)$ taková, že $\mu(I) = \text{délka}(I)$ pro každý omezený interval I, pak nutně $\mu = \lambda^1$.

8 Součin měr a Fubiniova věta

Mějme dva prostory $(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ se σ-konečnými měrami.

Definice 8.1. *Měřitelným obdélníkem* rozumíme množinu $A \times B \subset X \times Y$, kde $A \in \mathcal{A}$ a $B \in \mathcal{B}$. Označme množinu všech měřitelných obdélníků

$$\mathcal{O} = \{A \times B : A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}.$$

σ-algebru

$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} := \sigma\mathcal{O}$$

nazýváme *součinovou σ-algebrou* na prostoru $X \times Y$.

Pro množinu $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ značíme

$$\begin{aligned} E_x &:= \{y \in Y : (x, y) \in E\}, \quad x \in X, \\ E^y &:= \{x \in X : (x, y) \in E\}, \quad y \in Y \end{aligned}$$

řezy množiny E.

Věta 8.2. *Nechť $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ a $f : (X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) \to \mathbb{R}^*$ měřitelná. Pak*

1. *$E_x \in \mathcal{B}$ pro všechna $x \in X$, $E^y \in \mathcal{A}$ pro všechna $y \in Y$*
2. *funkce $x \mapsto \nu(E_x)$ je měřitelná na $(X, \mathcal{A})$, funkce $y \mapsto \mu(E^y)$ je měřitelná na $(Y, \mathcal{B})$.*

3. *pro každé $y \in Y$ je funkce $f^y : x \mapsto f(x,y)$ měřitelná na $(X, \mathcal{A})$, pro každé $x \in X$ je funkce $f_x : y \mapsto f(x,y)$ měřitelná na $(Y, \mathcal{B})$*

Důkaz. 0. Dokážeme pouze pro E_x a f_x. Pro E^y a f^y je důkaz podobný.

1. Pro libovolné $x \in X$ je $\{E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} : E_x \in \mathcal{B}\}$ zřejmě σ-algebra obsahující všechny měřitelné obdélníky, tedy musí splývat se součinovou σ-algebrou.

2. Zvolme pevně libovolnou množinu $B_0 \in \mathcal{B}$ s mírou $\nu(B_0) < \infty$. Označme

$$\mathcal{D} := \{E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} : x \mapsto \nu(E_x \cap B_0) \text{ je měřitelná}\}.$$

Zřejmě $\mathcal{O} \subset \mathcal{D}$. Lze ověřit, že $\mathcal{D}$ je Dynkinův systém. Proveďte! Tedy $\delta\mathcal{O} \subset \mathcal{D}$, a protože $\mathcal{O}$ je uzavřená na konečné průniky, je $\delta\mathcal{O} = \sigma\mathcal{O}$, a tedy $\mathcal{D} = \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$.

Protože ν je σ-konečná, existují množiny $B_n \in \mathcal{B}$, $\nu(B_n) < \infty$, $B_n \nearrow Y$, $n \to \infty$. Pak pro libovolnou $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ platí $\nu(E_x) = \lim_{n\to\infty} \nu(E_x \cap B_n)$ (z Věty 2.13), a tedy funkce $x \mapsto \nu(E_x)$ je měřitelná (jako limita měřitelných funkcí).

3. Pro $a \in \mathbb{R}$ položme $Q = \{f < a\}$. Pak $Q \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ a $\{f_x < a\} = Q_x \in \mathcal{B}$ podle bodu 1. Tedy f_x je měřitelná. $\square$

Věta 8.3 (Existence a jednoznačnost součinové míry)**.** *Existuje právě jedna míra $\mu \otimes \nu$ na $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$ s vlastností*

$$(\mu \otimes \nu)(A \times B) = \mu(A) \cdot \nu(B), \quad A \in \mathcal{A},\, B \in \mathcal{B} \tag{1.2}$$

(klademe $0 \cdot \infty = 0$). Navíc

$$\forall E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} : (\mu \otimes \nu)(E) = \int_X \nu(E_x)\,\mathrm{d}\mu(x) = \int_Y \mu(E^y)\,\mathrm{d}\nu(y). \tag{1.3}$$

Důkaz. Jednoznačnost: Použijeme Větu 7.5. Systém $\mathcal{O}$ všech měřitelných obdélníků je uzavřen na konečné průniky a součinová míra je na měřitelných obdélnících jednoznačně určena. Protože μ a ν jsou σ-konečné míry, existují množiny $A_n \in \mathcal{A}$, $\mu(A_n) < \infty$, $A_n \nearrow X$, a $B_n \in \mathcal{B}$, $\nu(B_n) < \infty$, $B_n \nearrow Y$, $n \to \infty$. Měřitelné obdélníky $C_n := A_n \times B_n$ pak splňují $(\mu \otimes \nu)(C_n) < \infty$ a $C_n \nearrow X \times Y$, předpoklady Věty 7.5 jsou tedy splněny.

Existence: Pro $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ položme

$$\kappa(E) := \int_X \nu(E_x)\, d\mu(x). \tag{1.4}$$

Nejprve ukážeme, že κ je míra na $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$. Zřejmě $\kappa(\emptyset) = 0$. Jsou-li $E_n \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ po dvou disjunktní, platí

$$\begin{aligned}\kappa(\bigcup_n E_n) &= \int_X \nu((\bigcup_n E_n)_x)\, d\mu(x) = \int_X \nu(\bigcup_n (E_n)_x)\, d\mu(x) \\ &= \int_X \sum_n \nu((E_n)_x)\, d\mu(x) = \sum_n \kappa(E_n)\end{aligned}$$

(využili jsme faktu, že řezy disjunktních množin jsou opět disjunktní). Tedy κ je míra.

Z definice je zřejmé, že pro měřitelný obdélník $A \times B$ je $\kappa(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$. Tedy κ je míra na $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$ splňující (1.2).

Definujme pro $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$

$$\kappa^*(E) := \int_Y \mu(E^y)\ \mathrm{d}\nu(y).$$

Opět je možné ukázat, že κ^* je míra na $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$ splňující (1.2), a tedy z jednoznačnosti plyne $\kappa = \kappa^*$, tedy (1.3). $\square$

Věta 8.4 (Fubiniova věta)**.** *Pro každou funkci $f \in \mathcal{L}^*(\mu \otimes \nu)$ platí:*

1. *funkce $x \mapsto \int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y)$ je měřitelná na X a funkce $y \mapsto \int_X f(x,y)\,\mathrm{d}\mu(x)$ je měřitelná na Y*
2. *platí rovnosti*

$$\int_{X\times Y} f\,d(\mu\otimes\nu) = \int_X \left(\int_Y f(x,y)\,d\nu(y)\right) d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f(x,y)\,d\mu(x)\right) d\nu(y).$$

Důkaz. 1. Je-li f charakteristickou funkcí množiny ze součinové σ-algebry, plyne rovnost z (1.3).

2. Pro jednoduchou měřitelnou funkci $s = \sum_{i=1}^k \alpha_i \chi_{E_i}$ máme

$$\begin{aligned}\int s\,d(\mu\otimes\nu) &= \sum_{i=1}^k \alpha_i \int \nu((E_i)_x)\,d\mu(x)\\ &= \int \sum_{i=1}^k \alpha_i \nu((E_i)_x)\,d\mu(x)\\ &= \int (\int s(x,y)\,d\nu(y))\,d\mu(x).\end{aligned}$$

Z uvedeného výpočtu rovněž plyne, že funkce $x \mapsto \int s(x,y)\,d\nu(y)$ je měřitelná pro libovolné $y \in Y$. Druhá rovnost se odvodí analogicky.

.... konec přednášky 12, 7.11.

3. Buď $f \geq 0$ měřitelná a $s_n \nearrow f$ nezáporné, jednoduché, měřitelné funkce. Pak podle Leviho věty

$$\int s_n(x,y)\,d\nu(y) \nearrow \int f(x,y)\,d\nu(y), \quad x \in X.$$

Protože integrály na levé straně jsou měřitelnými funkcemi proměnné x, i integrál na pravé straně je měřitelnou funkcí v x a opětovným použitím Leviho věty dostaneme

$$\int\int s_n(x,y)\,d\nu(y)\,d\mu(x) \nearrow \int\int f(x,y)\,d\nu(y)\,d\mu(x).$$

Podle již dokázané části 2 se integrál na levé straně shoduje s $\int s_n\,d(\mu\otimes\nu)$ a

$$\int s_n\,d(\mu\otimes\nu) \nearrow \int f\,d(\mu\otimes\nu),$$

čímž dostáváme první z obou dokazovaných rovností (druhá opět plyne analogicky).

4. Je-li $f = f^+ - f^- \in \mathcal{L}^*(\mu\otimes\nu)$, ověříme rovnost snadno pomocí příslušných rovností pro f^+ a f^-.

□

Příklad: Uvažujme $X = Y = \mathbb{Z}$, $\mathcal{A} = \mathcal{B} = \mathcal{P}(\mathbb{Z})$, $\mu = \nu$ je aritmetická míra. Definujme funkci $f : \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ následovně:

$$f(z_1,z_2) = \begin{cases} 1 & \text{pokud } z_2 = z_1 \geq 0 \text{ nebo } z_2 = z_1 - 1 \leq -1,\\ -1 & \text{pokud } z_2 = z_1 < 0 \text{ nebo } z_2 = z_1 - 1 > -1,\\ 0 & \text{jinak.}\end{cases}$$

Platí

$$\int\int f(z_1,z_2)d\mu(z_1)\,d\mu(z_2) = \sum_{z_2}\sum_{z_1} f(z_1,z_2) = 0,$$

ale

$$\int\int f(z_1,z_2)d\mu(z_2)\,d\mu(z_1) = \sum_{z_1}\sum_{z_2} f(z_1,z_2) = 2,$$

přitom ovšem $f \notin \mathcal{L}^*(\mu \otimes \mu)$.

Pozn.: Prostor se součinovou mírou $(X\times Y, \mathcal{A}\otimes\mathcal{B}, \mu\otimes\nu)$ nemusí být úplný, ani když prostory $(X,\mathcal{A},\mu)$ a $(Y,\mathcal{B},\nu)$ jsou úplné. Zúplněný prostor se součinovou mírou značíme $(X \times Y, \mathcal{A}\hat{\otimes}\mathcal{B}, \mu\hat{\otimes}\nu)$.

Stačí volit $A \in \mathcal{A}$ s $\mu(A) = 0$ a $B \in \mathcal{P}(Y) \setminus \mathcal{B}$. Pak je $A \times B$ nulová množina (je podmnožinou $A \times Y$), ale není měřitelná (plyne z Věty 8.2).

Důsledek 8.5 (Fubiniova věta pro zúplněnou součinovou míru)**.** *Buďte $(X,\mathcal{A},\mu)$ a $(Y,\mathcal{B},\nu)$ dva úplné prostory se σ-konečnými měrami. Pak pro každou funkci $f \in \mathcal{L}^*(\mu\hat{\otimes}\nu)$ platí:*

1. *funkce $f^y : x \mapsto f(x,y)$ je měřitelná na X pro s.v. $y \in Y$ a funkce $f_x : y \mapsto f(x,y)$ je měřitelná na Y pro s.v. $x \in X$*
2. *funkce $x \mapsto \int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y)$ je měřitelná na X a funkce $y \mapsto \int_X f(x,y)\,\mathrm{d}\mu(x)$ je měřitelná na Y*
3. $$\int_{X\times Y} f\, d(\mu\hat{\otimes}\nu) = \int_X \left(\int_Y f(x,y)\, d\nu(y)\right) d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f(x,y)\, d\mu(x)\right) d\nu(y).$$

Lemma 8.6. *Buď $(Z,\mathcal{C},\rho)$ prostor s mírou a $(Z,\mathcal{C}_0,\rho_o)$ jeho zúplnění. Je-li $f : (Z,\mathcal{C}_0) \to \mathbb{R}^*$ měřitelná, existuje $g : (Z,\mathcal{C}) \to \mathbb{R}^*$ měřitelná taková, že $f = g$ ρ-s.v.*

Důkaz. Pro jednoduché funkce plyne tvrzení hned z definice zúplnění prostoru s mírou (Věta 2.17).

Pro nezápornou $\mathcal{C}_0$-měřitelnou funkci najdeme monotonní posloupnost jednoduchých $\mathcal{C}_0$-měřitelných funkcí, která k ní bodově konverguje (Věta 3.13). Tu upravíme na množině nulové míry ρ na monotonní posloupnost jednoduchých $\mathcal{C}$-měřitelných funkcí. Jejich limita splňuje všechny požadavky věty.

Obecnou funkci rozložíme na kladnou a zápornou část. $\square$

Důkaz Důsledku 8.5. 1. Předpokládejme nejdříve, že $f = 0$ $\mu \otimes \nu$-s.v. Označme $E = \{f \neq 0\}$. Platí $\mu\hat{\otimes}\nu(E) = 0$ a tak existuje $F \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, $(\mu \otimes \nu)(F) = 0$ a $E \subset F$ (Věta 2.17). Na χ_F můžeme aplikovat Fubiniovu větu 8.4. Dostaneme

$$0 = \int_{X\times Y} \chi_F\, \mathrm{d}(\mu \otimes \nu) = \int_X \nu(F_x)\, \mathrm{d}\mu,$$

a tedy je pro μ s.v. $x \in X$ $\nu(F_x) = 0$, a protože je míra ν úplná také $\nu(E_x) = 0$, f_x je měřitelná a $\int_Y f_x\, \mathrm{d}\nu = 0$. Protože je míra μ úplná, je množina $\{x \in X; \int_Y f_x\, \mathrm{d}\nu \text{ existuje}\}$ měřitelná. Doplněk je totiž nulová (tedy měřitelná) množina. Tedy funkce $x \mapsto \int_Y f_x\, \mathrm{d}\nu$ je měřitelná. Zřejmě

$$0 = \int_{X\times Y} f\, \mathrm{d}(\mu\hat{\otimes}\nu) = \int_X (\int_Y f(x,y)\, \mathrm{d}\nu(y))\, \mathrm{d}\mu(x). \tag{1.5}$$

Tvrzení s prohozenými rolemi x a y se dokážou podobně.

2. Je-li $f \in \mathcal{L}^*(\mu \hat{\otimes} \nu)$, existuje podle Lemmatu 8.6 množina $N \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ a $g \in \mathcal{L}^*(\mu \hat{\otimes} \nu)$, že $(\mu \otimes \nu)(N) = 0$ a $f = g$ na N. Platí $f = f\chi_N + g - g\chi_N$ a $g, g\chi_N \in \mathcal{L}^*(\mu \hat{\otimes} \nu)$. Na $f\chi_N$ aplikujeme předchozí krok a z (1.5) dostaneme

$$0 = \int_{X \times Y} f\chi_N \,\mathrm{d}(\mu \hat{\otimes} \nu) = \int_X (\int_X f\chi_N \,\mathrm{d}\mu) \,\mathrm{d}\nu. \tag{1.6}$$

Na g a $g\chi_N$ lze aplikovat Větu 8.4. Protože se integrály zúplněním prostoru s mírou nemění, dostaneme

$$\int_{X \times Y} g \,\mathrm{d}(\mu \hat{\otimes} \nu) = \int_X (\int_X g \,\mathrm{d}\mu) \,\mathrm{d}\nu, \tag{1.7}$$

$$\int_{X \times Y} g\chi_N \,\mathrm{d}(\mu \hat{\otimes} \nu) = \int_X (\int_X g\chi_N \,\mathrm{d}\mu) \,\mathrm{d}\nu. \tag{1.8}$$

Sečtením (1.6)-(1.8) dostaneme tvrzení věty. Tvrzení s prohozenými rolemi x a y se dokážou podobně. □

....konec přednášky 13, 13.11.

Věta 8.7 (Součin Lebesgueových měr)**.** *Pro $p, q \in \mathbb{N}$ platí:*

(i) $\mathcal{B}^{p+q} = \mathcal{B}^p \otimes \mathcal{B}^q$,

(ii) $\lambda^{p+q}_{\mathcal{B}} = \lambda^p_{\mathcal{B}} \otimes \lambda^q_{\mathcal{B}}$.

Důkaz. (i). Každý otevřený $(p+q)$-kvádr je kartézským součinem otevřeného p-kvádru a otevřeného q-kvádru. Nechť $\mathcal{Q}^k$ značí systém všech otevřených k-kvádrů. Pak platí

$$\mathcal{B}^{p+q} = \sigma\{U \times V : U \in \mathcal{Q}^p,\, V \in \mathcal{Q}^q\} \subset \sigma\{A \times B : A \in \mathcal{B}^p,\, B \in \mathcal{B}^q\} = \mathcal{B}^p \otimes \mathcal{B}^q.$$

Pro druhou inkluzi stačí ukázat, že $A \times B \in \mathcal{B}^{p+q}$ kdykoliv $A \in \mathcal{B}^p$ a $B \in \mathcal{B}^q$. Označme

$$\mathcal{D}_1 := \{A \in \mathcal{B}^p : A \times V \in \mathcal{B}^{p+q} \text{ kdykoliv } V \in \mathcal{Q}^q\}.$$

Zřejmě $\mathcal{Q}^p \subset \mathcal{D}_1$ a snadno lze ukázat, že $\mathcal{D}_1$ je σ-algebra. Platí tedy $\mathcal{D}_1 = \mathcal{B}^p$. Dále označme

$$\mathcal{D}_2 := \{B \in \mathcal{B}^q : A \times B \in \mathcal{B}^{p+q} \text{ kdykoliv } A \in \mathcal{B}^p\}.$$

Platí $\mathcal{Q}_q \subset \mathcal{D}_2$ (protože $\mathcal{D}_1 = \mathcal{B}^p$) a $\mathcal{D}_2$ je opět σ-algebra, tudíž $\mathcal{D}_2 = \mathcal{B}^q$. σ-algebra $\mathcal{B}^{p+q}$ tedy obsahuje všechny měřitelné obdélníky v $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$, a musí tedy obsahovat i $\mathcal{B}^p \otimes \mathcal{B}^q$.

(ii). Míry $\lambda^{p+q}_{\mathcal{B}}$ a $\lambda^p_{\mathcal{B}} \otimes \lambda^q_{\mathcal{B}}$ se shodují na otevřených kvádrech z $\mathcal{Q}^{p+q}$. Systém $\mathcal{Q}^{p+q}$ je uzavřen na konečné průniky, generuje $\mathcal{B}^{p+q}$ a existuje posloupnost otevřených kvádrů $Q_i \nearrow \mathbb{R}^{p+q}$ konečné míry, tedy $\lambda^{p+q}_{\mathcal{B}}$ a $\lambda^p_{\mathcal{B}} \otimes \lambda^q_{\mathcal{B}}$ se shodují i na $\mathcal{B}^{p+q}$ podle Věty 7.5. □

V dalším budeme symbolem $\mathcal{L}^*(\mathbb{R}^k)$ zkráceně značit prostor $\mathcal{L}^*(\mathbb{R}^k, \mathcal{B}^k_0, \lambda^k)$.

Důsledek 8.8 (Fubiniova věta v $\mathbb{R}^{p+q}$)**.** *Pro každou funkci $f \in \mathcal{L}^*(\mathbb{R}^{p+q})$ platí*

$$\int_{\mathbb{R}^{p+q}} f(x,y)\, d(x,y) = \int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^q} f(x,y)\, dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}^q} \left(\int_{\mathbb{R}^p} f(x,y)\, dx \right) dy,$$

kde píšeme stručně $dx := d\lambda^p(x)$, $dy := d\lambda^q(y)$, $d(x,y) := d\lambda^{p+q}(x,y)$.

Důsledek 8.9. *Buďte $\pi_1 : (x,y) \mapsto x$ a $\pi_2 : (x,y) \mapsto y$ projekce, $A \in \mathcal{B}_0^{p+q}$. Platí*

$$\pi_1 A \in \mathcal{B}^p \implies \lambda^{p+q}(A) = \int_{\pi_1 A} \lambda^q(A_x)\, dx,$$
$$\pi_2 A \in \mathcal{B}^q \implies \lambda^{p+q}(A) = \int_{\pi_2 A} \lambda^p(A^y)\, dy.$$

Poznámka 8.10. *$\pi_1 A \in \mathcal{B}^p$ platí například pro $A \subset \mathbb{R}^{p+q}$ otevřenou — $\pi_1 A$ je pak také otevřená, nebo pro $A \subset \mathbb{R}^{p+q}$ kompaktní — $\pi_1 A$ je pak také kompaktní.*

$\pi_1 A$ je dokonce měřitelná pro každou borelovskou množinu $A \subset \mathbb{R}^{p+q}$, důkaz je ale mimo dosah této přednášky, viz [Cohn, 2013, Proposition 8.4.4.].

Důsledek 8.11. *Pro funkci $f \in \mathcal{L}^*(\mathbb{R}^{p+q})$ a množinu $A \in \mathcal{B}_0^{p+q}$ platí*

$$\int_A f(x,y)\, d(x,y) = \int_{\pi_1 A} \left(\int_{A_x} f(x,y)\, dy \right) dx = \int_{\pi_2 A} \left(\int_{A^y} f(x,y)\, dx \right) dy,$$

jsou-li $\pi_1 A$ a $\pi_2 A$ měřitelné.

Příklad: Pro jednotkovou kouli $B_1 = \{x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ v $\mathbb{R}^3$ dostáváme podle Důsledku 8.9

$$\lambda^3(B_1) = \int_{-1}^{1} \pi(1 - z^2)\, dz = \frac{4}{3}\pi.$$

9 Věta o substituci

Definice 9.1 (Obraz míry)**.** Buď $\varphi : (E, \mathcal{E}) \to (F, \mathcal{F})$ měřitelné zobrazení a μ míra na $(E, \mathcal{E})$. Pak množinová funkce

$$\varphi(\mu) : B \mapsto \mu(\varphi^{-1}(B)), \quad B \in \mathcal{F},$$

je míra na $(F, \mathcal{F})$ a nazýváme ji *obrazem míry* μ při zobrazení φ.

Věta 9.2 (o obrazu míry)**.** *Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ jsou prostory s mírou, φ je měřitelné zobrazení $(X, \mathcal{A})$ do $(Y, \mathcal{B})$ a $\nu = \varphi(\mu)$. Potom pro každou měřitelnou funkci u na Y je*

$$\int_Y u(y)\, d\nu(y) = \int_X u(\varphi(x))\, d\mu(x)$$

pokud aspoň jedna strana má smysl.

Důkaz. Důkaz je rutinní záležitost (přes charakteristické funkce, jednoduché funkce, ...). □

Příklad 9.3. *Nechť $X, Y = \mathbb{R}$, $\mathcal{A}, \mathcal{B} = \mathcal{B}^1$, $\varphi : X \to Y$ je na, má v každém bodě vlastní nenulovou derivaci, $\mu(E) = \int_E |\varphi'|\, \mathrm{d}\lambda^1$ pro $E \in \mathcal{B}^1$. Pak $\varphi(\mu) = \lambda^1_{\mathcal{B}}$. Navíc platí pro $f \in \mathcal{L}^*(\lambda^1_{\mathcal{B}})$*

$$\int_{\mathbb{R}} f\, \mathrm{d}\lambda^1 = \int_{\mathbb{R}} f\, \mathrm{d}\varphi(\mu) = \int_{\mathbb{R}} f \circ \varphi\, \mathrm{d}\mu = \int_{\mathbb{R}} f \circ \varphi |\varphi'|\, \mathrm{d}\lambda^1.$$

. . . . konec přednášky 14, 14.11.

Lemma 9.4. *Lebesgueova míra λ^n je translačně invariantní (tedy $\lambda^n(B + z) = \lambda^n(B)$ kdykoliv $B \in \mathcal{B}_0^n$ a $z \in \mathbb{R}^n$).*

Důkaz. Plyne to z věty o jednoznačnosti míry, neboť λ^n a míra $\mu(B) := \lambda^n(B+z)$, $B \in \mathcal{B}^n$, se shodují na otevřených kvádrech. $\square$

Věta 9.5. *Buď $X, Y = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{A}, \mathcal{B} = \mathcal{B}^n$, $L : X \to Y$ regulární lineární zobrazení.*

1. *Definujeme-li $\nu(A) = \lambda^n(L(A))$ pro $A \in \mathcal{B}^n$, je ν míra na $\mathcal{B}^n$ a platí $\nu = |\det \nabla L|\lambda^n$.*
2. *Pro $A \in \mathcal{A}$ definujeme míru $\mu(A) = |\det \nabla L|\lambda^n_{\mathcal{B}}(A)$. Pak platí $L(\mu) = \lambda^n_{\mathcal{B}}$ a pro $f \in \mathcal{L}^*(\lambda^n_{\mathcal{B}})$ platí*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \, \mathrm{d}\lambda^n = \int_{\mathbb{R}^n} f \circ L |\det \nabla L| \, \mathrm{d}\lambda^n. \tag{1.9}$$

Důkaz. 1. Každé lineární zobrazení mezi konečně rozměrnými prostory je spojité. Protože L je regulární, existuje (spojité) inverzní zobrazení L^{-1}. Tedy $L^{-1} : (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n) \mapsto (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$ je měřitelné a $\nu = L^{-1}(\lambda^n)$ je míra podle Věty 9.2.

Podle známé věty z lineární algebry [Barto and Tůma, 2019,] lze každé regulární lineární zobrazení $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ vyjádřit jako složení konečně mnoha "elementárních" lineárních zobrazení jednoho ze tří typů:

(i) $L_1 : (x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$ (tedy L_1 prohazuje i-tou a j-tou souřadnici vektoru);

(ii) $L_2 : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n + bx_1)$ $(b \in \mathbb{R})$ (L_2 přičte k n-té souřadnici b-násobek první souřadnice);

(iii) $L_3 : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_{n-1}, ax_n)$ $(a \neq 0)$ (L_3 vynásobí n-tou souřadnici nenulovým faktorem a).

Protože složené lineární zobrazení odpovídá součinu příslušných matic, a determinant součinu je součinem determinantu jednotlivých matic, stačí dokazovanou identitu ukázat pro případy $L = L_1, L_2$ a L_3.

Míry $\lambda^n L_1$ a λ^n se shodují na systému otevřených kvádrů. Podle věty o jednoznačnosti míry se tedy shodují i na Borelovské σ-algebře, a máme tedy $\lambda^n(L_1(A)) = \lambda^n(A) = |\det L_1|\lambda^n(A)$, $A \in \mathcal{B}^n$.

Podle Fubiniovy věty platí

$$\lambda^n(L_2(A)) = \int_{\Pi_{n-1}(A)} \lambda^1\left((L_2(A))_{(x_1,\ldots,x_{n-1})}\right) d(x_1, \ldots, x_{n-1}),$$

kde $\Pi_{n-1} : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_{n-1})$. Pro řez množiny $L_2(A)$ pak z tvaru L_2 dostáváme

$$(L_2(A))_{(x_1,\ldots,x_{n-1})} = A_{(x_1,\ldots,x_{n-1})} + bx_1,$$

a protože λ^1 je translačně invariantní a $\Pi_{n-1}(L_2(A)) = \Pi_{n-1}(A)$, máme

$$\lambda^n(L_2(A)) = \int_{\Pi_{n-1}(A)} \lambda^1\left(A_{(x_1,\ldots,x_{n-1})}\right) d(x_1, \ldots, x_{n-1}) = \lambda^n(A).$$

Jelikož $|\det L_2| = 1$, ověřili jsme tím rovnost pro L_2.

Míry λ^n a $\mu(A) := |a|^{-1}\lambda^n(L_3(A))$ se shodují na systému otevřených kvádrů, proto se shodují podle věty o jednoznačnosti i na borelovských množinách. Platí tedy $\lambda^n(L_3(A)) = |a|\lambda^n(A) = |\det L_3|\lambda^n(A)$. Tím je důkaz ukončen.

2. Pro $A \in \mathcal{B}^n_0$ je $L(\mu)(A) = \mu(L^{-1}(A)) = |\det \nabla L||\det \nabla L^{-1}|\lambda^n(A) = \lambda^n(A)$, podle předešlého bodu. Rovnost (1.9) plyne z Věty 9.2. $\square$

Důsledek 9.6 (Lebesgueova míra je izometricky invariantní)**.** *Je-li $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ izometrie (tzn. $\|S(x) - S(y)\| = \|x - y\|$, $x, y \in \mathbb{R}^n$), pak $\lambda^n(S(A)) = \lambda^n(A)$, $A \in \mathcal{B}^n$.*

Důkaz. Podle věty z lineární algebry lze každou izometrii v $\mathbb{R}^n$ zapsat ve tvaru

$$S : x \mapsto b + R(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

kde $b \in \mathbb{R}^n$ ("posunutí") a R je ortogonální lineární zobrazení (tzn. $R^T R = I$). Protože $|\det R| = 1$ a λ^n je translačně invariantní, dostáváme $\lambda^n(S(A)) = \lambda^n(A)$ z Věty 9.5. $\square$

Důsledek 9.7. *Je-li $W \subset \mathbb{R}^n$ afinní podprostor dimenze menší než n, platí $\lambda^n(W) = 0$.*

Důkaz. Plyne z faktu, že vhodné izometrické zobrazení zobrazí W na lineární podprostor generovaný prvními $k < n$ vektory kanonické báze $\mathbb{R}^n$. $\square$

Důsledek 9.8. *Věta 9.5 platí i bez předpokladu regularity zobrazení L.*

Důkaz. Je-li L singulární, je $L(\mathbb{R}^n)$ podprostor dimenze menší než n, a zároveň $\det L = 0$. $\square$

Důsledek 9.9 (Homogenita Lebesgueovy míry)**.**

$$\lambda^n(rA) = |r|^n \lambda^n(A), \quad r \in \mathbb{R},\ A \in \mathcal{B}^n.$$

Poznámka 9.10. *Věta 9.5, Důsledek 9.6, Důsledek 9.9 platí také pro $A \in \mathcal{B}^n_0$.*

Definice 9.11. Nechť $U \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená a $f : U \to \mathbb{R}^n$ zobrazení třídy C^1. Pak $\mathcal{J}f(x) := \det \nabla f(x)$ je *Jakobián funkce f v bodě x*, $x \in U$.

Definice 9.12. Nechť $U \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená. Zobrazení $f : U \to \mathbb{R}^n$ je *difeomorfismus*, je-li prosté, třídy C^1 a platí-li $\mathcal{J}f(x) \neq 0$, $x \in U$.

Pozn.: Z věty o inverzním zobrazení plyne, že je-li $f : U \to \mathbb{R}^n$ difeomorfismus, je obraz $f(U)$ otevřená množina a f^{-1} je třídy C^1 na $f(U)$.

Věta 9.13 (Věta o substituci)**.** *Buď $U \subset \mathbb{R}^n$ otevřená, $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ difeomorfismus a $f : \varphi(U) \to \mathbb{R}$ Lebesgueovsky měřitelná funkce. Pak*

$$\int_U f(\varphi(x))\, |\mathcal{J}\varphi(x)|\, dx = \int_{\varphi(U)} f(y)\, dy,$$

má-li jedna strana smysl.

Bez důkazu. $\square$

Důsledek 9.14. *Je-li navíc $B \subset \varphi(U)$ Lebesgueovsky měřitelná množina, platí*

$$\int_{\varphi^{-1}(B)} f(\varphi(x))\, |\mathcal{J}\varphi(x)|\, dx = \int_B f(y)\, dy,$$

má-li jedna strana smysl.

Příklad 9.15. *1. Zobrazení $\varphi : (r,t) \mapsto (r\cos t, r\sin t)$ je difeomorfismus na $U = (0,\infty) \times (-\pi,\pi)$, $\mathcal{J}\varphi(r,t) = r$ a platí $\lambda^2(\mathbb{R}^2 \setminus \varphi(U)) = 0$, proto*

$$\lambda^2(B) = \int_{\varphi^{-1}(B)} r\, d(r,t), \quad B \in \mathcal{B}^2_0.$$

2. Zobrazení $\varphi : (r,t,s) \mapsto (r\cos s\cos t, r\cos s\sin t, r\sin s)$ je difeomorfismus na $U = (0,\infty)\times(-\pi,\pi)\times(-\pi/2,\pi/2)$, $\mathcal{J}\varphi(r,t,s) = r^2\cos s$ a platí $\lambda^3(\mathbb{R}^3 \setminus \varphi(U)) = 0$, proto

$$\lambda^3(B) = \int_{\varphi^{-1}(B)} r^2 \cos s\, d(r,t,s), \quad B \in \mathcal{B}^3_0.$$

. . . . konec přednášky 15, 20.11.

10 Prostory L^p

V celé sekci je $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou.

Lemma. *Jsou-li $a, b \in [-\infty, \infty]$, $t_0 \in (a, b)$ a $\varphi : (a, b) \to \mathbb{R}$ konvexní funkce, pak existují $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $t \in (a, b) \setminus \{t_0\}$ je $\varphi(t) \geq \alpha t + \beta$ a $\varphi(t_0) = \alpha t_0 + \beta$. Je-li φ dokonce striktně konvexní na (a, b), je pro všechna $t \in (a, b) \setminus \{t_0\}$ dokonce $\varphi(t) > \alpha t + \beta$.*

Důkaz. Protože je φ konvexní platí pro $a < t < t_0 < s < b$

$$\psi(t) := \frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t - t_0} \leq \frac{\varphi(s) - \varphi(t_0)}{s - t_0}. \tag{1.10}$$

Volíme $\alpha := \sup_{t \in (a, t_0)} \psi(t) = \varphi'_-(t_0)$. Z (1.10) pak pro všechna $t \in (a, t_0)$ platí $\varphi(t) \geq \varphi(t_0) + \alpha(t - t_0)$ a pro $s \in (t_0, b)$ platí $\varphi(s) \geq \varphi(t_0) + \alpha(s - t_0)$. Stačí tedy volit $\beta = \varphi(t_0) - \alpha t_0$.

Je-li φ dokonce striktně konvexní, platí v (1.10) dokonce ostrá nerovnost, která se poté přenese do odhadu $\varphi(t) > \alpha t + \beta$ pro $t \in (a, b) \setminus \{t_0\}$. $\square$

Věta 10.1 (Jensenova nerovnost)**.** *Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je pravděpodobnostní prostor, $f \in L^1(\mu)$, $a, b \in [-\infty, \infty]$ a $f : X \to (a, b)$. Je-li $\varphi : (a, b) \to \mathbb{R}$ konvexní funkce, pak*

$$\varphi\Big(\int_X f \, d\mu\Big) \leq \int_X (\varphi \circ f) \, d\mu.$$

Je-li φ navíc striktně konvexní na (a, b), platí rovnost právě když $f = \int_X f \, \mathrm{d}\mu$ s.v. na X.

Důkaz. Označme $t_0 = \int_X f \, \mathrm{d}\mu \in (a, b)$. Z konvexity φ na (a, b) existují $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ taková, že pro $t \in (a, b)$ platí $\varphi(t) \geq \alpha t + \beta$ a pro $t = t_0$ platí rovnost (plyne z [Pick et al., 2019, 5.4.9 Lemma] a [Pick et al., 2019, 5.4.12. Věta]). Tedy také pro $x \in X$ platí $\varphi(f(x)) \geq \alpha f(x) + \beta$. Integrací poslední nerovnosti dostáváme

$$\int_X \varphi \circ f \, \mathrm{d}\mu \geq \alpha t_0 + \beta = \varphi(t_0) = \varphi(\int_X f \, \mathrm{d}\mu).$$

V poslední nerovnosti platí rovnost podle Věty 6.1 právě, když $\varphi(f(x)) = \alpha f(x) + \beta$ s.v. v X. Je-li φ striktně konvexní, platí $\varphi(t) = \alpha t + \beta$ právě pro $t = t_0$. Dostáváme, že rovnost platí, je-li $f(x) = \int_X f \, \mathrm{d}\mu$ pro s.v. $x \in X$. $\square$

Definice 10.2. *Pro $f : (X, \mathcal{A}, \mu) \to \mathbb{R}^*$ měřitelnou definujeme* $\operatorname{ess-sup}_X f = \inf\{\alpha \in \mathbb{R} : \mu\{x \in X : f(x) > \alpha\} = 0\}$ *a* $\operatorname{ess-inf}_X f = \sup\{\alpha \in \mathbb{R} : \mu\{x \in X : f(x) < \alpha\} = 0\}$.

Poznámka. *Platí $f \leq \operatorname{ess-sup}_X f$ s.v. v X. Opravdu, $\{f > \operatorname{ess-sup}_X f\} = \bigcup_{j=1}^{+\infty} \{f > \operatorname{ess-sup}_X f + 1/j\}$ a tvrzení plyne z definice* ess-sup *a σ-aditivity míry. Podobně platí také* $\operatorname{ess-inf}_X f \leq f$ *s.v. v X.*

Věta 10.3 (Hölderova nerovnost)**.** *Nechť $f, g : X \to [0, +\infty]$ jsou nezáporné měřitelné funkce, $1 < p, q < +\infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Pak*

1. $$\int_X fg \, \mathrm{d}\mu \leq (\int_X f^p \, \mathrm{d}\mu)^{\frac{1}{p}} (\int_X g^q \, \mathrm{d}\mu)^{\frac{1}{q}}.$$

   Je-li pravá strana konečná, platí rovnost právě, když existují $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, že alespoň jedno z nich je nenulové a $\alpha f^p = \beta g^q$ s.v. v X.

2. $$\int f(x) g(x) \, \mathrm{d}\mu(x) \leq \operatorname{ess-sup}_X g \int f(x) \, \mathrm{d}\mu(x).$$

   Je-li pravá strana konečná platí rovnost právě, když $g = \operatorname{ess-sup}_X g$ s.v. v $\{f > 0\}$.

Důkaz. 2. Nerovnost je jasná. Rovnost platí právě, když $g = \text{ess-sup}_X g$ s.v. v $\{f > 0\}$ (využije se Věty 6.1).

1. Dále předpokládejme, že $1 < p, q < \infty$.

Je-li jeden z integrálů vpravo nulový musí být buď $f = 0$ nebo $g = 0$ s.v. v X a platí dokonce rovnost. Je-li jeden z nich roven $+\infty$ a druhý kladný, nerovnost také platí.

Nechť jsou dále oba integrály vpravo konečné a nenulové. Označme $A = \{g > 0\}$ a $G = (\int_X g^q \,\mathrm{d}\mu)^{\frac{1}{q}}$ a počítejme

$$(\int_X fg \,\mathrm{d}\mu)^p = (\int_A fg \,\mathrm{d}\mu)^p = (\int_A fg^{1-q} \frac{g^q}{G^q} \,\mathrm{d}\mu)^p G^{pq} \leq \int_A f^p g^{p(1-q)} g^q \,\mathrm{d}\mu G^{pq-q} = \int_A f^p \,\mathrm{d}\mu G^p \leq \int_X f^p \,\mathrm{d}\mu G^p,$$

protože $\frac{g^q}{G^q} \,\mathrm{d}\mu$ je pravděpodobnostní míra na $\mathcal{A}$, $pq - p = q$ a $p(1-q) + q = 0$.

Rovnost platí pokud existuje $C \in [0, +\infty)$, že $fg^{1-q} = C$ s.v. v A a $f = 0$ s.v. v $X \setminus A$. To dohromady dává $f^p = C^p g^q$ s.v. v X. $\square$

Věta 10.4 (Minkowského nerovnost). *Je-li* $1 \leq p < \infty$ *a* $f, g : (X, \mathcal{A}, \mu) \to [0, +\infty)$ *nezáporné měřitelné, pak platí*

1.
$$(\int_X (f+g)^p \,\mathrm{d}\mu)^{\frac{1}{p}} \leq (\int_X f^p \,\mathrm{d}\mu)^{\frac{1}{p}} + (\int_X g^p \,\mathrm{d}\mu)^{\frac{1}{p}}.$$

2.
$$\text{ess-sup}_X (f+g) \leq \text{ess-sup}_X f + \text{ess-sup}_X g.$$

Důkaz. 2. Podle definice je $f \leq \text{ess-sup}_X f$ s.v. a $g \leq \text{ess-sup}_X g$ s.v., tedy $f + g \leq \text{ess-sup}_X f + \text{ess-sup}_X g$ s.v., z čehož plyne $\text{ess-sup}_X (f+g) \leq \text{ess-sup}_X f + \text{ess-sup}_X g$.

1. Je-li $p = 1$, platí zřejmě rovnost z linearity integrálu.

Nechť nyní $1 < p < \infty$. Položme $q := \frac{p}{p-1}$ (platí tedy $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$) a podle Hölderovy nerovnosti platí

$$\int_X f(f+g)^{p-1} \,\mathrm{d}\mu \leq (\int_X f^p \,\mathrm{d}\mu)^{\frac{1}{p}} (\int_X (f+g)^{q(p-1)} \,\mathrm{d}\mu)^{\frac{1}{q}},$$
$$\int_X g(f+g)^{p-1} \,\mathrm{d}\mu \leq (\int_X g^p \,\mathrm{d}\mu)^{\frac{1}{p}} (\int_X (f+g)^{q(p-1)} \,\mathrm{d}\mu)^{\frac{1}{q}}.$$

Sečtením obou nerovností a s využitím identity $q(p-1) = p$ dostaneme

$$\int_X (f+g)^p \,\mathrm{d}\mu \leq \left[(\int_X f^p \,\mathrm{d}\mu)^{\frac{1}{p}} + (\int_X g^p \,\mathrm{d}\mu)^{\frac{1}{p}} \right] (\int_X (f+g)^p \,\mathrm{d}\mu)^{\frac{1}{q}}.$$

Pokud $\int_X (f+g)^p \,\mathrm{d}\mu < +\infty$ dostáváme Minkowského nerovnost vzhledem k $1 - 1/q = 1/p$. Je-li $\int_X (f+g)^p \,\mathrm{d}\mu = +\infty$, musíme ještě ukázat, že $\int_X f^p \,\mathrm{d}\mu = +\infty$ nebo $\int_X g^p \,\mathrm{d}\mu = +\infty$. To dokážeme obměnou. Je-li $\int_X f^p \,\mathrm{d}\mu < +\infty$ i $\int_X g^p \,\mathrm{d}\mu < +\infty$ odhadujeme $\int_X (f+g)^p \,\mathrm{d}\mu \leq \int_X 2^p (f^p + g^p) \,\mathrm{d}\mu < +\infty$. $\square$

Lemma 10.5 (Youngovo lemma). *Je-li* $a, b \geq 0$ *a* $p, q > 1$ *takové, že* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, *pak*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Důkaz. Nechť $ab > 0$ jinak je nerovnost zřejmá). Protože logaritmus je konkávní funkce, platí

$$\log \left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \right) \geq \frac{1}{p} \log a^p + \frac{1}{q} \log b^q = \log a + \log b = \log(ab).$$

Z toho již plyne dokazovaná rovnost, neboť logaritmus je rostoucí funkce. $\square$

Dále bude značit $\mathbb{K}$ buď $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$, na $\mathbb{K}$ budeme vždy uvažovat příslušnou σ-algebru borelovských množin.

Definice 10.6. *Buď $(X,\mathcal{A},\mu)$ prostor s mírou a funkce $f:(X,\mathcal{A})\to\mathbb{K}$ měřitelná. Definujeme*

$$\begin{aligned}\|f\|_p &:= \left(\int_X |f|^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1\le p<\infty,\\ \|f\|_\infty &:= \text{ess-sup}_X |f|,\\ \mathcal{L}^p(X,\mathcal{A},\mu) &:= \{f:(X,\mathcal{A})\to\mathbb{K} : \|f\|_p<\infty\}, \quad 1\le p\le\infty.\end{aligned}$$

(Často budeme psát stručně pouze $\mathcal{L}^p(\mu)$ nebo $\mathcal{L}^p(X)$.)

Poznámka 10.7. *Ať $p\in[1,+\infty]$. $\mathcal{L}^p(\mu)$ je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$ a $\|\cdot\|_p$ je seminorma (tedy splňuje 1) pro $\alpha\in\mathbb{K}$ a $f\in\mathcal{L}^p(\mu)$ je $\|\alpha f\|_p=|\alpha|\|f\|_p$, 2) pro $f,g\in\mathcal{L}^p(\mu)$ platí $\|f+g\|_p\le\|f\|_p+\|g\|_p$, 3) $\|0\|_p=0$. Neplatí ale, že z $\|f\|_p=0$ plyne $f=0$ bodově všude). Abychom dostali normovaný lineární prostor, je potřeba upravit pojem rovnosti podle Věty 6.1.*

Platnost trojúhelníkové nerovnosti pro $\|\cdot\|_p$ plyne z trojúhelníkové nerovnosti pro $|\cdot|$ a Věty 10.4.

Definice 10.8. Nechť $1\le p\le\infty$. Na množině $\mathcal{L}^p(\mu)$ definujeme ekvivalenci

$$f\sim g \iff f=g\ \mu-\text{skoro všude}.$$

Dále klademe

$$L^p(\mu):=\mathcal{L}^p(\mu)\,|_\sim$$

(faktorprostor, formálně množina tříd ekvivalence $\sim$, více viz [Pick et al., 2019, A.0.36.]).

Věta 10.9. *Pro $1\le p\le\infty$ a $f,g\in\mathcal{L}^p(\mu)$ platí*

$$\|f-g\|_p=0 \iff f\sim g.$$

Důkaz. Plyne z Věty 6.1. □

Důsledek 10.10. *$(L^p(\mu),\|\cdot\|_p)$ je normovaný lineární prostor a je na něm definována přirozená metrika pomocí normy.*

Věta 10.11. *Ať $p\in[1,+\infty]$.*

1. *Prostor $L^p(\mu)$ je úplný.*
2. *Je-li $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}\subset\mathcal{L}^p(\mu)$ cauchyovská posloupnost v $L^p(\mu)$, existuje její podposloupnost $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{+\infty}$, která konverguje s.v. v X.*
3. *Je-li $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}\subset\mathcal{L}^p(\mu)$ cauchyovská posloupnost v $L^p(\mu)$, existuje její podposloupnost $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{+\infty}$, která má majorantu z $L^p(\mu)$, tj. existuje $g\in L^p(\mu)$ taková, že pro každé $k\in\mathbb{N}$ platí $|f_{n_k}|\le g$ s.v. v X.*

Důkaz. Důkaz pro $p=\infty$: Nechť nejprve $p=\infty$ a buď (f_n) cauchyovská posloupnost v $L^\infty(\mu)$ (přesněji řečeno, f_n jsou reprezentanti z příslušných tříd ekvivalence). Z cauchyovskosti plyne cauchyovskost posloupnosti $\{\|f_n\|_\infty$, a tedy i její omezenost. Označíme $K>0$ takové, které ji omezuje. Dále

$$(\forall k\in\mathbb{N})(\exists n_0(k))(\forall m,n\ge n_0(k)) : \|f_m-f_n\|_\infty<\frac{1}{k}.$$

Označme

$$N_k^{m,n}:=\{x\in X : |f_m(x)-f_n(x)|\ge\tfrac{1}{k}\}\cup\{|f_n|>K\}\cup\{|f_m|>K\}.$$

Podle výše uvedeného platí $\mu(N_k^{m,n}) = 0$ kdykoliv $m, n \geq n_0(k)$. Položme

$$N := \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{m,n \geq n_0(k)} N_k^{m,n}.$$

Zřejmě $\mu(N) = 0$. Dále na $X \setminus N$ je posloupnost $(f_n(x))$ stejnoměrně omezená ($|\cdot| \leq K$) a stejnoměrně cauchyovská (s hodnotami v $\mathbb{K}$), a tedy f_n stejnoměrně konverguje na $X \setminus N$ k jisté omezené funkci f. Ta musí být měřitelná (neboť je bodovou limitou měřitelných funkcí s.v.). Zřejmě $f_n \to f$ v $L^\infty(\mu)$, platí 2) a $g := K$ vyhovuje 3).

. . . . konec přednášky 17, 27.11.2019

Důkaz pro $p < \infty$: Nechť je (f_n) cauchyovská v $L^p(\mu)$. Z cauchyovskosti plyne cauchyovskost posloupnosti $\{\|f_n\|_p$, a tedy i její konvergence a omezenost. Navíc existuje vybraná podposloupnost $(g_j) \subset (f_n)$ taková, že

$$s := \sum_{j=1}^{\infty} \|g_j - g_{j+1}\|_p < \infty$$

(ke každému j najdeme n_j tak, aby $\|f_n - f_{n_j}\|_p < 2^{-j}$ kdykoliv $n \geq n_j$, a položíme $g_j = f_{n_j}$). Položme

$$h := \sum_{j=1}^{\infty} |g_j - g_{j+1}|.$$

S využitím Leviho věty (druhá rovnost) a Minkowského nerovnosti dostaneme

$$\begin{aligned} \int h^p \, d\mu &= \int \left(\sum_{j=1}^{\infty} |g_j - g_{j+1}| \right)^p d\mu = \lim_{n\to\infty} \int \left(\sum_{j=1}^{n} |g_j - g_{j+1}| \right)^p d\mu \\ &= \lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{j=1}^{n} |g_j - g_{j+1}| \right\|_p^p \leq \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{j=1}^{n} \|g_j - g_{j+1}\|_p \right)^p \leq s^p < \infty, \end{aligned}$$

tedy $h \in L^p(\mu)$ a platí $h < \infty$ μ-s.v. Pro množinu

$$M := \{x \in X : \, g_1(x) < \infty, \, h(x) < \infty\}$$

tedy platí $\mu(X \setminus M) = 0$ a pro každé $x \in M$ je posloupnost $(g_j(x))$ cauchyovská (v $\mathbb{K}$). Z úplnosti $\mathbb{K}$ tedy plyne existence $f(x) := \lim_{j\to\infty} g_j(x)$, $x \in M$. Dodefinujeme-li f nulou na $X \setminus M$, je měřitelná, a podle Fatouova lemmatu platí

$$\int |f|^p \, d\mu = \int \lim_{j\to\infty} |g_j|^p \, d\mu \leq \liminf_{j\to\infty} \int |g_j|^p \, d\mu < \infty$$

(konečnost plyne z toho, že každá cauchyovská posloupnost je omezená, tedy $\sup_n \|f_n\|_p < \infty$). Je tedy $f \in L^p(\mu)$. Ukážeme, že $f_n \to f$ v $L^p(\mu)$. Nechť je dáno $\varepsilon > 0$. Z Cauchyovy vlastnosti, že existuje n_0 takové, že $\|f_n - f_m\|_p < \varepsilon$ kdykoliv $m, n \geq n_0$. Opět s využitím Fatouova lemmatu máme

$$\|f_n - f\|_p^p = \int |f_n - f|^p \, d\mu \leq \liminf_{j\to\infty} \int |f_n - g_j|^p \, d\mu \leq \varepsilon^p$$

jakmile $n \geq n_0$. Posloupnost hledaná v 2) je $\{g_j\}$. Majoranta posloupnosti $\{g_j\}$ hledaná v 3) je funkce $h + |g_1|$. Tím je důkaz ukončen. □

Poznámka 10.12. *1. V případě $p < +\infty$ je v bodě 2) nutné vzít vybranou posloupnost. Jinak tvrzení neplatí. Opravdu, definujeme-li funkce $f_{2^N+k} = \chi_{[0,2^{-N})+k2^{-N}}$ pro $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $k \in \{0, \ldots, 2^N - 1\}$, platí $\|f_k\|_p \to 0$ pro $k \to +\infty$, ale posloupnosti $\{f_k(x)\}$ nekonvergují pro žádné $x \in [0, 1)$.*

2. V případě $p < +\infty$ je v bodě 3) nutné vzít vybranou posloupnost. Jinak tvrzení neplatí. Opravdu, definujeme-li funkce $f_{2^N+k} = N\chi_{[0,2^{-N})+k2^{-N}}$ pro $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $k \in \{0, \ldots, 2^N - 1\}$, platí $\|f_k\|_p \to 0$ pro $k \to +\infty$, ale posloupnosti $\{f_k(x)\}$ jsou neomezené pro všechna $x \in [0, 1)$.

3. Pokud $\{f_n\} \subset \mathcal{L}^p(\mu)$, $f_n \to f$ μ-s.v., $g \in \mathcal{L}^p(\mu)$, $|f_n| \leq g$ μ-s.v., je $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$ a $f_n \to f$ v $L^p(\mu)$.

11 Konvergence posloupností funkcí

V této kapitole je $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou.

Rekapitulace: Pro funkce $f_n, f : X \to \mathbb{K}$ definované na neprázdné množině X máme konvergenci *bodovou* ($f_n \to f$) a *stejnoměrnou* ($f_n \rightrightarrows f$). Je-li speciálně $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou, máme navíc konvergenci *skoro všude* ($f_n \to f$ s.v.) a L^p*-konvergenci* ($f_n \xrightarrow{L_p} f \iff \|f_n - f\|_p \to 0$), $1 \le p \le \infty$.

Definice 11.1. Buď $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou a $f_n, f : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{K}$ měřitelné funkce, $n \in \mathbb{N}$. Řekneme, že *funkce f_n konvergují k funkci f podle míry μ* (píšeme $f_n \xrightarrow{\mu} f$), jestliže

$$\forall \varepsilon > 0 : \quad \lim_{n\to\infty} \mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \ge \varepsilon\}) = 0.$$

Věta 11.2. *Ať $\{f_n\} \subset \mathcal{L}^\infty(\mu)$. Je-li $f_n \rightrightarrows f$ na X, platí $f_n \to f$ v $L^\infty(\mu)$.*

Důkaz. Důkaz je zřejmý z definic. □

Poznámka. *V důkazu Věty 10.11 jsme viděli, že platí také: Je-li $f_n \to f$ v $L^\infty(\mu)$, existuje $N \in \mathcal{A}$, že $\mu(N) = 0$ a platí $f_n \rightrightarrows f$ na $X \setminus N$.*

Definice 11.3. *Pro $f : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}$ měřitelnou, $A \in \mathcal{A}$ značíme*

$$\fint_A f \, d\mu := \frac{1}{\mu(A)} \int_A f \, d\mu,$$

má-li pravá strana smysl.

Lemma 11.4. *Nechť $0 < \mu(X) < \infty$ a $1 \le p < q < \infty$, $f : (X, \mathcal{A}) \to [0, +\infty)$ měřitelná. Pak platí*

$$\left(\fint_X f^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\fint_X f^q \, d\mu\right)^{\frac{1}{q}} \le \text{ess-sup}_X f.$$

Důkaz.

$$\left(\fint_X f^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = (\int_X f^p \frac{1}{\mu(X)} \, d\mu)^{\frac{q}{p}\frac{1}{q}} \le (\int_X f^{p\frac{q}{p}} \frac{1}{\mu(X)} \, d\mu)^{\frac{1}{q}} \le \left(\fint_X f^q \, d\mu\right)^{\frac{1}{q}} \le \text{ess-sup}_X f.$$

Druhá nerovnost plyne z Jensenovy nerovnosti, jelikož funkce $t \to t^{\frac{q}{p}}$ je konvexní a $\nu(A) := \int_A d\mu/\mu(X)$, pro $A \in \mathcal{A}$ je pravděpodobnostní míra. Poslední nerovnost dostáváme z nerovnosti $0 \le f \le \text{ess-sup}_X f$ μ s.v. □

Cvičení. *Dokažte předchozí lemma pomocí Hölderovy nerovnosti.*

.... konec přednášky 18, 28.11.2019

Věta 11.5. *Nechť $\mu(X) < \infty$ a $1 \le p < q \le \infty$. Pak $L^q(\mu) \subset L^p(\mu)$ a pro $f_n, f \in L^q(\mu)$ platí:*

$$f_n \xrightarrow{L^q} f \implies f_n \xrightarrow{L^p} f.$$

Důkaz. Pro $\mu(X) = 0$ je tvrzení zřejmé. Ať dále $\mu(X) > 0$. Je-li f měřitelná, $q < +\infty$ platí z Jensenovy nerovnosti vzhledem ke konvexitě funkce $t \to t^{\frac{q}{p}}$

$$\mu(X)^{-\frac{1}{p}} \|f\|_p = (\fint_X |f|^p \, d\mu)^{\frac{1}{p}} = (\fint_X |f|^p \, d\mu)^{\frac{q}{p}\frac{1}{q}} \le (\fint_X |f|^q \, d\mu)^{\frac{1}{q}} = \mu(X)^{-\frac{1}{q}} \|f\|_q,$$

a pro $q = +\infty$

$$(\fint_X |f|^p \, d\mu)^{\frac{1}{p}} \le \|f\|_\infty.$$

Zřejmě je tedy $L^q(\mu) \subset L^p(\mu)$. Z $\|f_n - f\|_q \to 0$ plyne podle Věty o strážnících $\|f_n - f\|_p \to 0$. □

Příklad: $f(x) = x^{-\frac{1}{2}}$ leží v $L^1(0,1)$, ale nikoliv v $L^2(0,1)$. Ale pozor, funkce $f(x) = x^{-1}$ leží v $L^2(1,\infty)$, ale nikoliv v $L^1(1,\infty)$.

Věta 11.6 (Čebyševova nerovnost)**.** *Nechť* $1 \le p < \infty$, $f \in L^p(\mu)$ *a* $c > 0$*. Pak*

$$\mu(\{x \in X : |f(x)| \ge c\}) \le \frac{\|f\|_p^p}{c^p}.$$

Důkaz. Platí

$$\mu\{|f| \ge c\} = \int_{\{|f|\ge c\}} 1\, d\mu \le \int_{\{|f|\ge c\}} \left(\frac{|f|}{c}\right)^p d\mu \le \int_X \left(\frac{|f|}{c}\right)^p d\mu = \frac{\|f\|_p^p}{c^p}.$$

□

Věta 11.7. *Pro* $1 \le p \le \infty$ *a* $f_n, f \in L^p(\mu)$ *platí:*

$$f_n \xrightarrow{L^p} f \implies f_n \xrightarrow{\mu} f.$$

Důkaz. Je-li $p = \infty$ a $\varepsilon > 0$, pak existuje n_0 takové, že $\|f_n - f\|_\infty < \varepsilon$, a tedy $\mu\{|f_n - f| \ge \varepsilon\} = 0$, pro $n > n_0$.

Je-li $p < \infty$, plyne tvrzení přímo z Čebyševovy nerovnosti. □

Věta 11.8. *Jestliže* $f_n \xrightarrow{\mu} f$*, pak existuje vybraná podposloupnost* (f_{n_j}) *taková, že* $f_{n_j} \to f$ μ*-s.v.*

Důkaz. Ke každému $j \in \mathbb{N}$ existuje $n_j \in \mathbb{N}$ takové, že $\mu\{|f_n - f| \ge 2^{-j}\} < 2^{-j}$ kdykoliv $n \ge n_j$. Položme

$$A_j := \{x \in X : |f_{n_j}(x) - f(x)| > 2^{-j}\}, \quad A := \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=k}^{\infty} A_j.$$

Platí

$$\mu(A) \le \sum_{j=k}^{\infty} \mu(A_j) \le \sum_{j=k}^{\infty} 2^{-j} = 2^{1-k},\ k \in \mathbb{N},$$

tedy $\mu(A) = 0$. Přitom $f_{n_j}(x) \to f(x)$, $j \to \infty$, kdykoliv $x \in X \setminus A$. □

Poznámka. *Jsou-li* $f_n : X \to \mathbb{K}$ *měřitelné, platí-li* $f_n \to f$ μ*-s.v. a* $|f_n| \le g$, $n \in \mathbb{N}$*, pro nějakou funkci* $g \in L^p(\mu)$, $p \in [1, +\infty)$*, pak podle Lebesgueovy věty (Věta 4.13) platí* $f_n \xrightarrow{L^p} f$.

Věta 11.9 (Jegorov)**.** *Nechť* $\mu(X) < \infty$, f_n, f *jsou měřitelné funkce na* X, $f_n \to f$ μ*-s.v., a* $\varepsilon > 0$*. Pak existuje* $E \in \mathcal{A}$ *taková, že* $\mu(E) < \varepsilon$ *a* $f_n \rightrightarrows f$ *na* $X \setminus E$.

Důkaz. Můžeme předpokládat, že $f = 0$. Jinak důkaz aplikujeme na funkce $f_n - f$.

Zvolme $\varepsilon > 0$. Označme

$$E_k^j = \bigcup_{i \ge j} \{|f_i| \ge 1/k\}.$$

Potom

$$\lim_j \mu(E_k^j) = \mu\Big(\bigcap_j E_k^j\Big) = 0$$

(zde jsme využili, že $\mu(X) < \infty$), a proto existuje $j(k) \in \mathbb{N}$ tak, že

$$\mu(E_k^{j(k)}) < 2^{-k}\varepsilon.$$

Položme $G = \bigcup_k E_k^{j(k)}$. Potom $\mu(G) < \varepsilon$. Je-li dáno přirozené k, potom $X \setminus G \subset X \setminus E_k^{j(k)}$. Je-li $i \ge j(k)$ a $x \in X \setminus G$, potom $|f_i(x)| < 1/k$. Tedy $f_n \rightrightarrows 0$ na $X \setminus G$. □

Důsledek 11.10. *Jestliže $\mu(X) < \infty$ a f_n, f jsou měřitelné funkce na X takové, že $f_n \to f$ μ-s.v., pak $f_n \xrightarrow{\mu} f$.*

Důkaz. Pro $\varepsilon, \delta > 0$ platí

$$\mu\{|f_n - f| \geq \delta\} = \mu(\{|f_n - f| \geq \delta\} \cap E) + \mu(\{|f_n - f| \geq \delta\} \setminus E),$$

kde E je množina z Jegorovovy věty. První sčítanec je pak menší než ε a druhý je roven nule pro dostatečně velká n. □

Poznámka 11.11. *Funkce $f_n = \chi_{[n,\infty)}$ konvergují bodově k nule, ale nikoliv podle míry λ^1. Předpoklad konečnosti míry je tedy v Jegorovově větě nutný.*

12 Radonova-Nikodymova věta

Důsledek (Opakování Důsledku 4.17)**.** *Buď $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou a $f \geq 0$ měřitelná funkce na X. Pak předpis*

$$\nu : A \mapsto \int_A f \, d\mu, \quad A \in \mathcal{A},$$

definuje míru na $(X, \mathcal{A})$ a pro každou měřitelnou funkci g na X platí

$$\int_X g \, d\nu = \int_X gf \, d\mu,$$

má-li jedna strana smysl.

Poznámka. *Zřejmě platí: $\mu(A) = 0 \implies \nu(A) = 0$, $A \in \mathcal{A}$.*

Definice 12.1. *Buďte μ, ν dvě míry na $(X, \mathcal{A})$. Řekneme, že míra ν je absolutně spojitá vzhledem k míře μ (píšeme $\nu \ll \mu$), jestliže*

$$\forall A \in \mathcal{A} : \mu(A) = 0 \implies \nu(A) = 0.$$

Věta 12.2. *Buďte μ, ν dvě konečné míry na $(X, \mathcal{A})$. Pak $\nu \ll \mu$ právě tehdy, když*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall A \in \mathcal{A}) : \mu(A) < \delta \implies \nu(A) < \varepsilon.$$

Důkaz. Implikace $\Longleftarrow$ je snadno vidět. Ukážeme opačnou implikaci. Nechť tedy $\nu \ll \mu$ a předpokládejme pro spor, že neplatí uvedený výrok, tedy že

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists A \in \mathcal{A}) : \; \mu(A) < \delta, \, \nu(A) \geq \varepsilon.$$

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ tedy existuje množina $A_n \in \mathcal{A}$ taková, že $\mu(A_n) < 2^{-n}$, ale $\nu(A_n) \geq \varepsilon$.

Položme $B_k := \bigcup_{n=k+1}^{\infty} A_n$. Pak $B_k \searrow \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k$, $\mu(B_1), \nu(B_1) < +\infty$, $\mu(B_k) \leq 2^{-k}$, $\nu(B_k) \geq \varepsilon$. Podle Věty o spojitosti míry 2.13 a Věty o strážnících dostáváme, že

$$\mu(\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k) = \lim_{k \to +\infty} \mu(B_k) = 0, \quad \nu(\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k) = \lim_{k \to +\infty} \nu(B_k) \geq \varepsilon,$$

což je spor s absolutní spojitostí ν vzhledem k μ. □

Věta 12.3 (Radon-Nikodym baby verze)**.** *Buďte μ, ν dvě konečné míry na $(X, \mathcal{A})$ takové, že $\nu(A) \leq \mu(A)$ pro všechny $A \in \mathcal{A}$. Pak existuje měřitelná funkce f na X splňující $0 \leq f \leq 1$ μ-s.v. a*

$$\nu(A) = \int_A f \, d\mu, \quad A \in \mathcal{A}.$$

Důkaz. Označme funkcionál
$$\mathcal{J}g := \int_X g^2\,d\mu - 2\int_X g\,d\nu, \quad \text{pro } g \in L^2(\mu).$$
Zde je $L^2(\mu)$ prostor reálný. Funkcionál je dobře definován, protože $L^2(\mu) \subset L^1(\mu) \subset L^1(\nu)$. Pro $g : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}$ měřitelnou totiž platí $\int_X |g|\,\mathrm{d}\nu \le \int_X |g|\,\mathrm{d}\mu$. Dále označme $c := \inf\{\mathcal{J}g : g \in L^2(\mu)\}$. Platí
$$\mathcal{J}g \ge \int_X g^2\,d\mu - 2\int_X |g|\,d\mu = \int (|g|-1)^2\,d\mu - \mu(X) \ge -\mu(X),$$
tedy $c \ge -\mu(X) > -\infty$. Našim cílem je ukázat, že existuje $f \in L^2(\mu)$ taková, že $J(f) = c$. To bude hledaná funkce.

Skutečně, předpokládejme chvíli, že máme $f \in L^2(\mu)$ takové, že $J(f) = c$.

1. Pro $A \in \mathcal{A}$ a $t \in \mathbb{R}$ definujeme funkci $g(t) = J(f + t\chi_A)$. Funkce g má minimum v bodě $t = 0$, a tedy pokud existuje v tomto bodě derivace, je $g'(0) = 0$. Počítejme
$$\begin{aligned} 0 = g'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{J(f+h\chi_A) - J(f)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\Big(\int_X 2fh\chi_A + h^2\chi_A\,\mathrm{d}\mu - 2\int_X h\chi_A\,\mathrm{d}\nu\Big) \\ &= \lim_{h\to 0} \int_X 2f\chi_A + h\chi_A\,\mathrm{d}\mu - 2\int_X \chi_A\,\mathrm{d}\nu\Big) = 2\Big(\int_A f\,\mathrm{d}\mu - \nu(A)\Big). \quad (1.11)\end{aligned}$$
Tedy $\int_A f\,\mathrm{d}\mu = \nu(A)$.

....konec přednášky 20, 5.12.2019

2. Platí
$$\begin{aligned} 0 \le \int (f-1)^+\,d\mu &= \int_{\{f>1\}} (f-1)\,d\mu = \int_{\{f>1\}} f\,d\mu - \int_{\{f>1\}} 1\,d\mu \\ &= \nu(\{f>1\}) - \mu(\{f>1\}) \le 0, \end{aligned}$$
tedy $(f-1)^+ = 0$ μ-s.v., neboli $f \le 1$ μ-s.v. Podobně platí
$$0 \le \int f^-\,d\mu = -\int_{\{f<0\}} f\,d\mu = -\nu(\{f<0\}) \le 0,$$
tedy $f^- = 0$ μ-s.v., což znamená, že $f \ge 0$ μ-s.v. Tedy $0 \le f \le 1$ μ-s.v.

Zbývá ukázat existenci takového f. Buď $(f_n) \subset L^2(\mu)$ posloupnost taková, že $\mathcal{J}f_n \to c$. Ukážeme, že (f_n) je cauchyovská v $L^2(\mu)$.

V prostoru se skalárním součinem platí rovnoběžníkové pravidlo:
$$\forall f, g \in L^2(\mu) : \|f+g\|_2^2 + \|f-g\|_2^2 = 2(\|f\|_2^2 + \|g\|_2^2).$$

Je tedy pro $n, m \in \mathbb{N}$
$$\|f_m - f_n\|_2^2 = 2\,(\mathcal{J}f_m + \mathcal{J}f_n) - (\|f_m + f_n\|_2^2 - 4\int_X f_m + f_n\,\mathrm{d}\nu) = 2\,(\mathcal{J}f_m + \mathcal{J}f_n) - 4\mathcal{J}(\frac{f_m+f_n}{2}).$$

Vždy platí $-4\mathcal{J}(\frac{f_m+f_n}{2}) \le -4c$ a pro pevné $\epsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n, m > n_0$ je $2\,(\mathcal{J}f_m + \mathcal{J}f_n) < 4c + \epsilon$. Dostáváme, že posloupnost $\{f_n\}$ je cauchyovská v $L^2(\mu)$, a tedy konvergentní v $L^2(\mu)$. Limitu označíme f. Je potřeba ukázat, že $\mathcal{J}f = c$.

Platí
$$|\|f_n\|_2 - \|f\|_2| \le \|f_n - f\|_2 \to 0 \quad \text{a} \quad |\int (f_n - f)\,\mathrm{d}\nu| \le \|f_n - f\|_{L^1(\nu)} \to 0.$$
Tedy $\mathcal{J}f_n \to \mathcal{J}f$ a $\mathcal{J}f = c$. □

Věta 12.4 (Radon-Nikodym)**.** *Buďte μ, ν dvě σ-konečné míry na $(X, \mathcal{A})$ takové, že $\nu \ll \mu$. Pak existuje nezáporná měřitelná funkce f na X taková, že*

$$\nu(A) = \int_A f\,d\mu, \quad A \in \mathcal{A}.$$

Definice 12.5. Funkci f z předchozí věty nazýváme (Radonovou-Nikodymovou) *hustotou/derivací* míry ν vzhledem k μ a píšeme

$$f(x) = \frac{d\nu}{d\mu}(x), \quad x \in X.$$

Důkaz Radon-Nikodymovy věty: Nechť nejprve μ, ν jsou konečné míry na $(X, \mathcal{A})$, $\nu \ll \mu$. Použijeme Tvrzení 12.3 pro míry $\nu \le \mu + \nu$. Existuje tedy měřitelná funkce h, $0 \le h \le 1$, taková, že

$$\nu(A) = \int_A h\,d(\mu+\nu) = \int_A h\,d\mu + \int_A h\,d\nu, \quad A \in \mathcal{A}. \tag{1.12}$$

Speciálně dostaneme

$$\nu\{h=1\} = \int_{\{h=1\}} h\,d(\mu+\nu) = \mu\{h=1\} + \nu\{h=1\},$$

tedy $\mu\{h=1\} = 0$, a protože $\nu \ll \mu$, také $\nu\{h=1\} = 0$. Platí tedy $h < 1$ $(\mu+\nu)$-s.v.

Jednoduchou úpravou rovnosti (1.12) dostaneme pro každou $A \in \mathcal{A}$ a $g = \chi_A$

$$\int_X g(1-h)\,\mathrm{d}\nu = \int_X gh\,\mathrm{d}\mu. \tag{1.13}$$

Z linearity integrálu plyne, že (1.13) platí také pro všechny jednoduché nezáporné měřitelné funkce g a pomocí Leviho věty ukážeme, že platí pro každou nezápornou měřitelnou g.

Volbou $g := \frac{1}{1-h}\chi_A$ pro $A \in \mathcal{A}$ dostaneme

$$\nu(A) = \int_A \frac{h}{1-h}\,\mathrm{d}\mu,$$

tedy $f = \frac{h}{1-h}$ je hledaná hustota $\frac{d\nu}{d\mu}$.

Jsou-li μ, ν σ-konečné, existují po dvou disjunktní měřitelné množiny E_i takové, že $X = \bigcup_i E_i$, $\mu(E_i) < \infty$, $\nu(E_i) < \infty$, $i \in \mathbb{N}$. Pro konečné restrikce $\nu|E_i \ll \mu|E_i$ najdeme hustoty f_i na E_i, a výslednou hustotu sestrojíme jako

$$f(x) := f_i(x), \quad x \in E_i, \quad i = 1, 2, \ldots.$$

□

Poznámka. *Hustota $f = \frac{d\mu}{d\nu}$ je určena jednoznačně modulo ekvivalence $\sim$. (Cvičení)*

Definice 12.6. *Jsou-li μ, ν míry na $(X, \mathcal{A})$, $\lambda \in \mathbb{K}$ definujeme pro $A \in \mathcal{A}$*

$$(\mu+\nu)(A) = \mu(A) + \nu(A), \quad (\lambda\mu)(A) = \lambda\mu(A).$$

Poznámka. *$\mu + \nu$ je míra na $(X, \mathcal{A})$. Pokud $\lambda \ge 0$, je $\lambda\mu$ míra na $(X, \mathcal{A})$. Je-li g nezáporná měřitelná funkce a $\lambda \ge 0$, je*

$$\int_X g\,\mathrm{d}(\mu+\nu) = \int_X g\,\mathrm{d}\mu + \int_X g\,\mathrm{d}\nu, \quad \int_X g\,\mathrm{d}(\lambda\mu) = \lambda \int_X g\,\mathrm{d}\mu.$$

.... konec přednášky 21, 11.12.2019

Definice 12.7. Řekneme, že dvě míry μ, ν na měřitelném prostoru $(X, \mathcal{A})$ jsou *vzájemně singulární* (píšeme $\mu \perp \nu$), jestliže existuje množina $S \in \mathcal{A}$ taková, že $\mu(S) = 0$ a $\nu(X \setminus S) = 0$.

Příklad 12.8. *Všechny uvedené míry uvažujeme na měřitelném prostoru* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}^1)$.

1. *Je-li* $x \neq y$*, pak pro Diracovy míry platí* $\delta_x \perp \delta_y$.
2. $\lambda^1 \perp \delta_x$ *pro každý* $x \in \mathbb{R}$.
3. $\lambda^1 \perp \mu$*, kde* μ *je aritmetická míra na množině celých čísel.*

Věta 12.9 (Rozklad míry na absolutně spojitou a singulární část - Lebesgueův rozklad)**.** *Buďte* μ, ν *dvě* σ*-konečné míry na měřitelném prostoru* $(X, \mathcal{A})$*. Pak existuje rozklad* $\nu = \nu_a + \nu_s$ *na* σ*-konečné míry* ν_a, ν_s *takový, že* $\nu_a \ll \mu$ *a* $\nu_s \perp \mu$*. Míry* ν_a *a* ν_s *jsou jednoznačně určeny.*

Pozn.: Míra ν_a se nazývá *absolutně spojitá část* a míra ν_s *singulární část* míry ν vzhledem k μ.

Důkaz. Použijeme Větu 12.4 na σ-konečné míry μ a $\mu + \nu$. Zřejmě platí $\mu \ll \mu + \nu$. Buď $f_\mu := \frac{d\mu}{d(\mu+\nu)}$ Radonova-Nikodýmova hustota. Označme $A := \{f_\mu > 0\}$ a $B := \{f_\mu = 0\}$. Platí $X = A \cup B$ a $A \cap B = \emptyset$. Položme

$$\nu_a(\cdot) := \nu(\cdot \cap A), \qquad \nu_s(\cdot) := \nu(\cdot \cap B).$$

Zřejmě ν_a a ν_s jsou σ-konečné míry na $(X, \mathcal{A})$ a $\nu = \nu_a + \nu_s$.

Platí $\nu_s(A) = 0$ a $\mu(B) = 0$, tedy $\nu_s \perp \mu$.

Pokud $\mu(E) = 0$ pro nějakou měřitelnou množinu E, pak

$$0 = \mu(E) = \int_E f_\mu \, d(\mu + \nu),$$

tedy $f_\mu = 0$ ν-s.v. na E, což znamená, $\nu(E \cap A) = 0$ (podle definice A), tedy $\nu_a(E) = 0$. Je tedy $\nu_a \ll \mu$.

Ukážeme ještě jednoznačnost rozkladu. Nechť $\nu = \nu_a' + \nu_s'$ je jiný rozklad takový, že $\nu_a' \ll \mu$ a $\nu_s' \perp \mu$. Ukážeme, že

$$\nu_s'(A) = 0 = \nu_a'(B). \tag{1.14}$$

Protože $\nu_s' \perp \mu$, existuje měřitelná množina S taková, že $\mu(S) = 0$ a $\nu_s'(X \setminus S) = 0$. Pak

$$0 = \mu(S \cap A) = \int_{S \cap A} f_\mu \, d(\mu + \nu).$$

Protože $f_\mu > 0$ na A, musí být $0 = (\mu + \nu)(S \cap A) = (\mu + \nu_s' + \nu_a')(S \cap A)$. Jelikož jsou ν_s', ν_a' a μ míry, dostáváme $\nu_s'(S \cap A) = 0$. Jest ovšem $\nu_s'(A) = \nu_s'(S \cap A) = 0$.

Dále (z definice B) platí $\mu(B) = 0$ a $\nu_a' \ll \mu$, tedy i $\nu_a'(B) = 0$. Tím je (1.14) ověřeno.

Pro každou $E \in \mathcal{A}$ platí podle (1.14)

$$\begin{aligned} \nu_s'(E) &= \nu_s'(E \cap B) = \nu_s'(E \cap B) + \nu_a'(E \cap B) = \nu(E \cap B) = \nu_s(E), \\ \nu_a'(E) &= \nu_a'(E \cap A) = \nu_a'(E \cap A) + \nu_s'(E \cap A) = \nu(E \cap A) = \nu_a(E) \end{aligned}$$

a důkaz je ukončen. □

13 Znaménkové a komplexní míry

Definice 13.1 (Znaménková míra, komplexní míra)**.** *Nechť $(X, \mathcal{A})$ je měřitelný prostor. Množinová funkce $\nu : \mathcal{A} \to \mathbb{K}$ se nazývá znaménková míra ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$) na $(X, \mathcal{A})$ nebo komplexní míra ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$) na $(X, \mathcal{A})$, jestliže splňuje*

1. *$\nu(\emptyset) = 0$,*
2. *jestliže $A_j \in \mathcal{A}$, $j = 1, 2, \ldots$, jsou po dvou disjunktní, potom*

$$\nu\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\Big) = \sum_{j=1}^{\infty} \nu(A_j).$$

Znaménkové a komplexní míry budeme v tomto textu souhrnně nazývat vektorové míry.

Poznámka. *Řada se chápe ve smyslu konvergence částečných součtů v normě prostoru $\mathbb{K}$. Výraz v poslední rovnosti vlevo nezávisí na pořadí množin A_j, řada vpravo je tedy absolutně konvergentní. Pro znaménkovou míru se někdy používá termín náboj, nebo reálná míra. Oproti míře, znaménková míra může nabývat i záporných hodnot, ale nesmí nabývat hodnot $+\infty$, $-\infty$.*

Omezení na konečné hodnoty vylučuje Lebesgueovu míru nebo některé množinové funkce, které lze získat jako rozdíly nezáporných měr. Lze uvažovat zobecnění znaménkových měr, které zahrne i tyto případy, ale zde se tím nebudeme zabývat.

Systém všech znaménkových nebo komplexních měr tvoří vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{K}$ se sčítáním a násobením skalárem definovaným v Definici 12.6.

Příklad. *(a) Každá konečná míra je znaménková míra. Každá znaménková míra je komplexní míra.*

(b) Je-li $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu)$, pak

$$E \mapsto \int_E f \, d\mu, \qquad E \in \mathcal{A}$$

je znaménková míra na $(X, \mathcal{A})$.

(c) Jsou-li μ, ν konečné míry na $(X, \mathcal{A})$, pak $\mu - \nu$ je znaménková míra na $(X, \mathcal{A})$.

Definice 13.2 (Variace komplexní míry)**.** *Nechť $(X, \mathcal{A})$ je měřitelný prostor a ν je komplexní míra na $\mathcal{A}$. Pro $E \in \mathcal{A}$ definujme*

$$|\nu|(E) = \sup\Big\{\sum_j |\nu(E_j)| : \ E_j \in \mathcal{A} \text{ jsou po dvou disjunktní, } \bigcup_j E_j \subset E\Big\}.$$

Množinová funkce $|\nu|$ se nazývá variace komplexní míry ν.

Poznámka. *Pro každou komplexní míru μ na $(X, \mathcal{A})$ a $A \in \mathcal{A}$ platí $|\mu(A)| \leq |\mu|(A)$.*

Věta 13.3 (Variace míry je konečná míra)**.** *Nechť $(X, \mathcal{A})$ je měřitelný prostor. Nechť $\nu : \mathcal{A} \to \mathbb{K}$ je komplexní míra na $\mathcal{A}$. Potom $|\nu|$ je konečná míra na $\mathcal{A}$.*

.... konec přednášky 22, 12.12.2019

Bez důkazu. □

Definice 13.4. *Buď $(X,\mathcal{A})$ měřitelný prostor. Označme $\mathcal{M}(X,\mathcal{A};\mathbb{R}) = \{\mu; \mu$ je znaménková míra na $(X,\mathcal{A})\}$ a $\mathcal{M}(X,\mathcal{A};\mathbb{C}) = \{\mu; \mu$ je komplexní míra na $(X,\mathcal{A})\}$. Na množinách $\mathcal{M}(X,\mathcal{A};\mathbb{K})$ jsou definovány operace sčítání a násobení skalárem podobně jako v Definici 12.6, nulový prvek $\mu_0 : \mathcal{A} \to \{0\}$ a funkce $\|\cdot\| : \mathcal{M}(X,\mathcal{A};\mathbb{K}) \to [0,+\infty)$ předpisem*

$$\forall \mu \in \mathcal{M}(X,\mathcal{A};\mathbb{K}) : \|\mu\| = |\mu|(X).$$

.

Pokud je jasné, jaký je prostor X a σ-algebra $\mathcal{A}$, zkracujeme označení na $\mathcal{M}(X;\mathbb{K})$ nebo jen $\mathcal{M}(\mathbb{K})$ či $\mathcal{M}$.

Věta 13.5. *Buď $(X,\mathcal{A})$ měřitelný prostor. Prostor měr $(\mathcal{M}(X,\mathbb{K}), \|\cdot\|)$ je normovaný lineární prostor.*

Důkaz. Je zřejmé, že jsou splněny vlastnosti vektorového prostoru, viz [Barto and Tůma, 2019, Definice 5.1].

Z Věty 13.3 plyne, že $\|\cdot\|$ je nezáporná konečná. Je-li $\|\mu\| = 0$ pro $\mu \in \mathcal{M}(X,\mathcal{A};\mathbb{K})$, je pro každou $A \in \mathcal{A}$ $|\mu(A)| \leq |\mu|(A) \leq \|\mu\| = 0$, a tedy je míra μ nulový prvek $\mathcal{M}(X;\mathbb{K})$. Trojúhelníková nerovnost plyne hned z definice variace míry. □

Definice 13.6 (Jordanův rozklad znaménkové míry na kladnou a zápornou část). *Nechť $(X,\mathcal{A})$ je měřitelný prostor a ν je znaménková míra. Potom existuje (právě jedna) dvojice (ν^+,ν^-) (nezáporných) měr na $(X,\mathcal{A})$ tak, že*

$$\nu(E) = \nu^+(E) - \nu^-(E), \quad E \in \mathcal{A},$$
$$|\nu|(E) = \nu^+(E) + \nu^-(E), \quad E \in \mathcal{A}.$$

Míra ν^+ se nazývá kladná část ν, míra ν^- se nazývá záporná část ν a rozklad $\nu = \nu^+ - \nu^-$ se nazývá Jordanův rozklad. Míry ν^+ a ν^- dostaneme ze vzorců

$$\nu^+(E) = \frac{|\nu|(E) + \nu(E)}{2}, \quad \nu^-(E) = \frac{|\nu|(E) - \nu(E)}{2}, \quad E \in \mathcal{A}.$$

Definice 13.7 (Integrování podle znaménkové míry). *Nechť ν je znaménková míra na $(X,\mathcal{A})$ a f je $\mathcal{A}$-měřitelná funkce na $D \in \mathcal{A}$. Definujeme*

$$\int_D f\,d\nu = \int_D f\,d\nu^+ - \int_D f\,d\nu^-$$

pokud rozdíl vpravo má smysl.

Lemma 13.8. *Definujeme-li pro $\mu \in \mathcal{M}(X,\mathcal{A};\mathbb{C})$ množinové funkce $\mathcal{R}e\mu, \mathcal{I}m\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ předpisem*

$$\forall A \in \mathcal{A} : (\mathcal{R}e\mu)(A) = \mathcal{R}e(\mu(A)), \quad (\mathcal{I}m\mu)(A) = \mathcal{I}m(\mu(A)),$$

jsou $\mathcal{R}e\mu$ i $\mathcal{I}m\mu$ znaménkové míry.

Důkaz. Cvičení doma. □

Definice 13.9 (Integrování podle komplexní míry). *Nechť ν je komplexní míra na $(X,\mathcal{A})$ a f je $\mathcal{A}$-měřitelná funkce na $D \in \mathcal{A}$. Definujeme*

$$\int_D f\,d\nu = \int_D f\,d(\mathcal{R}e\nu) + i\int_D f\,d(\mathcal{I}m\nu),$$

má-li výraz vpravo smysl v $\mathbb{C}$.

Definice 13.10 (Hahnův rozklad znaménkové míry). *Nechť ν je znaménková míra na $(X,\mathcal{A})$. Dvojici (P,N) množin z $\mathcal{A}$ nazveme Hahnův rozklad X podle míry ν, jestliže $P \cup N = X$, $P \cap N = \emptyset$ a pro každou $E \in \mathcal{A}$ máme*

$$E \subset P \implies \nu(E) \geq 0, \quad E \subset N \implies \nu(E) \leq 0. \tag{1.15}$$

Věta 13.11 (Existence Hahnova rozkladu). *Nechť ν je znaménková míra na $(X,\mathcal{A})$. Potom existuje Hahnův rozklad X podle ν.*

Důkaz. Nechť $f = \frac{d\nu^+}{d|\nu|}$, $g = \frac{d\nu^-}{d|\nu|}$ a položme

$$P = \{f \geq g\}, \qquad N = \{f < g\}.$$

Pro každou $E \in \mathcal{A}$ dostaneme

$$E \subset P \implies \nu(E) = \nu^+(E) - \nu^-(E) = \int_E (f-g)\, d|\nu| \geq 0,$$

a

$$E \subset N \implies \nu(E) = \nu^+(E) - \nu^-(E) = \int_E (f-g)\, d|\nu| \leq 0.$$

□

Poznámka 13.12. *Věty 12.4 a 12.9 platí i pokud předpokládáme, že μ je σ-konečná míra a ν je komplexní míra [Rudin, 1977, Věta 6.10].*

.... konec přednášky 23, 18.12.2019

14 Caratheodoryho konstrukce míry

Definice 14.1 (Vnější míra)**.** Nechť X je neprázdná množina. Pak funkce $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ je *vnější míra* na X, jestliže

(i) $\mu^*(\emptyset) = 0$,

(ii) $A \subset B \subset X \implies \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ (monotonie),

(iii) $A_n \subset X\ (n \in \mathbb{N}) \implies \mu^*(\bigcup_n A_n) \leq \sum_n \mu^*(A_n)$ (spočetná subaditivita).

Příklady:

1. Nulová míra, Diracova míra v bodě nebo aritmetická míra jsou rovněž vnější míry.
2. $$\mu^*(A) := \begin{cases} 0 & \text{pokud } A = \emptyset, \\ 1 & \text{pokud } A \neq \emptyset \end{cases}$$
3. $$\lambda^*(A) := \inf \left\{ \sum_n \text{délka}(I_n) :\ A \subset \bigcup_n I_n,\ I_n \text{ otevř. int.} \right\},\ A \subset \mathbb{R},$$

   je vnější míra na $\mathbb{R}$. Plyne to z Věty 15.4.

Definice 14.2. Řekneme, že množina $A \subset X$ je *μ^*-měřitelná*, jestliže

$$\forall T \subset X :\ \mu^*(T) = \mu^*(T \cap A) + \mu^*(T \setminus A). \tag{1.16}$$

Značíme $\mathcal{A}_{\mu^*} := \{A \subset X :\ A \text{ je } \mu^*\text{-měřitelná}\}$.

Pozn.: Nerovnost $\mu^*(T) \leq \mu^*(T \cap A) + \mu^*(T \setminus A)$ platí vždy (ze subaditivity), proto v definici lze ekvivalentně požadovat

$$\forall T \subset X : \mu^*(T) \geq \mu^*(T \cap A) + \mu^*(T \setminus A).$$

Věta 14.3 (Caratheodory)**.** *$\mathcal{A}_{\mu^*}$ je σ-algebra, $\mu := \mu^*|\mathcal{A}_{\mu^*}$ je míra a prostor $(X, \mathcal{A}_{\mu^*}, \mu)$ je úplný.*

Důkaz. 1. $\emptyset \in \mathcal{A}_{\mu^*}$ (zřejmé)

2. $A \in \mathcal{A}_{\mu^*} \implies X \setminus A \in \mathcal{A}_{\mu^*}$ (zřejmé z definice)

3. $\mathcal{A}_{\mu^*}$ je uzavřená na průniky a sjednocení:

   průnik dvou množin:

   Buďte $A, B \in \mathcal{A}_{\mu^*}$. Pro libovolnou množinu $T \subset X$ platí:

$$\begin{aligned}
&\text{testujeme } A \text{ množinou } T: && \mu^*(T) = \mu^*(T \cap A) + \mu^*(T \setminus A),\\
&\text{testujeme } B \text{ množinou } T \cap A: && \mu^*(T \cap A) = \mu^*(T \cap A \cap B) + \mu^*((T \cap A) \setminus B),\\
&\text{testujeme } A \text{ množinou } T \setminus (A \cap B): && \mu^*(T \setminus (A \cap B)) = \mu^*([T \setminus (A \cap B)] \cap A) + \mu^*([T \setminus (A \cap B)] \setminus A)\\
& && = \mu^*((T \cap A) \setminus B) + \mu^*(T \setminus A).
\end{aligned}$$

   Dosazením z druhé a třetí rovnosti do první dostaneme

$$\mu^*(T) = \mu^*(T \cap A \cap B) + \mu^*(T \setminus (A \cap B)),$$

   tedy $A \cap B \in \mathcal{A}_{\mu^*}$.

   sjednocení dvou množin: Pro $A, B \in \mathcal{A}_{\mu^*}$ je $A \cup B = X \setminus ((X \setminus A) \cap (X \setminus B)) \in \mathcal{A}_{\mu^*}$ podle De Morganových pravidel a předešlého.

   Pomocí matematické indukce dostaneme také

$$\forall n \in \mathbb{N}, \{A_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{A}_{\mu^*} : \bigcup_{i=1}^n A_i, \bigcap_{i=1}^n A_i \in \mathcal{A}_{\mu^*}.$$

4. μ^* je σ-aditivní na $\mathcal{A}_{\mu^*}$:

   konečná aditivita: Buďte $A, B \in \mathcal{A}_{\mu^*}$ disjunktní, $T \subset X$. Dosadíme do (1.16) testovací množinu $T \cap (A \cup B) \subset X$ a $A \in \mathcal{A}_{\mu^*}$. Protože $(T \cap (A \cup B)) \cap A = T \cap A$ a $(T \cap (A \cup B)) \setminus A = T \cap B$ dostaneme

$$\mu^*(T \cap (A \cup B)) = \mu^*(T \cap A) + \mu^*(T \cap B).$$

   Pomocí matematické indukce dostaneme

$$\forall T \subset X, n \in \mathbb{N}, \{A_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{A}_{\mu^*} \text{ po dvou disjunktní} : \mu^*(T \cap \bigcup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n \mu^*(T \cap A_i). \tag{1.17}$$

   σ-aditivita: Buďte $\{A_i\}_{i=1}^\infty \subset \mathcal{A}_{\mu^*}$ po dvou disjunktní, $T \subset X$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí podle rovnosti (1.17) a monotonie vnější míry

$$\sum_{i=1}^\infty \mu^*(T \cap A_i) = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^n \mu^*(T \cap A_i) = \lim_{n \to \infty} \mu^* \left(T \cap \bigcup_{i=1}^n A_i \right) \leq \mu^* \left(T \cap \bigcup_{i=1}^\infty A_i \right).$$

   Opačná nerovnost plyne ze spočetné subaditivity, platí tedy

$$\sum_{i=1}^\infty \mu^*(T \cap A_i) = \mu^* \left(T \cap \bigcup_{i=1}^\infty A_i \right).$$

5. $\mathcal{A}_{\mu^*}$ je uzavřeno na spočetná sjednocení:

spočetná disjunktní sjednocení: Buďte $A_i \in \mathcal{A}_{\mu^*}$ po dvou disjunktní a $T \subset X$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí podle částí 3., 4. a monotonie vnější míry

$$\mu^*(T) = \mu^*\left(T \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) + \mu^*\left(T \cap \bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \geq \mu^*\left(T \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) + \sum_{i=1}^{n} \mu^*(T \cap A_i).$$

Limitním přechodem $n \to \infty$ pak dostaneme

$$\mu^*(T) \geq \mu^*\left(T \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) + \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(T \cap A_i) = \mu^*\left(T \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) + \mu^*\left(T \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right).$$

Tedy $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}_{\mu^*}$.

spočetná sjednocení: Jsou-li $A_i \in \mathcal{A}_{\mu^*}$, najdeme pomocí triku zdisjunktnění (viz Lemma za Definicí 2.16) po dvou disjunktní $B_i \in \mathcal{A}_{\mu^*}$ tak, že $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$. K tomu stačí uzavřenost $\mathcal{A}_{\mu^*}$ na doplňky, konečná sjednocení a průniky. Zřejmě $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \in \mathcal{A}_{\mu^*}$.

Z dokázaného již plyne, že $\mathcal{A}_{\mu^*}$ je σ-algebra a μ^* je míra na $\mathcal{A}_{\mu^*}$.

6. $\mu^*(A) = 0 \implies A \in \mathcal{A}_{\mu^*}$:

Jestliže $\mu^*(A) = 0$, pak podle monotonie vnější míry je

$$\mu^*(T) \geq \mu^*(T \setminus A) = \mu^*(T \cap A) + \mu^*(T \setminus A),$$

tedy $A \in \mathcal{A}_{\mu^*}$. Všechny nulové množiny jsou tedy μ^*-měřitelné.

□

Příklad. *1. μ^* je nulová míra, Diracova míra v bodě nebo aritmetická míra na množině X: $\mathcal{A}_{\mu^*} = \mathcal{P}(X)$.*

2. $\mu^*(A) := \begin{cases} 0 & \textit{pokud } A = \emptyset, \\ 1 & \textit{pokud } A \neq \emptyset \end{cases} \implies \mathcal{A}_{\mu^*} = \{\emptyset, X\}.$

Definice 14.4 (Metrická vnější míra)**.** Buď (X, ρ) metrický prostor. Řekneme, že vnější míra μ^* na X je *metrická*, jestliže pro dvě množiny $A, B \subset X$ splňující $\operatorname{dist}(A, B) > 0$ platí

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B).$$

Zde $\operatorname{dist}(A, B) := \inf\{\rho(a, b) : a \in A, b \in B\}$.

Věta 14.5. *Nechť μ^* je metrická vnější míra na metrickém prostoru (X, ρ). Pak $\mathcal{B}(X) \subset \mathcal{A}_{\mu^*}$.*

Bez důkazu. □

15 Konstrukce Lebesgueovy míry

Definice 15.1. *Symbolem $\mathcal{O}_n$ budeme značit množinu všech otevřených omezených kvádrů v $\mathbb{R}^n$ (včetně prázdné množiny). Objem kvádru $I = (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n) \in \mathcal{O}_n$, budeme značit*

$$v(I) := (b_1 - a_1) \cdot \cdots \cdot (b_n - a_n).$$

Pro množinu $E \subset \mathbb{R}^n$, $\delta > 0$ klademe

$$\lambda^{n*}(E) := \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} v(I_i) : E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i,\ I_i \in \mathcal{O}_n,\ i \in \mathbb{N}\right\},$$

$$\lambda^{n*}_{\delta}(E) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} v(I_i) : E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i,\ I_i \in \mathcal{O}_n,\ \operatorname{diam}(I_i) < \delta,\ i \in \mathbb{N}\right\}.$$

Věta 15.2. *λ^{n*} je vnější míra na $\mathbb{R}^n$ a platí $\lambda^{n*}(I) = v(I), \quad I \in \mathcal{O}_n$.*

Bez důkazu. $\square$

Věta 15.3. *Pro $E \subset \mathbb{R}^n$ a $\delta > 0$ platí $\lambda^{n*}(E) = \lambda^{n*}_\delta(E)$.*

Bez důkazu. $\square$

Věta 15.4. *λ^{n*} je metrická vnější míra na $\mathbb{R}^n$.*

Bez důkazu. $\square$

Věta (Věta 2.19). *Existuje právě jedna borelovská míra $\lambda^n_{\mathcal{B}}$ na $\mathbb{R}^n$ taková, že pro všechna $-\infty < a_i < b_i < \infty$, $i = 1, \dots, n$, platí*

$$\lambda^n_{\mathcal{B}}([a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]) = (b_1 - a_1) \cdot \ldots \cdot (b_n - a_n). \tag{1.18}$$

Důkaz. Míra $\lambda_{\mathcal{B}}$ splňuje podmínku (1.18) právě, když $\lambda_{\mathcal{B}} = v$ na $\mathcal{O}_n$.

existence: Z Vět 14.3 a 15.2 plyne, že $\lambda^{n*}|_{\mathcal{A}_{\lambda^{n*}}}$ je míra na $\mathcal{A}_{\lambda^{n*}}$. Podle Vět 15.4 a 14.5 platí $\mathcal{B}^n \subset \mathcal{A}_{\lambda^{n*}}$ a podle Věty 15.2 je $\lambda^{n*} = v$ na $\mathcal{O}_n$. Definujeme-li $\lambda^n_{\mathcal{B}} := \lambda^{n*}|_{\mathcal{B}^n}$ má tato míra všechny požadované vlastnosti.

jednoznačnost: Jednoznačnost míry $\lambda^n_{\mathcal{B}}$ plyne z Věty 7.5, protože je určená pevně na množině $\mathcal{O}_n$, $\mathcal{O}_n$ generuje $\mathcal{B}^n$, $\mathcal{O}_n$ je uzavřen na průniky a $(-N, N)^n \nearrow \mathbb{R}^n$ s $v((-N, N)^n) < +\infty$. $\square$

.... konec přednášky 24, 19.12.2019

Definice 15.5. *Nechť X je metrický prostor, $\mathcal{A}$ je σ-algebra na X obsahující borelovské množiny a μ je míra na $\mathcal{A}$. Řekneme, že μ je*

- *zevně regulární, pokud pro každou $E \in \mathcal{A}$ platí $\mu(E) = \inf\{\mu(G); G \supset E,\ G \text{ otevřená}\}$;*
- *zevnitř regulární, pokud pro každou $E \in \mathcal{A}$ platí $\mu(E) = \sup\{\mu(F); F \subset E,\ F \text{ uzavřená}\}$;*
- *těsná, pokud pro každou $E \in \mathcal{A}$ platí $\mu(E) = \sup\{\mu(K); K \subset E,\ K \text{ kompaktní}\}$.*

Příklad 15.6.

- *Počítací míra na $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ není zevně regulární. Každá neprázdná otevřená množina v $\mathbb{R}$ má totiž počítací míru rovnou $+\infty$.*
- *Diracova míra δ_0 na $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ je zevně i zevnitř regulární.*

  Vnější regularita: *Ať $E \subset \mathbb{R}$. Buď $0 \in E$ a pak pro každou otevřenou $G \supset E$ platí $0 \in G$, a tedy $\delta_0(E) = \delta_0(G) = 1$, nebo $0 \notin E$ a pak pro každou otevřenou $G \supset E$ platí $E \subset G \setminus \{0\}$, $G \setminus \{0\}$ je otevřená, tedy $\delta_0(E) = 0 = \delta_0(G \setminus \{0\})$.*

  Vnitřní regularita: *Ať $E \subset \mathbb{R}$. Buď je $0 \in E$ a pak $\delta_0(\{0\}) = 1 = \delta_0(E)$, nebo $0 \notin E$ a pak pro každou uzavřenou $F \supset E$ platí $0 \notin F$, a tedy $\delta_0(E) = 0 = \delta_0(F)$.*

- *Lebesgueova míra λ^n na $\mathcal{A}_{\lambda^{n*}}$ je zevně regulární. Plyne to přímo z Definice 15.1 Lebesgueovy vnější míry λ^{n*}.*

Lemma 15.7. *Nechť X je metrický prostor, $\mathcal{A}$ je σ-algebra na X obsahující borelovské množiny a μ je σ-konečná zevně regulární míra na $\mathcal{A}$. Pak pro každou $E \in \mathcal{A}$ a pro každé $\varepsilon > 0$ existují uzavřená $F \subset X$ a otevřená $G \subset X$ tak, že $F \subset E \subset G$ a $\mu(G \setminus F) < \varepsilon$. Speciálně, μ je i zevnitř regulární.*

Důkaz. Nechť $\{A_n\} \subset \mathcal{A}$ je posloupnost množin konečné míry splňující $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ a $E \in \mathcal{A}$. Z vnější regularity plyne pro každé $n \in \mathbb{N}$ existence otevřené $G_n \subset X$ takové, že $G_n \supset E \cap A_n$ a $\mu(G_n) < \mu(E \cap A_n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} < +\infty$. Pak $\mu(G_n \setminus (E \cap A_n)) = \mu(G_n) - \mu(E \cap A_n) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$. Položíme-li nyní $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$, pak G je otevřená a $E \subset G$. Dále je snadno vidět, že $G \setminus E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n \setminus (E \cap A_n)$, a tedy

$$\mu(G \setminus E) \leq \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n \setminus (E \cap A_n)\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(G_n \setminus (E \cap A_n)) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Aplikujeme-li nyní již dokázanou část na množinu $X \setminus E$, pak dostaneme otevřenou $U \subset X$ splňující $X \setminus E \subset U$ a $\mu(U \setminus (X \setminus E)) < \frac{\varepsilon}{2}$. Položíme-li $F = X \setminus U$, pak F je uzavřená, $F \subset E$, $E \setminus F = E \setminus (X \setminus U) = E \cap U = U \setminus (X \setminus E)$ a $\mu(E \setminus F) < \frac{\varepsilon}{2}$. Tedy $\mu(G \setminus F) = \mu(G \setminus E) + \mu(E \setminus F) < \varepsilon$. □

Věta 15.8 (Regularita Lebesgueovy míry). (i) *Pro každé $E \in \mathcal{A}_{\lambda^{n*}}$, $\varepsilon > 0$ existují G otevřená, F uzavřená, $F \subset E \subset G$, $\lambda^n(G \setminus F) < \varepsilon$.*

(ii) *Pro každé $E \in \mathcal{A}_{\lambda^{n*}}$ existují množiny $A, B \in \mathcal{B}^n$, $A \subset E \subset B$, $\lambda^n(B \setminus A) = 0$.*

(iii) *Je $\mathcal{B}_0^n = \mathcal{A}_{\lambda^{n*}}$.*

Poznámka. *Bod (i) říká, že Lebesgueova míra je zevně i zevnitř regulární.*

Důkaz (i) i (ii) projde s minimální modifikací i pro libovolnou $E \subset \mathbb{R}^n$.

Důkaz Věty 15.8. (i): Plyne hned z Lemmatu 15.7.

(ii): Použijeme (i) na $\epsilon = 1/k$ pro $n \in \mathbb{N}$. Dostaneme otevřené množiny G_k a uzavřené množiny F_k. Stačí volit $B = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k$ a $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$. Ty mají požadované vlastnosti.

(iii): Inkluze $\mathcal{B}_0^n \supset \mathcal{A}_{\lambda^{n*}}$ plyne hned z (ii) a Věty 2.17. Obrácená inkluze plyne z toho, že $\mathcal{B}_0^n$ je nejmenší σ-algebra, která obsahuje borelovské a nulové množiny a $\mathcal{A}_{\lambda^{n*}}$ je nějaká σ-algebra, která obsahuje borelovské (Věty 15.4 a 14.5) a nulové množiny (Věty 14.3 a 15.2). □

Věta 15.9 (Nikolaj Nikolajevič Luzin (1912)). *Nechť X je metrický prostor, $\mathcal{A}$ je σ-algebra na X obsahující borelovské množiny a μ je σ-konečná zevně regulární míra na $\mathcal{A}$. Pak pro každou μ-měřitelnou funkci $f\colon X \to \mathbb{K}$ a $\varepsilon > 0$ existuje $F \subset X$ uzavřená taková, že $\mu(X \setminus F) < \varepsilon$ a $f|_F$ je spojitá.*

Důkaz. Nechť $\{U_k; k \in \mathbb{N}\}$ je posloupnost všech otevřených intervalů v $\mathbb{K}$ s racionálními koncovými body. Protože každou neprázdnou otevřenou množinu v $\mathbb{R}$ je možné napsat jako nejvýše spočetné sjednoceni intervalů U_k, stačí najít uzavřenou množinu $F \subset \mathbb{R}$ tak, že pro všechna $k \in \mathbb{N}$ bude množina $(f|_F)^{-1}(U_k)$ otevřená v F. (Využije se, že $(f|_F)^{-1}(\bigcup_k M_k) = \bigcup_k (f|_F)^{-1}(M_k)$ pro $M_k \subset \mathbb{K}$.)

Pro každé $k \in \mathbb{N}$ najdeme z Lemmatu 15.7 uzavřenou $F_k \subset X$ a otevřenou $G_k \subset X$ tak, že $F_k \subset f^{-1}(U_k) \subset G_k$ a $\mu(G_k \setminus F_k) < \frac{\varepsilon}{2^k}$. Pak je $F = X \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty}(G_k \setminus F_k)$ uzavřená a platí $\mu(X \setminus F) < \frac{\varepsilon}{2}$. Restrikce $f|_F$ je pak spojitá, protože pro $k \in \mathbb{N}$ je množina $(f|_F)^{-1}(U_k) = f^{-1}(U_k) \cap F = G_k \cap F$ otevřená v F. (Poslední rovnost plyne z toho, že $G_k \cap F \subset F_k$.) □

Poznámka 15.10.

- *Věta 15.9 platí pro Lebesgueovu míru λ^n na $\mathcal{B}^n$.*
- *Funkce f nemusí být spojitá v žádném bodě, pouze restrikce na vhodnou množinu je spojitá (vzhledem k této množině) (viz Dirichletova funkce $f = \chi_{\mathbb{Q}}$). Zde je zajímavé si uvědomit, že pro pevné $\varepsilon > 0$ existuje otevřená množina míry menší než ε, která je hustá v $\mathbb{R}^n$.*
- *Pokud míra μ splňuje předpoklady Věty 15.9 a $p \in [1, +\infty)$, je množina všech omezených spojitých funkcí na X hustá v $L_p(\mu)$. (bez důkazu, důkaz viz [Rudin, 1977, Kapitola 3])*

16 Lebegueova-Stieltjesova míra a integrál

Definice 16.1. *Řekneme, že $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je distribuční funkce, pokud*

(1) *F je neklesající,*

(2) *$F(-\infty) := \lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$, $F(\infty) := \lim_{x\to\infty} F(x) < \infty$,*

(3) *F je zprava spojitá, tj. pro $x \in \mathbb{R}$ platí $F(x) = \lim_{t\to x+} F(t)$.*

Věta 16.2. *Buď μ konečná borelovská míra na $\mathbb{R}$. Pak*

$$F_\mu(x) := \mu((-\infty, x]), \quad x \in \mathbb{R}$$

je distribuční funkce. Nazýváme ji distribuční funkcí míry *μ.*

Důkaz. Tvrzení snadno plyne z monotonie a spojitosti míry. □

Příklad 16.3.

- *Distribuční funkce Diracovy míry na $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ je $F = \chi_{[0,+\infty)}$.*
- *Distribuční funkce Lebesgueovy míry $\lambda^1|_{(0,1)}$ na $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ je $F : x \in \mathbb{R} \to x\chi_{(0,1)} + \chi_{[1,+\infty)}$.*
- *Je-li $f \in L^1(\lambda^1)$, $f \geq 0$, pak*
$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt, \quad x \in \mathbb{R},$$
je distribuční funkce míry definované pro $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ předpisem $\mu(B) = \int_B f(t)\,dt$. Všimněte si, že je-li f spojitá, je $F' = f$. Navíc je fce f Radonova-Nikodýmova derivace míry μ podle λ^1.

Věta 16.4. *Nechť funkce F je distribuční funkce. Pak existuje právě jedna konečná borelovská zevně i zevnitř regulární, těsná míra μ na $\mathbb{R}$ taková, že $F_\mu = F$. Tuto míru nazýváme Lebesgueovou-Stieltjesovou mírou příslušnou distribuční funkci F.*

Důkaz. Idea: Položíme $(a, a] := \emptyset$ a definujeme systém polouzavřených intervalů $\mathcal{I} := \{I \subset \mathbb{R}; \exists a, b \in \mathbb{R} : a \leq b \wedge I = (a, b]\}$. Pro každý interval $I \in \mathcal{I} = (a, b]$ definujeme $v(I) := F(b) - F(a)$ a tuto funkci intervalů rozšíříme pomocí Caratheodoryho konstrukce.

Definice vnější míry: definujeme pro $E \subset \mathbb{R}$, $\delta > 0$

$$\mu^*(E) := \inf\{\sum_k v(I_k); I_k \in \mathcal{I}, E \subset \bigcup_k I_k\}$$
$$\mu^*_\delta(E) := \inf\{\sum_k v(I_k); I_k \in \mathcal{I}, E \subset \bigcup_k I_k, \operatorname{diam}(I_k) < \delta\}$$

μ^* je vnější míra: Zřejmě je $\mu^*(\emptyset) = 0$ a $\mu^* \geq 0$ na $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. Monotonie μ^* je jasná hned z definice. Zbývá ukázat σ-subaditivitu. Buďte $E_k \subset \mathbb{R}$ pro $k \in \mathbb{N}$, $\epsilon > 0$. Je-li $\mu^*(E_k) = +\infty$, σ-subaditivita platí. Budeme tedy předpokládat, že $\mu^*(E_k) < +\infty$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Z definice μ^* existují pro každé $k \in \mathbb{N}$ intervaly $\{I_i^k\}_i \subset \mathcal{I}$ takové, že $E_k \subset \bigcup_i I_i^k$ a $\sum_i v(I_i^k) \leq \mu^*(E_k) + \epsilon 2^{-k}$. Pak $\bigcup_k E_k \subset \bigcup_k \bigcup_i I_i^k$ a $\mu^*(\bigcup_k E_k) \leq \sum_k \sum_i v(I_i^k) \leq \sum_k \mu^*(E_k) + \epsilon$. Tedy μ^* je σ subaditivní.

Platí $\mu^*_\delta = \mu^*$: Zřejmě hned z definice plyne $\mu^*_\delta \leq \mu^*$. Druhá nerovnost plyne z faktu, že každý omezený interval $(a, b]$ mohu napsat jako disjunktní sjednocení intervalů $\bigcup_{j=1}^J I_j$ s $\operatorname{diam}(I_j) < \delta$, $I_j \in \mathcal{I}$.

μ^* je metrická: Ať $E, F \subset \mathbb{R}$, $\delta > 0$ s $\operatorname{dist}(E, F) = 3\delta$. Ze subaditivity plyne $\mu^*(E \cup F) \leq \mu^*(E) + \mu^*(F)$. Ukážeme obrácenou nerovnost. Volme libovolné $\epsilon > 0$. Z definice μ^*_δ najdeme $\{I_k\}_k \subset \mathcal{I}$ tak, že $E \cup F \subset \bigcup_k I_k$, $\operatorname{diam}(I_k) < \delta$,

$\sum_k v(I_k) \le \mu_\delta^*(E \cup F) + \epsilon$. Definujeme $\mathcal{I}_E := \{I_k; I_k \cap E \neq \emptyset\}$, $\mathcal{I}_F := \{I_k; I_k \cap F \neq \emptyset\}$. Platí $\mathcal{I}_E \cap \mathcal{I}_F = \emptyset$ a navíc $E \subset \bigcup_{I \in \mathcal{I}_E} I$, $F \subset \bigcup_{I \in \mathcal{I}_F} I$, tedy

$$\mu^*(E) + \mu^*(F) = \mu_\delta^*(E) + \mu_\delta^*(F) \le \sum_{I \in \mathcal{I}_E} v(I) + \sum_{I \in \mathcal{I}_F} v(I) \le \sum_k v(I_k) \le \mu_\delta^*(E \cup F) + \epsilon = \mu^*(E \cup F) + \epsilon.$$

Protože $\epsilon > 0$ bylo libovolné, je metričnost μ^* dokázána.

Caratheodoryho věta 14.3 nám říká, že $\mathcal{B}^1 \subset \mathcal{A}_{\mu^*}$ a μ^* je míra na $\mathcal{A}_{\mu^*}$. Hledaná míra je $\mu := \mu^*|_{\mathcal{B}^1}$. Zbývá ověřit, že splňuje předepsané vlastnosti.

F je distribuční funkcí μ: Z definice je hned vidět, že pro $a, b \in \mathbb{R}$ je $\mu((a,b]) \le v((a,b])$. S trochou námahy je možné ukázat, že $\mu((a,b]) = v((a,b])$. Pak pro $a \in \mathbb{R}$ platí podle věty o spojitosti míry $\mu((-\infty, a]) = \lim_{n \to -\infty} \mu((-n,a]) = \lim_{n \to -\infty} F(a) - F(-n) = F(a)$.

μ je konečná: Míra μ je konečná, protože $\mu(\mathbb{R}) = \lim_{n \to +\infty} \mu((-\infty, n]) = F(+\infty) - F(-\infty) \in \mathbb{R}$.

μ je zevně regulární: Fixujme $E \in \mathcal{B}^1$, $\epsilon > 0$. Z definice μ existuje $\{I_k\}_k \subset \mathcal{I}$ taková, že $E \subset \bigcup_k I_k$ a $\sum_k v(I_k) \le \mu(E) + \epsilon$. Jelikož je F zprava spojitá, existují pro $k \in \mathbb{N}$ intervaly (a_k, b_k) takové, že $I_k \subset (a_k, b_k)$ a $v((a_k, b_k]) \le v(I_k) + \epsilon 2^{-k}$. Pak $G := \bigcup_k (a_k, b_k)$ je otevřená množina, pro kterou $E \subset G$ a $\mu(G \setminus E) = \mu(G) - \mu(E) \le \sum_k v((a_k, b_k]) - \mu(E) \le \sum_k (v(I_k) + \epsilon 2^{-k}) - \mu(E) \le \mu(E) + 2\epsilon - \mu = 2\epsilon$.

μ je zevnitř regulární: Plyne hned z Lemmatu 15.7.

μ je těsná: Je-li $F \subset \mathbb{R}$ uzavřená a $n \in \mathbb{N}$, je $[-n, n] \cap F$ kompaktní. Navíc je $\lim_{n \to +\infty} \mu([-n,n] \cap F) = \mu(F)$ ze spojitosti míry. Díky předchozím vlastnostem plyne těsnost míry μ z její vnitřní regularity. □

Poznámka. *Pro Lebesgueovu-Stieltjesovu míru, příslušnou distribuční funkci F a $a < b$ platí $\mu((a,b]) = F(b) - F(a)$. Pozor ale $\mu((a,b)) = \lim_{t \to b-} F(t) - F(a)$, $\mu([a,b]) = F(b) - \lim_{t \to a-} F(t)$ a $\mu([a,b)) = \lim_{t \to b-} F(t) - \lim_{t \to a-} F(t)$. Protože funkce F může být nespojitá, není vhodné zavádět značení $\int_a^b$, místo toho budeme používat $\int_{(a,b)}$, $\int_{[a,b]}$, atd.*

Definice 16.5. *Konečná borelovská míra μ na $\mathbb{R}$ je*

- *diskrétní, jestliže existuje spočetná množina $S \subset \mathbb{R}$ taková, že $\mu(\mathbb{R} \setminus S) = 0$;*
- *neatomická, jestliže $\mu(\{x\}) = 0$ pro každý $x \in \mathbb{R}$.*

Cvičení.

1. *Je-li μ zároveň diskrétní a neatomická, je nulová.*
2. *Každá diskrétní míra je tvaru $\mu = \sum_{i=1}^\infty t_i \delta_{a_i}$ pro nějaké $t_i \ge 0$ a $a_i \in \mathbb{R}$, $\sum_i t_i < \infty$.*
3. *μ je neatomická $\iff$ F je spojitá.*

Příklad. *Buď $C \subset [0,1]$ Cantorovo diskontinuum. Cantorovu funkci F_C definujeme následovně. Klademe $F_C(x) = 0$ pro $x \le 0$ a $F_C(x) = 1$ pro $x \ge 1$. Dále $x \in (0,1)$ vyjádříme v trojkovém rozvoji*

$$x = \sum_{j=1}^\infty \frac{x_j}{3^j} \quad (x_j \in \{0,1,2\}),$$

označíme $n(x) := \inf\{j \in \mathbb{N} : x_j = 1\}$ a klademe

$$F_C(x) := \sum_{j=1}^{n(x)} \frac{\min\{x_j, 1\}}{2^j}, \quad x \in (0,1).$$

Funkce F_C je spojitá, neklesající a je distribuční funkcí Cantorovy míry μ_C, která je neatomická, ale přitom je singulární vzhledem k Lebesgueově míře.

Poznámka. *Každou konečnou borelovskou míru μ na $\mathbb{R}$ lze rozložit na součet*

$$\mu = \mu_a + \mu_c + \mu_d,$$

kde $\mu_a \ll \lambda$, μ_d je diskrétní a μ_c neatomická s vlastností $\mu_c \perp \lambda$.

Míru μ_d získáme následovně. Distribuční funkce F míry μ má pouze spočetně mnoho bodů nespojitosti. Uspořádejme je do posloupnosti $\{a_i\}$ a pro každé $i \in \mathbb{N}$ definujme $t_i := F(a_i) - \lim_{t \to a_i-} F(t)$. Míru μ_d a její distribuční funkci F_d pak definujeme

$$\mu_d = \sum_{i=1}^{\infty} t_i \delta_{a_i}, \quad F_d = \sum_{i=1}^{\infty} t_i \chi_{[a_i,+\infty)}.$$

Platí $\mu_d \perp \lambda^1$

Míra μ_a je absolutně spojitá část míry μ vzhledem k λ^1 podle Věty 12.9. Označíme-li $f := \mathrm{d}\mu_a / \mathrm{d}\lambda^1$, je $f \in L^1(\mathbb{R})$ a distribuční funkce F_a míry μ_a definována pro $x \in \mathbb{R}$ předpisem

$$F_a(x) = \int_{-\infty}^{x} f \,\mathrm{d}\lambda^1.$$

Konečně označíme-li $F_c := F - F_d - F_a$ je tato funkce spojitá distribuční funkce míry μ_c. Míra μ_c je tedy neatomická. Navíc musí platit $\mu_c \perp \lambda^1$, protože $\mu_c + \mu_d$ je singulární část míry μ vzhledem k λ^1 podle Věty 12.9.

Definice 16.6 (Lebesgueův-Stieltjesův integrál)**.** Je-li F distribuční funkce konečné borelovské míry μ na $\mathbb{R}$, $f \in L^1(\mu)$ a $A \in \mathcal{B}^1$, definujeme Lebesgueův-Stieltjesův integrál funkce f podle F přes množinu A předpisem

$$\int_A f dF := \int_A f d\mu.$$

Je-li potřeba zdůraznit proměnnou, podle které se integruje používáme také značení $\int_A f(x) dF(x)$.

Věta 16.7 (Per partes pro Lebesgue-Stieltjesův integrál)**.** *Jsou-li F, G dvě distribuční funkce a $a < b$, platí*

$$F(b)G(b) - F(a)G(a) = \int_{(a,b]} F^- \,\mathrm{d}G + \int_{(a,b]} G \,\mathrm{d}F,$$

kde pro $x \in (a, b]$ definujeme $F^-(x) := \lim_{y \to x_-} F(y)$.

Důkaz. S využitím Fubiniho věty dostaneme

$$\begin{aligned}
&(F(b) - F(a))(G(b) - G(a)) = \int_{(a,b]^2} d(\mu_F \otimes \mu_G) \\
&= \int_{(a,b]} \int_{(a,b]} \chi_{\{x<y\}} \, dF(x) \, dG(y) + \int_{(a,b]} \int_{(a,b]} \chi_{\{x \geq y\}} \, dG(y) \, dF(x) \\
&= \int_{(a,b]} \int_{(a,y)} dF(x) \, dG(y) + \int_{(a,b]} \int_{(a,x]} dG(y) \, dF(x) \\
&= \int_{(a,b]} (F(y_-) - F(a)) \, dG(y) + \int_{(a,b]} (G(x) - G(a)) \, dF(x) \\
&= \int_{(a,b]} F(x_-) \, dG(x) + \int_{(a,b]} G(x) \, dF(x) - F(a)(G(b) - G(a)) - G(a)(F(b) - F(a)),
\end{aligned}$$

a odečtením dostaneme dokazovanou rovnost. □

Věta 16.8. *Nechť distribuční funkce F konečné míry μ má všude vlastní derivaci $F' =: f$. Pak $\mu \ll \lambda$ a $f = \frac{d\mu}{d\lambda}$.*

Důkaz. Označme $\mathcal{D} := \{B \in \mathcal{B}^1 : \mu(B) = \int_B f(x)\,dx\}$. Z vlastnosti

$$\mu((a,b]) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx$$

plyne, že $\mathcal{D}$ obsahuje všechny intervaly typu $(a,b]$. Protože systém těchto intervalů je uzavřen na konečné průniky a generuje borelovskou σ-algebru, a protože $\mathcal{D}$ je Dynkinův systém, je $\mathcal{D} = \mathcal{B}^1$, a tedy f je Radon-Nikodymova hustota μ vzhledem k λ^1. □

Příklad. *1. Mají-li F i G vlastní derivaci na $\mathbb{R}$, dostaneme z Vět 16.7 a 16.8*

$$[FG]_a^b = \int_a^b F(x)G'(x)\,dx + \int_a^b F'(x)G(x)\,dx,$$

což je klasický vzorec per partes.

2. Pro Cantorovu funkci F_C platí symetrie $F_C(1-x) = 1 - F_C(x)$, $x \in (0,1)$, z čehož snadno dostaneme $\int_0^1 F_C(x)\,dx = \frac{1}{2}$. Použitím vzorce per partes pak dostaneme

$$1 = \int_0^1 x\,dF_C(x) + \int_0^1 F_C(x)\,dx,$$

tedy $\int_0^1 x\,dF_C(x) = \frac{1}{2}$.

Poznámka 16.9. *Lebesgue-Stieltjesův integrál lze definovat i podle rozdílu dvou distribučních funkcí, což jsou zprava spojité funkce s konečnou variací.*

17 Věta o rozšíření míry

Definice 17.1. Nechť $X \neq \emptyset$.

Řekneme, že $\mathcal{A}$ je algebra podmnožin X, pokud 1) $\emptyset \in \mathcal{A}$, 2) $A \in \mathcal{A} \implies X \setminus A \in \mathcal{A}$, 3) $A, B \in \mathcal{A} \implies A \cup B \in \mathcal{A}$.

Řekneme, že funkce $\tilde{\mu} : \mathcal{A} \to [0,\infty]$ je *pramíra*, jestliže 1) $\tilde{\mu}(\emptyset) = 0$, 2) pro libovolné množiny $A_i \in \mathcal{A}$ po dvou disjunktní a takové, že i $\bigcup_{i=1}^\infty A_i \in \mathcal{A}$, platí

$$\tilde{\mu}\left(\bigcup_{i=1}^\infty A_i\right) = \sum_{i=1}^\infty \tilde{\mu}(A_i).$$

Pozn.: $\tilde{\mu}$ je zřejmě monotónní.

Věta 17.2 (Hahn-Kolmogorovova věta o rozšíření míry)**.** *Buď $\tilde{\mu}$ pramíra na algebře $\mathcal{A}$ podmnožin množiny X. Pak existuje míra μ na $\sigma\mathcal{A}$ taková, že $\tilde{\mu} = \mu$ na $\mathcal{A}$. Je-li $\tilde{\mu}$ σ-konečná, je μ jednoznačně určena.*

Důkaz. Pro $E \subset X$ položme

$$\mu^*(E) := \inf\left\{\sum_{i=1}^\infty \tilde{\mu}(A_i) : A_i \in \mathcal{A},\, E \subset \bigcup_{i=1}^\infty A_i\right\}.$$

(a) μ^* *je vnější míra*: Zřejmě $\mu^*(\emptyset) = 0$ a μ^* je monotónní. Ukážeme spočetnou subaditivitu (důkaz je stejný jako v případě vnější míry λ^{n*}). Nechť $E_i \in \mathcal{A}$, $\mu^*(E_i) < \infty$, $i \in \mathbb{N}$. K danému $\varepsilon > 0$ existují $A_{ij} \in \mathcal{A}$ takové, že

$E_i \subset \bigcup_j E_{ij}$ a $\sum_j \tilde{\mu}(A_{ij}) < \mu^*(E_i) + \varepsilon 2^{-i}$, $i \in \mathbb{N}$. Pak $\bigcup_i E_i \subset \bigcup_i \bigcup_j A_{ij}$ a $\sum_i \sum_j \tilde{\mu}(A_{ij}) < \sum_i \mu^*(E_i) + \varepsilon$, z čehož již plyna spočetná subaditivita, neboť ε může být libovolně malé.

(b) *Pro každou $A \in \mathcal{A}$ platí $\mu^*(A) = \tilde{\mu}(A)$*: Nerovnost $\mu^*(A) \leq \tilde{\mu}(A)$ je zřejmá. Pro důkaz opačné nerovnosti předpokládejme, že $A \subset \bigcup_i A_i$, $A_i \in \mathcal{A}$. Indukcí definujme $B_1 := A_1 \cap A$, $B_2 := (A_2 \cap A) \setminus B_1$, a

$$B_i := (A_i \cap A) \setminus (B_1 \cup \cdots \cup B_{i-1}), \quad i \in \mathbb{N}.$$

Zřejmě B_i jsou po dvou disjunktní a platí $A = \bigcup_i B_i$, z vlastností pramíry tedy dostaneme

$$\tilde{\mu}(A) = \sum_i \tilde{\mu}(B_i) \leq \sum_i \tilde{\mu}(A_i).$$

To (podle definice μ^*) znamená, že $\mu^*(A) \geq \tilde{\mu}(A)$.

(c) $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_{\mu^*}$: Nechť $A \in \mathcal{A}$, $T \subset X$, $\mu^*(T) < \infty$. Stačí ukázat, že $\mu^*(T) \geq \mu^*(T \cap A) + \mu^*(T \setminus A)$. K danému $\varepsilon > 0$ existuje pokrytí $T \subset \bigcup_i A_i$ množinami $A_i \in \mathcal{A}$ takové, že $\sum_i \tilde{\mu}(A_i) < \mu^*(T) + \varepsilon$. Protože $T \cap A \subset \bigcup_i (A_i \cap A)$, $T \setminus A \subset \bigcup_i (A_i \setminus A)$ a množiny $A_i \cap A$ i $A_i \setminus A$ patří do $\mathcal{A}$, platí

$$\mu^*(T \cap A) \leq \sum_i \tilde{\mu}(A_i \cap A), \quad \mu^*(T \setminus A) \leq \sum_i \tilde{\mu}(A_i \setminus A),$$

a sečtením dostaneme

$$\mu^*(T \cap A) + \mu^*(T \setminus A) \leq \sum_i \tilde{\mu}(A_i \cap A) + \sum_i \tilde{\mu}(A_i \setminus A) = \sum_i \tilde{\mu}(A_i) < \mu^*(T) + \varepsilon,$$

z čehož již plyne dokazovaná nerovnost.

Podle Caratheodoryho věty je $\mu := \mu^* | \mathcal{A}_{\mu^*}$ míra, která navíc podle (b) rozšiřuje pramíru $\tilde{\mu}$, a podle (c) je definovaná na $\sigma\mathcal{A}$.

Jednoznačnost snadno plyne z věty o jednoznačnosti (Věta 7.5). Algebra $\mathcal{A}$ je zřejmě uzavřená na konečné průniky a je-li $\tilde{\mu}$ σ-konečná, existují množiny $A_n \in \mathcal{A}$ takové, že $\tilde{\mu}(A_n) < \infty$ a $A_n \nearrow X$, $n \to \infty$. $\square$

Příklady:

1. Označme symbolem $\mathcal{A}_0$ systém podmnožin $\mathbb{R}$ obsahující prázdnou množinu a všechna konečná sjednocení intervalů typu $(a, b]$ a (a, ∞), $a \in [-\infty, \infty)$, $b \in \mathbb{R}$. Lze snadno nahlédnout, že $\mathcal{A}_0$ je algebra, a definujeme-li množinovou funkci $\tilde{\mu}$ na $\mathcal{A}_0$ jako součet délek příslušných (disjunktních) intervalů, je jejím rozšířením na $\sigma\mathcal{A}_0 = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ Lebesgueova míra λ^1. Abychom ovšem mohli použít Hahn-Kolmogorovovu větu, museli bychom ukázat σ-aditivitu na $\mathcal{A}_0$.

2. Na algebře $\mathcal{A}_0$ z předchozího příkladu uvažujme množinovou funkci

$$\tilde{\mu}(A) := \begin{cases} 0, & A = \emptyset, \\ \infty, & A \neq \emptyset. \end{cases}$$

   $\tilde{\mu}$ je zřejmě pramíra, nemá ale jednoznačné rozšíření na $\sigma\mathcal{A}_0$. Jedním možným rozšířením je míra definovaná stejným předpisem jako $\tilde{\mu}$ (tedy 0 pro prázdnou množinu a ∞ pro všechny neprázdné množiny), jiným rozšířením je aritmetická míra, nebo její libovolný kladný násobek.

Věta 17.3. *Buď $\tilde{\mu} : \mathcal{A} \to [0, \infty)$ konečná, konečně aditivní funkce na algebře $\mathcal{A}$ splňující $\tilde{\mu}(\emptyset) = 0$. Pak $\tilde{\mu}$ je σ-aditivní právě tehdy, když*

$$A_i \in \mathcal{A},\ A_i \searrow \emptyset \implies \tilde{\mu}(A_i) \to 0. \tag{1.19}$$

Pozn: Vlastnosti (1.19) se říká spojitost $\tilde{\mu}$ v prázdné množině.

Důkaz. $\Longrightarrow$: Nechť $\tilde{\mu}$ je σ-aditivní a $A_i \in \mathcal{A}$, $A_i \searrow \emptyset$. Pak $A_1 = \bigcup_{i=1}^{\infty}(A_i \setminus A_{i+1})$ a množiny $A_i \setminus A_{i+1}$ jsou po dvou disjunktní, tedy

$$\tilde{\mu}(A_1) = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\mu}(A_i \setminus A_{i+1}) < \infty.$$

Rovněž platí $A_n = \bigcup_{i=n}^{\infty}(A_i \setminus A_{i+1})$, tedy

$$\tilde{\mu}(A_n) = \sum_{i=n}^{\infty} \tilde{\mu}(A_i \setminus A_{i+1}) \to 0, \quad n \to \infty.$$

$\Longleftarrow$: Nechť nyní platí (1.19), $B_i \in \mathcal{A}$ jsou po dvou disjunktní a $A := \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \in \mathcal{A}$. Pro množiny $A_n := A \setminus (B_1 \cup \cdots \cup B_n)$ platí $A_n \searrow \emptyset$, tedy $\tilde{\mu}(A_n) \to 0$. Z konečné aditivity $\tilde{\mu}$ máme

$$\tilde{\mu}(A) - \tilde{\mu}(A_n) = \tilde{\mu}(A \setminus A_n) = \sum_{i=1}^{n} \tilde{\mu}(B_i),$$

a limitním přechodem $n \to \infty$ dostaneme $\tilde{\mu}(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\mu}(B_i)$, tedy $\tilde{\mu}$ je σ-aditivní na $\mathcal{A}$. □

Příklad: Množinová funkce

$$\tilde{\mu}(A) := \begin{cases} 0, & A \subset \mathbb{N} \text{ konečná}, \\ \infty, & A \subset \mathbb{N} \text{ nekonečná} \end{cases}$$

je konečně aditivní množinová funkce na $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, která není σ-aditivní.

Příklad. Položme $X := \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ (posloupnosti $0-1$) a pro $n \in \mathbb{N}$ označme $\Pi_n : X \to \{0,1\}^n$ projekci do prvních n souřadnic. Dále označme

$$\mathcal{A} := \bigcup_{n=1}^{\infty} \Pi_n^{-1}(\mathcal{P}\{0,1\}^n).$$

Systém $\mathcal{A}$ tvoří algebru a definujeme na ní množinovou funkci předpisem: Je-li $A \in \mathcal{A}$, pak $A = \Pi_n^{-1}(B)$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}$ a $B \subset \{0,1\}^n$; klademe

$$\tilde{\mu}(A) := \frac{\operatorname{card} B}{2^n}.$$

$\tilde{\mu}$ je korektně definovaná konečně aditivní množinová funkce.

Na množině X zavedeme metriku

$$d(x,y) := \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{2^i}, \quad x, y \in X.$$

Potřebujeme tyto znalosti z matematické analýzy:

1. Konvergence posloupnosti v (X,d) je ekvivalentní konvergenci posloupností všech souřadnic.
2. (X,d) je kompaktní metrický prostor.
3. Každá množina $A \in \mathcal{A}$ je otevřená i uzavřená v (X,d).

Jsou-li $A_n \in \mathcal{A}$ takové, že $A_n \searrow \emptyset$, pak z kompaktnosti A_n plyne, že existuje n_0 takové, že $A_n = \emptyset$ pro $n > n_0$. Pak ale jistě $\tilde{\mu}(A_n) \to 0$, je tedy splněna podmínka (1.19) a tudíž $\tilde{\mu}$ je pramíra. Podle Hahn-Kolmogorovovy věty tedy existuje její jednoznačné rozšíření na míru μ na $\mathcal{B} := \sigma\mathcal{A}$. Míra μ je pravděpodobnostní míra a má význam rozložení pravděpodobnosti pro posloupnost nezávislých opakování pokusu hodu mincí.

18 Klasifikace vět

18.1 1. třída

Na úspěšné složení zkoušky je nutné znát znění těchto vět. Velice doporučuji naučit se také jejich důkazy, hodí se to pro další studium a matematickou práci. Navíc je to také potřeba pro získání pěkného výsledku u zkoušky. Nicméně pro pouhé absolvování zkoušky není nutné důkazy znát.

Do této třídy spadají všechny věty, jejichž důkazy na přednášce nebyly prezentovány. Dále pak věty: 2.17, 2.19, 4.4, 5.2, 6.2, 7.4, 8.4, 8.5, 8.7, 9.5, 10.11, 11.9, 12.3, 12.4, 12.9, 14.3, 15.9, 16.4.

18.2 2.třída

Na úspěšné složení zkoušky je nutné znát znění a důkazy těchto vět. Sem spadají všechny věty odpřednesené s důkazy kromě vět 1. třídy.

19 Opravy

19.1 Věta 4.4

V důkazu má skoro na konci být $\tau s_n \leq f_n$ místo $\tau s_n < f_n$.

19.2 Důsledek 4.6

Dodán chybějící přívlastek *jednoduchou* v bodě 2.

19.3 Věta 5.2

V důkazu byly všechny derivace podle t nahrazeny parciálními derivacemi $\frac{\partial}{\partial t}$.

19.4 Věta 8.7

Druhá část má hovořit o mírách na borelovských σ algebrách, tedy o $\lambda_{\mathcal{B}}$.

19.5 Věta 10.3

Byla opravena podmínka pro to, kdy platí rovnost v případě 2 — doplněna konečnost pravé strany.

19.6 důkaz Věty 10.4

Opraveny překlepy g na f a *nebo* na i.

19.7 Poznámka 10.7

Upravena nerovnost na rovnost ve členu $\|\alpha f\|_p = |\alpha|\|f\|_p$.

19.8 Lemma 11.4

Oprava na ostrou nerovnost v $1 \leq p < q < \infty$.

19.9 Věta 11.5

Opravena poslední norma v

$$\mu(X)^{-\frac{1}{p}}\|f\|_p = (\fint_X |f|^p \,\mathrm{d}\mu)^{\frac{1}{p}} = (\fint_X |f|^p \,\mathrm{d}\mu)^{\frac{q}{p}\frac{1}{q}} \leq (\fint_X |f|^q \,\mathrm{d}\mu)^{\frac{1}{q}} = \mu(X)^{-\frac{1}{q}}\|f\|_q,$$

19.10 Lemma 13.8

Opraveno $\mu \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A}; \mathbb{C})$. Dříve uvedené $\mathbb{K}$ je sice formálně správně, ale nemá smysl.

19.11 Věta 15.8

V důkazu bodu ii) byly prohozeny symboly $\bigcup$ a $\bigcap$.

x

2 Cvičení

Poslední změna: 12.02.2020 11:24:35

Příklady pro cvičení k přednášce Teorie míry a integrálu jsem doslovně okopíroval z příprav prof. S. Hencla. Podle potřeby v nich budu provádět úpravy.

1 Požadavky pro zápočet

Pro získání zápočtu je potřeba

- účast na alespoň 7 cvičeních
- úspěšné napsání zápočtových písemek - v rámci cvičení se budou psát 2 zápočtové písemky, každá za 10 bodů. Úspěšné napsání znamená, že student získá dohromady 12 a více bodů.
- chybějící body je možné nahradit další prací podle pokynů cvičícího

2 1. cvičení

Věta. *[Pick et al., 2019, 9.4.1. Věta] (srovnávací kritérium pro konvergenci Newtonova integrálu). Nechť $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^*$ a nechť $a < b$. Nechť funkce $,g : [a,b) \to \mathbb{R}$ splňují $0 \le f(x) \le g(x)$, $x \in [a,b)$. Nechť dále je f spojitá na $[a,b)$ a platí $g \in \mathcal{N}(a,b)$. Potom $f \in \mathcal{N}(a,b)$.*

Věta. *[Pick et al., 2019, 9.4.5. Věta] (limitní srovnávací kritérium pro konvergenci Newtonova integrálu) Nechť $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^*$ a nechť $a < b$. Nechť f, g jsou spojité nezáporné funkce na $[a,b)$. Jestliže $\lim_{x\to b-} \frac{f(x)}{g(x)} \in (0,+\infty)$, pak $g \in \mathcal{N}(a,b)$ právě tehdy, když $f \in \mathcal{N}(a,b)$.*

Věta. *[Pick et al., 2019, 9.4.8. Věta] (Abelovo-Dirichletovo kritérium konvergence Newtonova integrálu) Nechť $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^*$ a nechť $a < b$. Nechť $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ je spojitá a F je primitivní funkce k funkci f na $[a,b)$. Dále nechť $g : [a,b) \to \mathbb{R}$ je na $[a,b)$ monotónní a spojitá. Pak platí:*

1. *Jestliže $f \in \mathcal{N}(a,b)$ a g je omezená, pak $fg \in \mathcal{N}(a,b)$.*
2. *Je-li F omezená na $[a,b)$ a $\lim_{x\to b-} g(x) = 0$, je $fg \in \mathcal{N}(a,b)$.*

Vyšetřete konvergenci následujících integrálů ($\alpha \in \mathbf{R}$ je parametr):

$$1.\ \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3+5x+3}},\quad 2.\ \int_0^1 \frac{\log x}{1-x^2}dx,\quad 3.\ \int_0^\infty \frac{x-\sin x}{x^\alpha}dx$$

$$5.\ \int_0^\infty \frac{x\sin x}{1+x^2}dx \text{ (i absolutní konvergenci)},\quad 6.\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\cos x)\tan^\alpha x\,dx \quad .$$

Nalezněte objemy

4. jednotkové koule, 7. anuloidu.

Výsledky a návody:

1. Konverguje ; U ∞ limitně srovnáme s $\dfrac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$.

2. Konverguje; U 1 víme $\lim_{t\to 0} \dfrac{\log x}{1-x} = 1$, a proto limitně srovnáme s 1.

U 0 srovnáme s $\log x$ a $\int_0^1 |\log x| < \infty$ zjistíme z per partes.

3. Konverguje pro $\alpha \in (2,4)$; U 0 limitně srovnáme s $\dfrac{x^3}{x^\alpha}$.

U ∞ limitně srovnáme s $x^{1-\alpha}$.

5. Konverguje neabsolutně. Z Abel-Dirichleta víme, že $\int_0^\infty \dfrac{\sin x}{x}dx$ konverguje a

$$\int_0^\infty \Big(\frac{x\sin x}{1+x^2} - \frac{\sin x}{x}\Big)dx = \int_0^\infty \frac{-\sin x}{(1+x^2)x}\,dx \text{ snadno konverguje - u } \infty \text{ srovnej s } \frac{1}{x^3}.$$

Nekonverguje absolutně:

$$\int_0^\infty \frac{x|\sin x|}{1+x^2}dx \ge \sum_{k=1}^\infty \int_{k\pi}^{k\pi+\pi} \frac{x|\sin x|}{1+x^2}dx \ge 2\sum_{k=1}^\infty \frac{k\pi}{1+(k+1)^2\pi^2} = +\infty.$$

6. Konverguje pro $\alpha \in (-3,1)$; U 0 limitně srovnáme s $(1-\cos x)x^\alpha \sim x^{2+\alpha}$.

$$\text{U } \frac{\pi}{2} \text{ se chová jako } \frac{\log(\cos x)}{\cos^\alpha x}. \text{ Vzhledem k } \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\frac{\pi}{2}-x} = 1$$

$$\text{je tato funkce stejně integrovatelná, jako funkce } \frac{\log y}{y^\alpha} \text{ u } 0, \text{ tedy pro } \alpha < 1.$$

4. $\frac{4}{3}\pi$; Koule vznikne rotací plochy pod grafem funkce $y(x) = \sqrt{1-x^2}$, $x \in (-1,1)$ okolo osy x. Objem je tedy

$$V = \pi \int_{-1}^{1} (\sqrt{1-x^2})^2 \, dx = \frac{4}{3}\pi \; .$$

7. $4\pi^2$; Uvažujme anuloid vzniklý rotací kruhu $\{[x,y] : x^2 + (y-2)^2 \leq 1\}$ okolo osy x. Anuloid vznikne jako rozdíl tělesa vzniklého rotací plochy pod grafem funkce $y_1(x) = 2 + \sqrt{1-x^2}$ a funkce $y_2(x) = 2 - \sqrt{1-x^2}$.

$$V = \pi \int_{-1}^{1} \left[(2+\sqrt{1-x^2})^2 - (2-\sqrt{1-x^2})^2\right] \, dx = 16\pi \int_0^1 \sqrt{1-x^2} \, dx \; .$$

3 2. cvičení

Věta. *[Pick et al., 2019, 9.4.1. Věta] (srovnávací kritérium pro konvergenci Newtonova integrálu). Nechť $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^*$ a nechť $a < b$. Nechť funkce $, g : [a, b) \to \mathbb{R}$ splňují $0 \leq f(x) \leq g(x)$, $x \in [a, b)$. Nechť dále je f spojitá na $[a, b)$ a platí $g \in \mathcal{N}(a, b)$. Potom $f \in \mathcal{N}(a, b)$.*

Věta. *[Pick et al., 2019, 9.4.5. Věta] (limitní srovnávací kritérium pro konvergenci Newtonova integrálu) Nechť $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^*$ a nechť $a < b$. Nechť f, g jsou spojité nezáporné funkce na $[a, b)$. Jestliže $\lim_{x\to b-} \frac{f(x)}{g(x)} \in (0, +\infty)$, pak $g \in \mathcal{N}(a, b)$ právě tehdy, když $f \in \mathcal{N}(a, b)$.*

Věta. *[Pick et al., 2019, 9.4.8. Věta] (Abelovo-Dirichletovo kritérium konvergence Newtonova integrálu) Nechť $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^*$ a nechť $a < b$. Nechť $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ je spojitá a F je primitivní funkce k funkci f na $[a, b)$. Dále nechť $g : [a, b) \to \mathbb{R}$ je na $[a, b)$ monotónní a spojitá. Pak platí:*

1. *Jestliže $f \in \mathcal{N}(a, b)$ a g je omezená, pak $fg \in \mathcal{N}(a, b)$.*
2. *Je-li F omezená na $[a, b)$ a $\lim_{x\to b-} g(x) = 0$, je $fg \in \mathcal{N}(a, b)$.*

Vyšetřete konvergenci následujících integrálů ($\alpha \in \mathbf{R}$ je parametr):

1. $$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}\log(1+e^x)}dx$$

   Návod/řešení: Konverguje, u 0 srovnej s $1/\sqrt{x}$ a u ∞ srovnej s $2/x^{\frac{3}{2}}$.

2. $$\int_{-\infty}^\infty e^{-\alpha x^2}dx$$

   Návod/řešení: Konverguje pro $\alpha > 0$, pro $\alpha > 0$ na $(-\infty, -1]$ a $[1, \infty)$ srovnej s $e^{-\alpha|x|}$ nebo limitně srovnej s $\frac{1}{x^2}$. Pro $\alpha \leq 0$ srovnej s 1. Na $[-1, 1]$ je funkce spojitá.

3. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\Big(\frac{1}{\sin x}\Big)dx$$

   Návod/řešení: Konverguje. Použijte srovnávací kritérium a $|f(x)| \leq 1$.

4. $$\int_0^\infty \sin\Big(\sqrt{x^{2\alpha}+1} - x^\alpha\Big)dx$$

   Návod/řešení: Konverguje pro $\alpha > 1$, U $+\infty$ limitně srovnáme se $\sin\Big(\frac{1}{\sqrt{x^{2\alpha}+1}+x^\alpha}\Big) \sim \frac{1}{x^\alpha}$ pro $\alpha > 0$ a pro $\alpha \leq 0$ u $+\infty$ limitně srovnáme s 1. To konverguje pro $\alpha > 1$ a pro $\alpha > 1$ je funkce u 0 spojitá.

5. $$\int_0^1 \frac{\arccos x}{\log^\alpha(1/x)}\,dx$$

   Návod/řešení: Konverguje pro $\alpha < \frac{3}{2}$, u 0 se chová jako $\frac{1}{\log^\alpha(1/x)}$, a tedy limitním srovnáním s $\frac{1}{\sqrt{x}}$ konverguje. U 1 limitně srovnáme s $\frac{\sqrt{1-x}}{(1-x)^\alpha}$.

6. $$\int_0^\infty (\pi - 2\arctan x)^\alpha dx$$

   Návod/řešení: Konverguje pro $\alpha > 1$. U 0 je spojitá. U ∞ limitně srovnáme s $\frac{1}{x^\alpha}$,neboť pomocí l'Hospitala zjistíme $\lim_{x\to\infty} \frac{\pi-2\arctan x}{\frac{1}{x}} = 4$.

7. Nalezněte obsah povrchu jednotkové koule v $\mathbf{R}^3$. Návod/řešení: $S = 4\pi$. Koule vznikne rotací funkce $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, $x \in [-1,1]$ kolem osy x. Tedy $S = 2\pi \int_a^b f\sqrt{1+(f')^2} = 2\pi \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2} = 2\pi \int_{-1}^1 1\, dx$.

8. Nalezněte obsah plochy mezi grafy funkcí $\frac{x^2}{2}$ a $\frac{1}{1+x^2}$. Návod/řešení: $S = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}$. Z rovnice $\frac{x^2}{2} = \frac{1}{1+x^2}$ dostaneme $x = \pm 1$. Pak $S = \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{x^2}{2}\right) dx = \left[\arctan x - \frac{x^3}{6}\right]_{-1}^1 = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}$.

9. Pomocí Riemanova integrálu spočtěte $\lim_{n\to\infty} \frac{1^p+2^p+\ldots+n^p}{n^{p+1}}$, $p > 1$. Návod/řešení: $\frac{1}{p+1}$, $\frac{1^p+2^p+\ldots+n^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{n}\left(\left(\frac{1}{n}\right)^p + \left(\frac{2}{n}\right)^p + \ldots + \left(\frac{n}{n}\right)^p\right)$. Toto je Riemannovský součet funkce x^p, a tedy $\lim = \int_0^1 x^p\, dx = \frac{1}{p+1}$.

10. Buď $(X, \mathcal{A})$ měřitelný prostor. Řekneme, že $A \in \mathcal{A}$ je *atom*, pokud pro každou $B \in \mathcal{A}$ platí $B \subset A \implies (B = A \vee B = \emptyset)$. Ukažte, že existuje σ-algebra, která má pouze jediný atom, totiž $\emptyset$.

    Návod/řešení: Stačí definovat $X = (0,1) \setminus \bigcup_{j=1}^{+\infty} \bigcup_{k=1}^{2^j} k2^{-j}$ a $A \in \mathcal{A}$, pokud je možné ha zapsat ve tvaru $(k2^{-j}, K2^{-j})$ s k, K, j splňujícími $j \in \mathbb{N}$, $k < K$, $k, K \in \{0, \ldots, 2^j\}$.

11. Pokud σ-algebra obsahuje nekonečný spočetný systém neprázdných po dvou disjunktních množin, je nespočetná. Dokažte.

    If a σ-algebra contains infinite coutable system of nonempty pairwise disjoint sets, it is uncountable. Prove.

12. [Rudin, 1977, Sekce 1, Cvičení 1] Existuje nekonečná σ-algebra, která má pouze spočetně mnoho prvků?

    Návod/řešení: Neexistuje. Buď má alespoň spočetně atomů nebo má pouze konečně atomů. Pak ukážeme, že do ní patří striktně klesající posloupnost množin. V obou případech existuje spočetný systém neprázdných po dvou disjunktních množin z $\mathcal{A}$. σ-algebra obsahující takový systém už musí být nespočentná.

13. [Rudin, 1977, Sekce 1, Cvičení 5] Dokažte, že množina všech bodů, v nichž konverguje posloupnost měřitelných funkcí, je měřitelná množina.

    Návod/řešení: Označme posloupnost funkcí $f_n : X \to \mathbb{R}$, $A = \{x \in X, \exists a \in \mathbb{R} : f_n(x) \to a \quad \text{pro } n \to +\infty\}$. Z BC podmínky plyne

    $$A = \bigcap_{j=1}^{+\infty} \bigcup_{n_0 \in \mathbb{N}} \bigcap_{n,m > n_0} \{|f_n(x) - f_m(x)| < \frac{1}{j}\},$$

    tedy A je měřitelná.

4 3. cvičení

Věta (Zobecněná Leviho věta)**.** *Buďte funkce $f_n : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}^*$ měřitelné pro $n \in \mathbb{N}$.*

1. *Jsou-li $f_n \nearrow f$ pro $n \to +\infty$a $\int_X f_1 \,\mathrm{d}\mu > -\infty$, platí $\int_X f_n \,\mathrm{d}\mu \nearrow \int_X f \,\mathrm{d}\mu$.*
2. *Jsou-li $f_n \searrow f$ pro $n \to +\infty$a $\int_X f_1 \,\mathrm{d}\mu < +\infty$, platí $\int_X f_n \,\mathrm{d}\mu \searrow \int_X f \,\mathrm{d}\mu$.*

Věta (Lebesgueova; o konvergentní majorantě)**.** *Buď $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou a f_n, f měřitelné funkce takové, že $f_n \to f$ s.v. Nechť dále existuje funkce $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ taková, že $|f_n| \le g$ s.v. pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Pak $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ a $\int f_n \, d\mu \to \int f \, d\mu$.*

Nalezněte $\lim_{n\to\infty}$ z následujících integrálů:

1. $\int_0^1 x^n \, dx$, Návod/řešení: 0, Z Lebesgueovy věty a $0 \le x^n \le x$ nebo z Leviho.
2. $\int_0^{100} \frac{e^{x^3}}{1+nx} \, dx$, Návod/řešení: 0, Z Lebesgueovy věty a $0 \le f_n \le \frac{e^{x^3}}{1+x}$ nebo z Leviho.
3. $\int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^2} \, dx$, Návod/řešení: 0, Z Lebesgueovy věty a $0 \le f_n \le \frac{1}{2}$.
4. $\int_0^\infty \frac{\log(x+n)}{n} e^{-x} \cos x \, dx$, Návod/řešení: 0, Z Lebesgueovy věty a $|f_n| \le e^{-x} \frac{x+n}{n} \le e^{-x}(x+1)$.
5. $\int_0^1 nx^{15} \sin\left(\frac{x^2}{n}\right) dx$, Návod/řešení: $\frac{1}{18}$; Bodová limita je $x^{17} \frac{\sin \frac{x^2}{n}}{\frac{x^2}{n}} \to x^{17}$. Z Lebesgueovy věty a $|f_n| \le nx^{15} \frac{x^2}{n} = x^{17}$.
6. $\int_0^\infty e^{-x^n} \, dx$, Návod/řešení: 1; Z Lebesgueovy věty a $f_n \le 1$ na $(0, 1)$ a $f_n \le e^{-x}$ na $(1, \infty)$, nebo z Leviho.
7. $\int_0^\infty \frac{dx}{(1+\frac{x}{n})^n \sqrt[n]{x}} \, dx$, Návod/řešení: 1; Bodová limita je $\frac{1}{e^x \cdot 1}$ a $\int_0^\infty e^{-x} = 1$. Z Lebesgueovy věty a $f_n \le \frac{1}{\sqrt{x}}$ na $(0, 1)$ a $f_n \le \frac{1}{(1+\frac{x}{n})^n} \le \frac{1}{1+\frac{x}{n}n+\frac{x^2}{n^2}\frac{n(n-1)}{2}} \le \frac{1}{1+\frac{x^2}{4}}$ na $(1, \infty)$.

Spočtěte (za pomoci Heineho věty) $\lim_{a\to\infty} F(a)$ a $\lim_{a\to 0+} F(a)$ pro $F(a) = \int_0^\infty \frac{e^{-ax^2}}{1+x} \, dx$, Návod/řešení: 0 a ∞; Pro $a_n \to \infty$ a $a_n \ge 1$ platí $\frac{e^{-a_n x^2}}{1+x} \le e^{-x^2}$ což je integrovatelné. Z Lebesgue a $\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{e^{-a_n x^2}}{1+x} = \int_0^\infty \lim_{n\to\infty} \frac{e^{-a_n x^2}}{1+x} = 0$, a tedy podle Heineho $\lim_{a\to\infty} F(a) = 0$. Zřejmě $e^{-ax^2} \ge \frac{1}{e}$ pro $x \le \frac{1}{\sqrt{a}}$. Tedy $\int_0^\infty \frac{e^{-ax^2}}{1+x} \ge \int_0^{\frac{1}{\sqrt{a}}} \frac{1}{e(1+x)} = \frac{1}{e} \log\left(\frac{1}{\sqrt{a}} + 1\right) \overset{a\to 0+}{\to} \infty$.

[Rudin, 1977, Sekce 1, cvičení 9] Buď $(X, \mathcal{A}, \mu)$ měřitelný prostor, $f : X \to [0, +\infty]$, $\int_X f \,\mathrm{d}\mu = c \in (0, +\infty)$, $\alpha \in (0, +\infty)$. Ukažte, že

$$\lim_{x\to+\infty} \int_X n \lg(1 + (f/n)^\alpha) \,\mathrm{d}\mu = \begin{cases} +\infty, & \text{pro } \alpha \in (0,1), \\ c, & \text{pro } \alpha = 1, \\ 0, & \text{pro } \alpha \in (1, +\infty). \end{cases}$$

5 4. cvičení

Důsledek (Levi)**.** *Pro nezáporné měřitelné funkce f_n na X platí*

$$\int\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right)\,d\mu = \sum_{n=1}^{\infty}\int f_n\,d\mu.$$

Důsledek (Lebesgue)**.** *Jsou-li f_i měřitelné, $\sum_{i=1}^{\infty} f_i$ konverguje s.v., a $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ taková, že $|\sum_{i=1}^{n} f_i| \le g$ s.v. pro všechna n, pak $\sum_{i=1}^{\infty} f_i \in \mathcal{L}^1(\mu)$ a*

$$\int\left(\sum_{i=1}^{\infty} f_i\right)\,d\mu = \sum_{i=1}^{\infty}\int f_i\,d\mu.$$

Vyjádřete následující integrály jako součet řady:

1.
$$\int_0^1 \frac{\log(1-x)}{x}\,dx,$$

   Návod/řešení: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n^2}$;

   Rozvineme do $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{-x^{n+1}}{n}$. Podle Leviho na $\sum_{n=1}^{\infty} -f_n$.

2.
$$\int_0^{\infty} \frac{x}{e^x+1}\,dx,$$

   Návod/řešení: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2}$;

   Rozvineme do $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x e^{-(n+1)x}$. Podle Lebesgua

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int |f_n| = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\infty} x e^{-(n+1)x} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2} < \infty.$$

3.
$$\int_0^1 \frac{x^p\ \log(x)}{1+x^2}\,dx,\ \text{pro } p>0,$$

   Návod/řešení: $\sum_0^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n+p+1)^2}$;

   Rozvineme do $\sum_{n=0}^{\infty} x^p\log(x)(-1)^n x^{2n}$. Podle Lebesgua

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int |f_n| = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\infty} x^p(-1)\log(x)x^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+p+1)^2} < \infty.$$

4.
$$\int_0^{\infty} \log\Big(\frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}\Big)\,dx,$$

   Návod/řešení: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1+(-1)^n}{n^2}$; Rozvineme jako

$$\log(1-e^{-x}) - \log(1+e^{-x}) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-e^{-nx}}{n} + \frac{(-1)^n e^{-nx}}{n}.$$

   Podle Lebesgua

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int |f_n| \le \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\infty} 2\frac{e^{-nx}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2} < \infty.$$

5.

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1+x^q}\, dx \text{ (pro } p, q > 0)\, dx,$$

Návod/řešení: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{p+qn}$;

Zřejmě $\leq x^{p-1}$, a tedy integrál konverguje. Rozvineme do $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{p+qn-1}$. Podle Lebesgueovy věty pro funkce $F_N = \sum_{n=0}^{N} f_n$

$$|\sum_{n=0}^{N} f_n| = |\sum_{n=0}^{N} (-1)^n x^{p+qn-1}| = x^{p-1} \frac{1-(-x)^{Nq+1}}{1+x^q} \leq x^{p-1} \frac{2}{1+x^q} \in L^1(0,1).$$

6.

$$\int_0^{\infty} e^{-x} \cos(\sqrt{x})\, dx.$$

Návod/řešení: $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n!}{(2n)!}$;

Rozvineme do $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-x} \frac{x^n}{(2n)!}$. Podle Lebesgua $\sum_{n=0}^{\infty} \int |f_n| = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-x} \frac{x^n}{(2n)!}$. Indukcí snadno $\int_0^{\infty} x^n e^{-x} = (n)!$ a $\sum \frac{n!}{(2n)!} < \infty$.

6 5. cvičení

Věta (Lebesgueova; o spojité závislosti integrálu na parametru)**.** *Buďte $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou, T metrický prostor a $f : T \times X \to \mathbb{R}$ funkce. Nechť dále*

(i) *$f(t, \cdot)$ je měřitelná pro každé $t \in T$,*

(ii) *$f(\cdot, x)$ je spojitá na T pro s.v. $x \in X$,*

(iii) *existuje $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ taková, že pro všechna $t \in T$ je $|f(t, \cdot)| \leq g$ s.v.*

Pak $f(t, \cdot) \in \mathcal{L}^1(\mu)$ pro všechna $t \in T$ a funkce

$$F : t \mapsto \int f(t, \cdot)\, \mathrm{d}\mu$$

je spojitá na T.

U následujících integrálů vyšetřete pro jaká α konvergují a vyšetřete spojitost na definičním oboru:

1. $$\int_0^\infty \frac{\sin(\alpha x)}{1+x^2}\, dx,$$

   Návod/řešení: spojitá na $\mathbf{R}$; $|f(x, \alpha)| \leq \frac{1}{1+x^2} \in L^1$.

2. $$\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x^2}}{1+x}\, dx,$$

   Návod/řešení: spojitá na $(0, +\infty)$; Pro $\alpha \in [\delta, \infty)$ je $|f(x, \alpha)| \leq e^{-\delta x^2} \in L^1$.

3. $$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+\alpha^2}}\, dx \text{ a nalezněte i } \lim_{\alpha\to\infty} \text{ a } \lim_{\alpha\to 0},$$

   Návod/řešení: spojitá na $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$;

   Pro $|\alpha| > \delta$ je $|f(x, \alpha)| \leq \frac{1}{\sqrt{\delta^2}} = \frac{1}{\delta} \in L^1$.

   Pro $\alpha \in [1, \infty)$ je 1 integrovatelná majoranta a podle Lebesguea a Heineho je

   $$\lim_{\alpha\to\infty} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+\alpha^2}} = \int_0^1 \lim_{\alpha\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+\alpha^2}} = \int_0^1 0 = 0.$$

   Pro $|\alpha| \leq \delta$ je $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+\alpha^2}} \geq \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+\delta^2}} \geq \int_\delta^1 \frac{1}{\sqrt{2}x} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \log\delta \overset{\delta\to 0+}{\to} \infty$.

4. $$\int_0^\infty \frac{x}{1+x^\alpha}\, dx,$$

   Návod/řešení: spojitá na $(2, \infty)$; Pro $\alpha \in [2+\delta, \infty)$ je

   $$|f(x, \alpha)| \leq \begin{cases} \frac{x}{1+x^{2+\delta}} & \text{pro } x > 1 \\ 1 & \text{pro } x < 1. \end{cases}$$

5.
$$\int_0^\infty \frac{\alpha e^{-\alpha x^2}}{1+x}\,dx \text{ a nalezněte i } \lim_{\alpha\to 0+},$$

Návod/řešení: spojitá na $[0,\infty)$; Pro $\alpha \in [\delta, K]$ je $|f(x,\alpha)| \le \frac{Ke^{-\delta x^2}}{1+x} \le Ke^{-\delta x^2} \in L^1$.

Pro spojitost v 0 zprava musíme spočítat $\lim_{\alpha\to 0+} F(\alpha)$. Substitucí $y = \sqrt{a}x$ odhadneme $\int_0^\infty \frac{\alpha e^{-\alpha x^2}}{1+x} \le \int_0^\infty \alpha e^{-\alpha x^2} = \int_0^\infty \sqrt{\alpha} e^{-y^2} = \sqrt{\alpha}\int_0^\infty e^{-y^2} \overset{\alpha\to 0+}{\to} 0$.

6.
$$\int_0^1 \frac{1-x^\alpha}{\log x}\,dx,$$

Návod/řešení: spojitá na $(-1,\infty)$; V 1 lze spojitě dodefinovat a u 0 standardně srovnáme s $\frac{x^\alpha}{\log x}$.

Pro $\delta < 1$ a $\alpha \in [-1+\delta, 0]$ máme $|f(x,\alpha)| \le \frac{x^{-1+\delta}-1}{|\log x|}$ a pro $\alpha \in [0, K]$ je $|f(x,\alpha)| \le \frac{1-x^K}{|\log x|}$.

7 6. cvičení

Věta (Záměna integrálu a derivace)**.** *Buď $I \subset \mathbb{R}$ otevřený interval a $f : I \times X \to \mathbb{R}$ funkce. Nechť dále*

(i) *$f(t, \cdot)$ je měřitelná pro každé $t \in I$,*

(ii) *existuje $N \in \mathcal{A}$, $\mu(N) = 0$, taková, že pro všechna $x \in X \setminus N$ a $t \in I$ existuje vlastní derivace $\frac{d}{dt} f(t,x)$,*

(iii) *existuje $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ taková, že pro všechna $x \in X \setminus N$ a $t \in I$, $|\frac{d}{dt} f(t,x)| \leq g(x)$,*

(iv) *existuje $t_0 \in I$ takové, že $f(t_0, \cdot) \in \mathcal{L}^1(\mu)$.*

Pak $f(t, \cdot) \in \mathcal{L}^1(\mu)$ pro všechna $t \in I$, funkce

$$F : t \mapsto \int_X f(t, \cdot)\,\mathrm{d}\mu$$

je diferencovatelná na I a pro $t \in I$ platí

$$F'(t) = \int_X \frac{d}{dt} f(t, \cdot)\,\mathrm{d}\mu.$$

Spočtěte následující integrály (pomocí věty o záměně derivace a integrálu). Obor konvergence je u každého příkladu napsán.

$$1.\ \int_0^\infty \frac{1 - e^{-ax^2}}{xe^{x^2}},\ a > -1;\ 2.\ \int_0^\infty \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x^2},\ a, b > 0\ (\text{Rada: } \int_0^\infty e^{-x^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2})$$

$$3.\ \int_0^\infty \frac{\arctan ax - \arctan bx}{x},\ a, b > 0 \text{ nebo } a, b < 0;\ 4.\ \int_0^\infty e^{-kx} \frac{\sin ax}{x},\ k > 0,\ a \in \mathbf{R};$$

$$5.\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x),\ a, b > 0.$$

Návody:

$$1. \frac{\ln(a+1)}{2};\ \left|\frac{\partial f(x,a)}{\partial a}\right| = \left|xe^{-(a+1)x^2}\right| \leq xe^{-\delta x^2} \text{ pro } a \in (-1+\delta, \infty).$$

$$2. \sqrt{\pi b} - \sqrt{\pi a};\ \left|\frac{\partial f(x,a,b)}{\partial a}\right| = \left|-e^{-ax^2}\right| \leq e^{-\delta x^2} \text{ pro } a \in (\delta, \infty).$$

$$\int_0^\infty -e^{-ax^2} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}} \Rightarrow F(a,b) = C(b) - \sqrt{\pi a} \text{ a } F(b,b) = 0.$$

$$3. \frac{\pi}{2} \ln \frac{a}{b};\ \left|\frac{\partial f(x,a,b)}{\partial a}\right| = \left|\frac{1}{1+a^2x^2}\right| \leq \frac{1}{1+\delta^2 x^2} \text{ pro } |a| \geq \delta.$$

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+a^2x^2} = \frac{\pi}{2a} \text{ a } F(b,b) = 0.$$

$$4.\ \arctan \frac{a}{k};\ \left|\frac{\partial f(x,a,k)}{\partial a}\right| = \left|e^{-kx} \cos ax\right| \leq e^{-kx} \text{ pro } a \in \mathbf{R}.$$

$$\int_0^\infty e^{-kx} \cos ax = \left[e^{-kx} \frac{a \sin ax - k \cos ax}{a^2 + k^2}\right]_{x=0}^{x=\infty} = \frac{k}{a^2+k^2} \text{ a } F(0,k) = 0.$$

$$5.\ \pi \ln \frac{|a|+|b|}{2};\ \left|\frac{\partial f(x,a,b)}{\partial a}\right| = \left|\frac{2}{a} \frac{a^2 \sin^2 x}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}\right| \leq \frac{2}{\delta} \text{ pro } |a| > \delta$$

$$\text{Substitucí } \tan x = t \text{ spočteme } \frac{\partial F(a,b)}{\partial a} = \frac{\pi}{a+b}.$$

8 8. cvičení

Důsledek (Fubiniova věta pro zúplněnou součinovou míru). *Buďte $(X,\mathcal{A},\mu)$ a $(Y,\mathcal{B},\nu)$ dva úplné prostory se σ-konečnými měrami. Pak pro každou funkci $f \in \mathcal{L}^*(\mu\hat{\otimes}\nu)$ platí:*

1. *funkce $f^y : x \mapsto f(x,y)$ je měřitelná na X pro s.v. $y \in Y$ a funkce $f_x : y \mapsto f(x,y)$ je měřitelná na Y pro s.v. $x \in X$*
2. *funkce $x \mapsto \int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y)$ je měřitelná na X a funkce $y \mapsto \int_X f(x,y)\,\mathrm{d}\mu(x)$ je měřitelná na Y*
3. $$\int_{X\times Y} f\, d(\mu\hat{\otimes}\nu) = \int_X \left(\int_Y f(x,y)\, d\nu(y)\right) d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f(x,y)\, d\mu(x)\right) d\nu(y).$$

Za pomoci Fubiniovy věty ve dvou dimenzích spočtěte

$$3. \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\log x}\, dx \text{ pro } a,b > -1,\ 5. \int_0^\infty \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x^2}\, dx \text{ pro } a,b > 0.$$

Nalezněte míru následujích podmnožin $\mathbf{R}^2$

$$1. \{x^2 < y < x+2\},\ 2. \left\{y \le x,\ 0 < y < \frac{1}{x^2}\right\}.$$

Spočtěte následující dvourozměrné integrály

$$4. \int_M (x^2+y^2)\, dxdy \text{ pro } M = \{|x|+|y| \le 1\},\ 6. \int_M e^{-(x+y)} dxdy \text{ pro } M = \{0 \le x \le y\},$$

$$7. \int_M \frac{x^2}{y^2}\, dxdy \text{ pro } M \text{ omezenou mezi křivkami } x = 2,\ y = x \text{ a } xy = 1,$$

$$8. \int_M (\sqrt{x}+y)\, dxdy \text{ pro } M = \{x^2+y^2 \le x\}$$

Návody:

$$1. \frac{9}{2};\ \int_{-1}^2 \int_{x^2}^{x+2} 1\, dy\, dx = \int_{-1}^2 (x+2-x^2)\, dx.$$

$$2.\ \frac{3}{2};\ \int_0^1 \int_0^x 1\, dy\, dx + \int_1^\infty \int_0^{\frac{1}{x^2}} 1\, dy\, dx = \int_0^1 x\, dx + \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\, dx$$

$$3. \log\frac{b+1}{a+1};\ \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\log x} = \int\int_M x^y = \int_a^b \frac{1}{y+1} = \log\frac{b+1}{a+1}.$$

$$4.\ \frac{2}{3};\ 4\int_0^1 \int_0^{1-x} (x^2+y^2)\, dy\, dx = 4\int_0^1 \left((1-x)x^2 + \frac{(1-x)^3}{3}\right) dx$$

$$5. \sqrt{\pi b} - \sqrt{\pi a};\ \int_0^\infty \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x^2} = \int\int_M e^{-yx^2} = \int_a^b \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{y}} = \sqrt{\pi b} - \sqrt{\pi a}.$$

$$6.\ \frac{1}{2};\ \int_0^\infty \int_0^y e^{-(x+y)}\, dy\, dx = \int_0^\infty e^{-y}(1-e^{-y})\, dy$$

$$7.\ 2\frac{1}{4};\ \int_1^2 \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{x^2}{y^2}\, dy\, dx = \int_1^2 x^2\left(x - \frac{1}{x}\right) dx$$

$$8.\ \frac{8}{15};\int_0^1 \int_{-\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{x-x^2}} (\sqrt{x}+y)\, dy\, dx = 2\int_0^1 \sqrt{x}\sqrt{x-x^2} = 2\int_0^1 (1-z)\sqrt{z}\, dz$$

9 9. cvičení

Věta (Věta o substituci)**.** *Buď $U \subset \mathbb{R}^n$ otevřená, $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ difeomorfismus a $f : \varphi(U) \to \mathbb{R}$ Lebesgueovsky měřitelná funkce. Pak*

$$\int_U f(\varphi(x))\,|\mathcal{J}\varphi(x)|\,dx = \int_{\varphi(U)} f(y)\,dy,$$

má-li jedna strana smysl.

Je-li navíc $B \subset \varphi(U)$ Lebesgueovsky měřitelná množina, platí

$$\int_{\varphi^{-1}(B)} f(\varphi(x))\,|\mathcal{J}\varphi(x)|\,dx = \int_B f(y)\,dy,$$

má-li jedna strana smysl.

Spočtěte následující dvourozměrné integrály

$$1.\ \int_M \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\,dxdy \text{ pro } M = \{x^2+y^2 \le 1\},$$

$$2.\ \int_M \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy \text{ pro } M = \{x^2+y^2 \le x\}.$$

Nalezněte míru následujích množin $M \subset \mathbf{R}^2$

$$3.\ \{(x+y)^3 < xy,\ x \ge 0,\ y \ge 0\},\ 4.\ \{x^3+y^3 < xy,\ x > 0,\ y > 0\},\ 5.\ \{2\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|} \le 1\},$$

$$6.\ \{1 < xy < 2, y < x < 3y\},\ 7. \{y < x^2 < 4y,\ 2x < y^2 < 3x\}\ .$$

Návody:

$$1.\ 2\pi;\ \text{Polární souřadnice a } \int_0^1 \Big(\int_0^{2\pi} \frac{r\,d\varphi}{\sqrt{1-r^2}}\Big)\,dr$$

$$2.\ 2;\ \text{Polární souřadnice a } 0 \le x^2+y^2 \le x \text{ dá } 0 \le r \le \cos\varphi.\ \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Big(\int_0^{\cos\varphi} \frac{r\,dr}{\sqrt{r^2}}\Big)\,d\varphi.$$

$$3.\ \frac{1}{60};\ \text{Transformace } x = r\cos^2\varphi \text{ a } y = r\sin^2\varphi$$

$$\text{transformuje } M \text{ na } 0 \le r \le \sin^2\varphi\cos^2\varphi \text{ a } J_f = 2r\sin\varphi\cos\varphi.$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(\int_0^{\sin^2\varphi\cos^2\varphi} 2r\sin\varphi\cos\varphi\,dr\Big)\,d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5\varphi\cos^5\varphi\,d\varphi$$

$$4.\ \frac{1}{6};\ \text{Transformace } x = r\cos^{\frac{2}{3}}\varphi \text{ a } y = r\sin^{\frac{2}{3}}\varphi$$

$$\text{transformuje } M \text{ na } 0 \le r \le \sin^{\frac{2}{3}}\varphi\cos^{\frac{2}{3}}\varphi \text{ a } J_f = \frac{2}{3}r\sin^{-\frac{1}{3}}\varphi\cos^{-\frac{1}{3}}\varphi.$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(\int_0^{\sin^{\frac{2}{3}}\varphi\cos^{\frac{2}{3}}\varphi} \frac{2}{3}r\sin^{-\frac{1}{3}}\varphi\cos^{-\frac{1}{3}}\varphi\,dr\Big)\,d\varphi = \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi$$

$$5.\ \frac{1}{6};\ \text{Transformace } x = \frac{1}{4}r\cos^4\varphi \text{ a } y = r\sin^4\varphi$$

$$\text{transformuje } M \cap \{x > 0,\ y > 0\} \text{ na } 0 \le r \le 1,\ 0 < \varphi < \frac{\pi}{2} \text{ a tam } J_f = r\sin^3\varphi\cos^3\varphi > 0.$$

$$4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(\int_0^1 r\sin^3\varphi\cos^3\varphi\,dr\Big)\,d\varphi = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\varphi\cos^3\varphi\,d\varphi$$

$$6.\ \frac{1}{2}\log 3;\ \text{Transformace } u = xy,\ v = \frac{x}{y} \text{ neboli } x = \sqrt{uv} \text{ a } y = \sqrt{\frac{u}{v}}$$

$$\text{transformuje } M \text{ na } 1 \le u \le 3,\ 1 < v < 3 \text{ a tam } J_f = \frac{1}{2v} > 0.\ \int_1^2 \Big(\int_1^3 \frac{1}{2v}\, dv \Big)\, du.$$

$$7.\ 1;\ \text{Transformace } u = \frac{x^2}{y},\ v = \frac{y^2}{x} \text{ neboli } x = \sqrt[3]{uv^2} \text{ a } y = \sqrt[3]{u^2 v}$$

$$\text{transformuje } M \text{ na } 1 \le u \le 4,\ 2 < v < 3 \text{ a } J_f = \frac{1}{3}.\ \int_1^4 \Big(\int_2^3 \frac{1}{3}\, dv \Big)\, du.$$

10 10. cvičení

Pomocí Fubiniovy věty nalezněte míru následujích podmnožin $\mathbf{R}^3$

$$1.\ \{0 < x < 3,\ 0 < y < 3,\ xy < z < 1\},\ 2.\ \{x \ge 0,\ y \ge 0,\ 0 \le z \le 1 - x - y\},$$

$$3.\ M \text{ omezená plochami } z = 1 \text{ a } z = x^2 + y^2.$$

Pomocí Fubiniovy věty spočtěte následující trojrozměrné integrály

$$4.\ \int_M x\, dxdydz \text{ pro } M \text{ omezenou } x = 0,\ y = 0\, z = 0,\ y = 3 \text{ a } x + z = 2$$

$$5.\ \int_M z^2\, dxdydz \text{ pro } M = \{x^2 + y^2 + z^2 \le 1,\ x^2 + y^2 + z^2 \le 2z\}.$$

Pomocí Fubiniovy věty nalezněte míru následují podmnožiny $\mathbf{R}^4$

$$6.\ \{x, y, z, w \in [0,1],\ xy < z^2 w\}.$$

Pomocí věty o substituci spočtěte následující trojrozměrné integrály

$$7.\ \int_M 1\, dxdydz \text{ pro } M = \{x^2 + y^2 < z < 1\},$$

$$8.\ \int_M z\, dxdydz \text{ pro } M = \{x^2 + y^2 \le z^2,\ z \in (0,2)\},$$

$$9.\ \int_M 1\, dxdydz \text{ pro } M = \Big\{ \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{3} \le \frac{1}{1 + x^2} \Big\},$$

$$10.\ \int_M 1\, dxdydz \text{ pro } M = \Big\{ (2 - \sqrt{x^2 + y^2})^2 + z^2 \le 1 \Big\}.$$

Návody:

$$1.\ \log 9 - \frac{7}{12};\ \int_0^3 \int_0^{\min(\frac{1}{x},3)} \int_{xy}^1 1\, dz\, dy\, dx =$$

$$= \int_0^{\frac{1}{3}} \int_0^3 \int_{xy}^1 1\, dz\, dy\, dx + \int_{\frac{1}{3}}^3 \int_0^{\frac{1}{x}} \int_{xy}^1 1\, dz\, dy\, dx\ .$$

$$2.\ \frac{1}{6};\ \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} 1\, dz\, dy\, dx$$

$$3.\ \frac{\pi}{2};\ z \text{ je od } 0 \text{ do } 1 \text{ je řez kruh o poloměru } \sqrt{z} :\ \int_0^1 \pi(\sqrt{z})^2\, dz.$$

4. 4; $\int_0^2 \int_0^3 \int_0^{2-x} x \; dz \; dy \; dx$

5. $\dfrac{59}{480}\pi$; Pro $z \in [0, \frac{1}{2}]$ je řez kruh o poloměru $\sqrt{2z - z^2}$, pro $z \in [\frac{1}{2}, 1]$ je řez kruh o poloměru $\sqrt{1-z^2}$: $\int_0^{\frac{1}{2}} z^2\pi(\sqrt{2z-z^2})^2 \; dz + \int_{\frac{1}{2}}^2 z^2\pi(\sqrt{1-z^2})^2 \; dz$.

6. $\int_0^1 \int_0^1 \int_0^{z^2 w} \int_0^1 1 \; dx \; dy \; dz \; dw + \int_0^1 \int_0^1 \int_{z^2 w}^1 \int_0^{\frac{z^2 w}{y}} 1 \; dx \; dy \; dz \; dw$

7. $\dfrac{\pi}{2}$; Válcové souřadnice $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ z = a,$ pak $J_f = r > 0$.

$x^2 + y^2 < z < 1$ transformuji na $r^2 < a < 1$: $\int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{r^2}^1 r \; da \; dr \; d\varphi$.

8. 4π; Válcové souřadnice $\int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^a ar \; dr \; d\varphi \; da.$

9. $\sqrt{6}\pi^2$; Upravené válcové souřadnice $y = \sqrt{2}r\cos\varphi,\ z = \sqrt{3}r\sin\varphi,\ x = a,$

pak $J_f = \sqrt{6}r > 0.$ $\int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{\frac{1}{a^2+1}}} \sqrt{6}r \; dr \; d\varphi \; da$.

10. $4\pi^2$; Válcové souřadnice dají $(2-r)^2 + a^2 \leq 1,$ a tedy $r \in [1, 3]$.

$$\int_0^{2\pi} \int_1^3 \int_{-\sqrt{1-(2-r^2)}}^{\sqrt{1-(2-r^2)}} r \; da \; dr \; d\varphi \; .$$

11 11. cvičení

Spočtěte následující trojrozměrné objemy či integrály

1. $\mathcal{L}^3(M)$ pro $M = \{x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z,\ x^2 + y^2 \leq z^2\}$,

2. Spočtěte 1. jak přes sférické, tak i válcové souřadnice},

3. $\mathcal{L}^3(M)$ pro $M = \left\{ \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right)^2 \leq x^2 y \right\}$ a $a, b, c > 0$,

4. $\mathcal{L}^3(M)$ pro $M = \{a(x^2 + y^2) + z \leq a,\ z \geq 0\}$ v závislosti na $a \in \mathbf{R}$.

5. $\mathcal{L}^3(M)$ pro $M = \left\{ (x + y + z)^2 < y,\ x > 0,\ y > 0,\ z > 0 \right\}$,

6. $\displaystyle\int_M e^{xyz} x^2 y \, dxdydz$ pro $M = \{x \geq 0,\ y \geq 1,\ z \geq 1,\ xyz \leq 1\}$

za použití substituce $x = u,\ y = \dfrac{u+v}{u},\ z = \dfrac{u+v+w}{u+v}$.

Návody:

1. π; Sférické souřadnice převedou $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z$ na $0 < r < 2 \sin \psi$ a $x^2 + y^2 \leq z^2$ na $\cos^2 \psi < \sin^2 \psi$. Odtud $\sin \psi > 0$ a $\cos^2 \psi < \sin^2 \psi$, tedy $\psi \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$.

$$\int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2 \sin \psi} r^2 \cos \psi \, dr \, d\psi \, d\varphi.$$

2. π; Válcové souřadnice převedou $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z$ na $r^2 + a^2 \leq 2a$ a $x^2 + y^2 \leq z^2$ na $r^2 \leq a^2$. Z první nerovnosti $2a - a^2 \geq 0$, tedy $a \in (0, 2)$. Dále $r^2 \leq \min\{2a - a^2, a^2\}$ a $2a - a^2 = a^2$ pro $a = 1$.

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^a r \, dr \, da \, d\psi + \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{\sqrt{2a - a^2}} r \, dr \, da \, d\psi \ .$$

3. $\dfrac{\pi a^7 b^6 c}{192}$; Zobecněné sférické souřadnice $x = ar \cos \varphi \cos \psi,\ y = br \sin \varphi \cos \psi$, $z = cr \sin \psi$ a $J_f = abcr^2 \cos \psi$. Podmínku převedu na $0 \leq r^4 \leq a^2 b r^3 \cos^2 \varphi \cos^3 \psi \sin \varphi$. Odtud $\sin \varphi > 0$. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{a^2 b \cos^2 \varphi \cos^3 \psi \sin \varphi} abcr^2 \cos \psi \, dr \, d\psi \, d\psi$.

4. ∞ pro $a < 0$ a $\displaystyle\int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{a(1 - r^2)} r \, dz \, dr \, d\varphi$ pro $a > 0$ přes válcové souřadnice.

5. $\dfrac{1}{60}$; Zobecněné sférické souřadnice $x = ar \cos^2 \varphi \cos^2 \psi,\ y = br \sin^2 \varphi \cos^2 \psi$, $z = cr \sin^2 \psi$ a $J_f = 4r^2 \cos \varphi \sin \varphi \cos^3 \psi \sin \psi$ pro $\varphi, \psi \in (0, \frac{\pi}{2})$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\sin^2 \varphi \cos^2 \psi} 4r^2 \cos \varphi \sin \varphi \cos^3 \psi \sin \psi \, dr \, d\psi \, d\psi.$$

6. $\dfrac{e}{2} - 1$; Jakobián vyjde $J_f = \dfrac{1}{u(u+v)}$. Z $x \geq 0$ plyne $u \geq 0$, z $y \geq 1$ plyne $\dfrac{u+v}{u} \geq 1$, tedy $v \geq 0$, z $z \geq 1$ plyne $w \geq 0$ a z $xyz \geq 1$ plyne $u + v + w \leq 1$.

$$\int_0^1 \int_0^{1-u} \int_0^{1-u-v} e^{u+v+w} u^2 \frac{u+v}{u} \frac{1}{u(u+v)} \, du \, dv \, dw \ .$$

12 Teoretické příklady

Okopírováno od D. Pražáka.

1) Sestrojte funkci $f(x) : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ takovou, že $\int_0^\infty f(x)\,dx$ konverguje, třebaže $f(x) \not\to 0$ pro $x \to +\infty$.

2) Sestrojte nespočetnou množinu míry nula.

3) Najděte příklad funkce, která má Newtonův, ale nemá Lebesgueův integrál.

4) Najděte posloupnost $f_n(x) \to f(x)$, pro kterou můžeme zaměnit limitu a integrál, prestože nejsou splněny předpoklady Leviho ani Lebesgueovy věty.

5) Nechť $h(x) > 0$ s.v. v (omezeném) intervalu $[a, b]$. Pak $I_n = \int_a^b \exp(-nh(x))\,dx \to 0$ pro $n \to \infty$ (dle Lebesgueovy věty s majorantou $g(x) \equiv 1$).

Někdy je užitečné vědět též rychlost konvergence $I_n \to 0$. Následující úvahy pokryjí běžné případy:

(i) Je-li $h(x)$ striktně odražená od nuly, pak $I_n \to 0$ exponenciálně rychle.

(ii) Pro $l > 0$, $\delta > 0$ pevné je $\int_0^\delta \exp(-nx^l)\,dx \sim n^{-1/l}$, $n \to \infty$.

(iii) *Tvrzení.* Nechť pro jisté $x_0 \in [a, b]$ je $h(x_0) = 0$ ostré globální minimum. Nechť navíc $h^{(k)}(x_0) = 0$ pro $k = 0, \ldots l - 1$, avšak $h^{(l)}(x_0) \neq 0$. Potom $I_n \sim n^{-1/l}$, $n \to \infty$.

Příklady aplikací: $\int_0^1 x^n\,dx \sim n^{-1}$, $\int_0^\pi \sin^n x\,dx \sim n^{-1/2}$.

6) Ukažte, že funkce $F(a) = \int_\alpha^\beta \frac{dx}{\sqrt{|x-a|}}$ je spojitá v intervalu $I = (\alpha, \beta)$, třebaže Větu o spojité závislosti nelze aplikovat na žádném (netriviálním) podintervalu I.

7) Existuje (netriviální) konečně aditivní míra na $\mathbb{N}$, která nabývá pouze hodnot 0 a 1.

Ekvivalentně: existuje prvoideál, tj. systém $\mathcal{I}$ podmnožin $\mathbb{N}$, splňující:

i) $\emptyset \in \mathcal{I}$, $\mathbb{N} \notin \mathcal{I}$

ii) $A \in \mathcal{I}$, $B \subset A \implies B \in \mathcal{I}$

iii) $A \in \mathcal{I}$, $B \in \mathcal{I} \implies A \cup B \in \mathcal{I}$

iv) pro každé $A \subset \mathbb{N}$ je buď $A \in \mathcal{I}$ nebo $A^c \in \mathcal{I}$

8) Existuje $E \subset \mathbb{R}$ tzv. „spravedlivá množina“: pro každý interval $I \subset \mathbb{R}$ je

$$\lambda^*(E \cap I) = \lambda^*(E^c \cap I) = \frac{1}{2}\lambda(I).$$

Spravedlivá množina není měřitelná.

13 Zápočtové písemky

1. pokusná zápočtová písemka

1. Spočtěte
$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{n\sqrt{x}}{1+n^2x^2}\,dx.$$

2. Najděte definiční obor funkce a vyšetřete její spojitost na něm.
$$F(a)=\int_{-\pi}^{\pi}\sqrt{a^2\sin^2(x)+x^2}\,dx.$$

3. Spočtěte F' pro funkci z minulého příkladu. Spočtěte $\lim_{a\to+\infty}F(a)$. Načrtněte graf F. Najděte $\sup F$ a $\inf F$.

2. pokusná zápočtová písemka

1. Buď $M=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; |x|<y, 2y-1<x\}$. Rozhodněte, zda je množina měřitelná. Stanovisko co nejpodrobněji odůvodněte. Spočtěte
$$\int_M x\,\mathrm{d}(x,y).$$

2. Buď $M=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; x^2+y^2<R^2, x^2+y^2<2Ry, x>y\}$. Rozhodněte, zda je množina měřitelná. Stanovisko co nejpodrobněji odůvodněte. Spočtěte $\lambda^2(M)$.

1. zápočtová písemka, var. A

1. Spočtěte
$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{1+\sin(x/n)}{1+x^2}\,dx.$$

2. Vyjádřete pomocí řady čísel
$$\int_0^1\frac{\lg(1-x)}{\sqrt{x}}\,dx.$$

3. Vyšetřete spojitost funkce
$$F(a)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin(ax)}{\sqrt{x}(1+x)}\,dx$$
na jejím definičním oboru.

4. Najděte definiční obor funkce
$$F(b)=\int_0^1\frac{x^b-x^4}{\lg(x)}\,dx.$$
Vyšetřete na něm spojitost funkce F, najděte její derivaci a s její pomocí funkci F vyjádřete pomocí elementárních funkcí.

1. zápočtová písemka, var. B

1. Spočtěte
$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1\frac{\cos(x/n)}{\sqrt{x}}\,dx.$$

2. Vyjádřete pomocí řady čísel
$$\int_0^1 \frac{\lg(1-\sqrt{x})}{x}\,dx.$$
3. Vyšetřete spojitost funkce
$$F(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{1+x^a}\,dx$$
na jejím definičním oboru.
4. Najděte definiční obor funkce
$$F(a) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-4x^2} - e^{-ax^2}}{x}\,dx.$$
Vyšetřete na něm spojitost funkce F, najděte její derivaci a s její pomocí funkci F vyjádřete pomocí elementárních funkcí.

1. zápočtová písemka, var. C

1. Spočtěte
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}(nx)}{1+x^2}\,dx.$$
2. Vyjádřete pomocí řady čísel
$$\int_0^{+\infty} \lg(1-e^{-x})\,dx.$$
3. Vyšetřete spojitost funkce
$$F(a) = \int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^a}\,dx$$
na jejím definičním oboru.
4. Najděte definiční obor funkce
$$F(b) = \int_0^{+\infty} e^{-ax} \frac{\sin(x)}{x}\,dx.$$
Najděte její derivaci a s její pomocí funkci F vyjádřete pomocí elementárních funkcí.

1. zápočtová písemka, var. D

1. Spočtěte
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi} \frac{\cos(\frac{nx}{nx+1})}{x^{\frac{2}{3}}}\,dx.$$
2. Vyjádřete pomocí řady čísel
$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \lg \frac{1}{1-x}\,dx.$$
3. Vyšetřete spojitost funkce
$$F(a) = \int_0^{10} \frac{\sin(x)}{x^a}\,dx$$
na jejím definičním oboru.

4. Najděte definiční obor funkce
$$F(a) = \int_1^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}\,dx.$$
Najděte její první a druhou derivaci jako integrál a s její pomocí vyšetřete monotonii a konvexitu funkce F.

1. test, var. E

1. Evaluate
$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg}(nx)}{1+x^2}\,dx.$$
2. Express as series of numbers
$$\int_0^{+\infty}\lg(1-e^{-x})\,dx.$$
3. Study continuity of the function
$$F(a) = \int_{\frac{1}{2}}^{+\infty}\frac{\cos(x)}{x^a}\,dx$$
on its domain.
4. Find domain of the function
$$F(b) = \int_0^{+\infty} e^{-ax}\frac{\sin(x)}{x}\,dx.$$
Find its derivative and express it by means of elementary functions.

2. test, var. A

1. Buď $M = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2; |x-1|<y, -x+2y-3<0\}$. Rozhodněte, zda je množina měřitelná. Stanovisko co nejpodrobněji odůvodněte. Spočtěte
$$\int_M y\,\mathrm{d}(x,y).$$
Pokud používáte nějakou větu, ospravedlňte její použití.
2. Buď $M = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2; x^2+y^2<1, y>1/(4x), x,y>0\}$. Rozhodněte, zda je množina měřitelná. Stanovisko co nejpodrobněji odůvodněte. Spočtěte $\lambda^2(M)$. Pokud používáte nějakou větu, ospravedlňte její použití.

2. zápočtový test 2019 – var. A

1) $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |x-1| < y,\ -x+2y-3 < 0\}$

Definujeme $G(x,y) = |x-1| - y$; $F(x,y) = -x+2y-3$. Pak je $M = G_{-1}((-\infty,0)) \cap F_{-1}((-\infty,0))$. Protože jsou F i G spojité, je M otevřená a tedy (borelovsky / lebesgueovsky) měřitelná!

Fce $f(x,y) := y$ je na M nezáporná, je spojitá a tedy lebesgueovsky měřitelná. Z toho plyne, že $\int_M f \, d\lambda^2$ existuje.

Je tedy možné použít Fubiniho větu. Navíc, protože je M otevřená, jsou i její projekce na osy x a y otevřené a tedy (lebesgueovsky) měřitelné!

Spočítáme projekci na osu x: na M platí: $|x-1| < y < \frac{x+3}{2}$, musí tedy platit $|x-1| < \frac{x+3}{2}$, pak $x \in P_1 M$

$x > 1:\quad x-1 < \frac{x+3}{2},\quad \frac{x}{2} < \frac{5}{2};\quad x < 5 \Rightarrow x \in (1,5)$

$x \leq 1:\quad 1-x < \frac{x+3}{2},\quad -\frac{1}{2} < \frac{3x}{2};\quad -\frac{1}{3} < x \Rightarrow x \in (-\frac{1}{3}, 1]$

$P_1 M = (-\frac{1}{3}, 5)$ a příslušné řezy jsou $M^x := (|x-1|, \frac{x+3}{2})$

$$\int_M f \, d\lambda^2 = \int_{-1/3}^{1} \int_{1-x}^{\frac{x+3}{2}} y \, dy \, dx + \int_{1}^{5} \left(\int_{x-1}^{\frac{x+3}{2}} y \, dy \right) dx = \frac{1}{2} \int_{-1/3}^{1} \frac{x^2+6x+9}{4} - 1 + 2x - x^2 \, dx$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{1}^{5} \frac{x^2+6x+9}{4} - 1 + 2x - x^2 \, dx = \frac{1}{2} \int_{-1/3}^{5} -\frac{3x^2}{4} + \frac{7}{2}x + \frac{5}{4} \, dx =$$

$$\frac{1}{2} \left[-\frac{x^3}{4} + \frac{7}{4}x^2 + \frac{5}{4}x \right]_{-1/3}^{5} = \frac{1}{8} \left(-125 + 7 \cdot 25 + 25 - \left(\frac{1}{27} + \frac{7}{9} - \frac{5}{3} \right) \right) = \frac{256}{27}$$

2) $M = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x^2+y^2<1,\ y>1/4x,\ x,y>0\}$

Definujme $F_1(x,y)=x^2+y^2-1$, $F_2(x,y)=\frac{1}{4x}-y$, $F_3(x,y)=x$, $F_4(x,y)=y$

F_1,F_2,F_3,F_4 jsou spojité na ot. množině $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x,y>0\}=N$

Protože je $M=F_1^{-1}((-\infty,0))\cap F_2^{-1}((-\infty,0))\cap N$, je otevřená tedy lebesgueovsky měřitelná.

Pro výpočet $\lambda^2(M)$ použijeme větu o substituci a polární souřadnice φ.
Konstantní fce je měřitelná a integrabilní.

$$\lambda^2(M)=\int_{\varphi^{-1}(M)} r\,d(\alpha,r)\ ;\quad \text{kde } \varphi^{-1}(M)=\left\{(\alpha,r)\in\mathbb{R}^2;\ r>0,\ \alpha\in(0,2\pi),\ \alpha\in\left(0,\tfrac{\pi}{2}\right],\ r<1,\ r\sin\alpha>\frac{1}{4r\cos\alpha}\right\}$$

Spočítáme projekci $\varphi^{-1}(M)$ na osu α: $r\in(0,1)$ a

$$r^2>\frac{1}{4\sin\alpha\cos\alpha},\quad r>\frac{1}{2\sqrt{\sin\alpha\cos\alpha}}$$

Potřebujeme: $1>\frac{1}{4\sin\alpha\cos\alpha}$, $\sin(2\alpha)>\frac{1}{2}$, $2\alpha\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$

$\Rightarrow \alpha\in\left(\frac{\pi}{12},\frac{5\pi}{12}\right)+k\pi$, $P_\alpha M=\left(\frac{\pi}{12},\frac{5\pi}{12}\right)$ a $M^\alpha=\left(\frac{1}{2\sqrt{\sin\alpha\cos\alpha}},1\right)$

Počítáme: $$\lambda^2(M)=\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{5\pi}{12}}\left(\int_{\frac{1}{2\sqrt{\cos\alpha\sin\alpha}}}^{1} r\,dr\right)d\alpha=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{5\pi}{12}}\left[r^2\right]_{\frac{1}{2\sqrt{\sin\alpha\cos\alpha}}}^{1}d\alpha=$$

$$\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{5\pi}{12}}1-\frac{1}{2\sin(2\alpha)}\,d\alpha=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\pi-\frac{1}{2\cdot 2}\int_{\pi/12}^{\frac{5\pi}{12}}\frac{2\sin 2\alpha}{1-\cos^2(2\alpha)}\,d\alpha\right)=\left|\ \cos 2\alpha=t\right.$$

$$\frac{1}{6}\pi-\frac{1}{8}\int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{1}{1-t^2}\,dt=\frac{\pi}{6}-\frac{1}{8}\int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\,dt\left(-\frac{1}{2}\right)=$$

$$\frac{\pi}{6}+\frac{1}{16}\left[\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right]_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\pi}{6}+\frac{1}{16}\left(\ln\left(\frac{|\sqrt{3}-2|}{\sqrt{3}+2}\right)-\ln\left(\frac{\sqrt{3}+2}{|\sqrt{3}-2|}\right)\right)=\frac{\pi}{6}+\frac{1}{8}\ln\frac{|\sqrt{3}-2|}{\sqrt{3}+2}$$

2. test, var. B

1. Buď $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x < |y|, 0 > |2y+1| - x\}$. Rozhodněte, zda je množina měřitelná. Stanovisko co nejpodrobněji odůvodněte. Spočtěte
$$\int_M x \, \mathrm{d}(x,y).$$
Pokud používáte nějakou větu, ospravedlňte její použití.

2. Buď $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 < 1, x^2 + (y-2)^2 < 4\}$. Rozhodněte, zda je množina měřitelná. Stanovisko co nejpodrobněji odůvodněte. Spočtěte $\lambda^2(M)$. Pokud používáte nějakou větu, ospravedlňte její použití.

2. zápočtový test - 2019 - var. B

1) $M = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x-|y|<0,\ |2y+1|-x<0\} = G_{-1}((-\infty,0)) \cap \{F<0\}$,

je-li $G(x,y) = x-|y|$, $F(x,y)=|2y+1|-x$. Protože jsou F, G spojité,

jsou množiny $\{G<0\}$ a $\{F<0\}$ otevřené a tedy také M.

Z otevřenosti M plyne borelovská i lebesgueovská měřitelnost.

Protože je $f(x,y)=x$ je spojitá a měřitelná a z $|2y+1|<x$ plyne $x>0$

a tedy $\int_M f$ existuje a můžeme použít Fubiniho větu.

M je množina $|2y+1| < x < |y|$ spočítáme projekci na y

$|2y+1| < |y|$: nulové body abs. hodnot $0, -\frac{1}{2}$

$(-\infty,-\frac{1}{2}]$: $-2y-1 < -y$; $-1<y$ $\longrightarrow (-1,-\frac{1}{2}]$

$[-\frac{1}{2},0]$: $2y+1<-y$; $3y<-1$, $y<-\frac{1}{3}$ $\longrightarrow [-\frac{1}{2},-\frac{1}{3})$

$[0,+\infty)$: $2y+1<y$; $y<-1$ $\longrightarrow \emptyset$

Projekce na y je $(-1,-1/3)$ a řezy jsou pro $y\in(-1,-\frac{1}{2}]$ intervaly $(-2y-1,-y)$ a pro $y\in(-\frac{1}{2},-\frac{1}{3})$ interval $(2y+1,-y)$.

$$\int_M f\,d\lambda^2 = \int_{-1}^{-1/2}\left(\int_{-2y-1}^{-y} x\,dx\right)dy + \int_{-1/2}^{-1/3}\left(\int_{2y+1}^{-y} x\,dx\right)dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{-1/2} y^2-(2y+1)^2\,dy + \frac{1}{2}\int_{-1/2}^{-1/3} y^2-(2y+1)^2\,dy = \frac{1}{2}\int_{-1}^{-1/3} y^2-4y^2-4y-1\,dy$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{-1/3} -3y^2-4y-1\,dy = \frac{1}{2}\left[-y^3-2y^2-y\right]_{-1}^{-1/3} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(+\frac{1}{27}-\frac{2}{9}+\frac{1}{3}-\cancel{(1-2+1)}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{1-6+9}{27} = \frac{2}{27}$$

2) $M=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x^2+y^2-1<0,\ x^2+(y-2)^2-4<0\}$

Množina M je lebesgueovsky měřitelná, protože je otevřená. Je totiž

$M=\{G<0\}\cap\{F<0\}$, kde $G(x,y)=x^2+y^2-1$, $F(x,y)=x^2+(y-2)^2-4$

a F, G jsou spojité.

a) $\lambda^2(M)$ spočítáme pomocí polárních souřadnic φ

$$\lambda^2(M)=\int_{\varphi_{-1}(M)} r\,d(r,\alpha),$$ kde $\varphi_{-1}(M)=\{(r,\alpha)\in(0,+\infty)\times(0,2\pi);\ r^2<1,\ r^2<4r\sin\alpha\}$

Množina $\varphi_{-1}(M)$ měřitelná a $r\geq 0$, můžeme tedy použít Fubiniho větu

Projekce na α: $\sin\alpha>0$, tedy $\alpha\in(0,\pi)$

Řezy jsou: $r<1$, $r>0$, $r<4\sin\alpha$, $1<4\sin\alpha$ pro $\frac14<\sin\alpha$

$\alpha\in(a,\pi-a)$, kde $a=\arcsin\frac14$

Tedy řezy jsou $r\in(0,1)$ pro $\alpha\in(a,\pi-a)$ a

$r\in(0,4\sin\alpha)$ pro $\alpha\in(0,a]\cup[\pi-a,\pi)$

$$\int_0^a\left(\int_0^{4\sin\alpha} r\,dr\right)d\alpha+\int_a^{\pi-a}\left(\int_0^1 r\,dr\right)d\alpha+\int_{\pi-a}^{\pi}\left(\int_0^{4\sin\alpha} r\,dr\right)d\alpha=$$

$$\int_0^a 8\sin^2\alpha\,d\alpha+\int_a^{\pi-a}\frac12\,d\alpha+\int_{\pi-a}^{\pi}8\sin^2\alpha\,d\alpha=4\int_0^a 1-\cos2\alpha\,d\alpha+\frac{\pi-2a}{2}+4\int_{\pi-a}^{\pi}1-\cos2\alpha\,d\alpha=$$

$$=4\int_0^a-\frac{\sin2\alpha}{2}\,d\alpha+4\int_{1-a}^{\pi}-\frac{\sin2\alpha}{2}\,d\alpha+\frac{\pi}{2}+7a=\frac{\pi}{2}+7\arcsin\left(\frac14\right)-4\frac{\sin\left(2\arcsin\frac14\right)}{2}$$

$$+4\frac{\sin\left(2\left(\pi-\arcsin\frac14\right)\right)}{2}=\frac{\pi}{2}+7\arcsin\frac14+2\cdot\frac44\cdot\sqrt{1-\frac1{16}}=\frac{\pi}{2}+7\arcsin\frac14-\frac{\sqrt{15}}{2}$$

$=1{,}4030\ldots$

b) bez nějaké substituce, Fubiniho větu můžeme použít, protože M je měřitelná!

projekce na x: $y^2 < 1-x^2$; $(y-2)^2 < 4-x^2$

$|y| < \sqrt{1-x^2}$; $y \in (2-\sqrt{4-x^2}, 2+\sqrt{4-x^2})$

$\rightarrow y \in (-\sqrt{1-x^2}, \sqrt{1-x^2}) \cap (2-\sqrt{4-x^2}, 2+\sqrt{4-x^2})$

tato množina je neprázdná, pokud $\sqrt{1-x^2} > 2-\sqrt{4-x^2}$,

$\cancel{1-x^2} > 4 - 4\sqrt{4-x^2} + 4 \cancel{-x^2}$, $4\sqrt{4-x^2} \underset{|x|<2}{>} 7$, $16(4-x^2) > 49$

$4-x^2 > \frac{49}{16}$, $\frac{15}{16} > x^2$, $x \in \left(-\frac{\sqrt{15}}{4}, \frac{\sqrt{15}}{4}\right)$

řezy jsou: $y \in (2-\sqrt{4-x^2}, \sqrt{1-x^2})$

$$\int_{-\frac{\sqrt{15}}{4}}^{\frac{\sqrt{15}}{4}} \left(\int_{2-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 1 \, dy \right) dx = \int_{-\frac{\sqrt{15}}{4}}^{\sqrt{15}/4} \sqrt{1-x^2} - 2 + \sqrt{4-x^2} \, dx = \left| \begin{matrix} x = \sin t \\ \text{nebo } 2\sin t \end{matrix} \right|$$

$$= \int_{-\arcsin\frac{\sqrt{15}}{4}}^{\arcsin(\sqrt{15}/4)} \cos^2 t \, dt - \sqrt{15} + \int_{-\arcsin\frac{\sqrt{15}}{8}}^{\arcsin\frac{\sqrt{15}}{8}} 2^2 \cdot \cos^2 t \, dt = *$$

Spočítáme PF: $\int \cos^2 t \, dt = \int \frac{1+\cos(2t)}{2} dt = \frac{1}{2}t + \frac{\sin 2t}{4}$ na $\mathbb{R}$

$$* = \arcsin\frac{\sqrt{15}}{4} + \frac{1}{2}\sin\left(2\arcsin\frac{\sqrt{15}}{4}\right) - \sqrt{15} + 4\cdot\arcsin\frac{\sqrt{15}}{8} +$$

$$2\sin\left(2\arcsin\frac{\sqrt{15}}{8}\right) = ** \qquad \left| \sin(2\arcsin x) = 2x\sqrt{1-x^2} \text{ pokud } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \right.$$

• $\frac{1}{2}\sin\left(2\arcsin\frac{\sqrt{15}}{4}\right) - \sqrt{15} + 2\sin\left(2\arcsin\frac{\sqrt{15}}{8}\right) = \frac{\sqrt{15}}{4}\sqrt{1-\frac{15}{16}} - \sqrt{15} +$

$4\frac{\sqrt{15}}{8}\sqrt{1-\frac{15}{64}} = \sqrt{15}\left(\frac{1}{16} - 1 + \frac{7}{16}\right) = -\frac{\sqrt{15}}{2}$

2. test, var. C

1. Buď $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x < y < x^2, x \in (-1,2)\}$. Rozhodněte, zda je množina měřitelná. Stanovisko co nejpodrobněji odůvodněte. Spočtěte
$$\int_M xy \,\mathrm{d}(x,y).$$
Pokud používáte nějakou větu, ospravedlňte její použití.

2. Buď $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; (x^2+y^2)^2 < xy, x > 0, x > y\}$. Rozhodněte, zda je množina měřitelná. Stanovisko co nejpodrobněji odůvodněte. Spočtěte
$$\int_M x^4 \,\mathrm{d}(x,y).$$
Pokud používáte nějakou větu, ospravedlňte její použití.

2. zápočtový test - var. C

1) $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x < y < x^2,\ x \in (-1,2)\}$

Definujeme $F_1(x,y) = x-y$, $F_2(x,y) = y-x^2$, $F_3(x,y) = x$. Tyto fce jsou spojité.

a tedy $\{F_1 < 0\}, \{F_2 < 0\}, \{F_3 \in (-1,2)\}$ jsou otevřené a tedy leb. měřitelné.

$M = \{F_1 < 0\} \cap \{F_2 < 0\} \cap \{F_3 \in (-1,2)\}$ je tedy leb. měřitelná.

Když počítáme $\int_M xy \, d(x,y)$ použijeme Fubiniho větu, M je měřitelná a omezená

(např. $\forall (x,y) \in M: |x| < 2,\ |y| < 4$)

a $f(x,y) = xy$ je spojitá tedy také leb. měřitelná a omezená na M

$\int_M xy \, d(x,y)$ existuje.

Projekce M na x: $x \in (-1,2)$ a $x < x^2$, tj. $x(1-x) < 0 \Rightarrow$
$x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$

$\Rightarrow$ projekce je $(-1,0) \cup (1,+\infty)$

řezy: $y \in (x, x^2)$

$$\int_M xy \, d(x,y) = \int_{-1}^{0} \left(\int_x^{x^2} xy \, dy \right) dx + \int_1^2 \left(\int_x^{x^2} xy \, dy \right) dx =$$

$$= \int_{-1}^{0} x \left[\frac{y^2}{2} \right]_x^{x^2} dx + \int_1^2 x \left(\frac{x^4}{2} - \frac{x^2}{2} \right) dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^{0} x^5 - x^3 \, dx + \frac{1}{2} \int_1^2 x^5 - x^3 \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{x^6}{6} - \frac{x^4}{4} \right]_{-1}^{0} + \frac{1}{2} \left[\frac{x^6}{6} - \frac{x^4}{4} \right]_1^2 = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{4} + \frac{64}{6} - \frac{16}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{4} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{62}{6} - \frac{14}{4} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{31}{3} - \frac{7}{2} \right) = \frac{1}{2} \, \frac{62-21}{6} = \frac{41}{12}$$

2) $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ (x^2+y^2)^2 < xy,\ x>y,\ x>0\}$

M je měřitelná, protože $M = \{F<0\} \cap \{G>0\} \cap \{H>0\}$, kde

$F(x,y) := (x^2+y^2)^2 - xy$, $G(x,y) = x-y$, $H(x,y) = x$ jsou spojité a tedy

leb. měřitelné.

Použijeme polární souřadnice $\varphi(r,\alpha) = (r\cos\alpha, r\sin\alpha)$ s $D(\varphi) = (0,+\infty)\times(0,2\pi)$

a $\operatorname{Jac}\varphi(r,\alpha) = r$, $M \subset \varphi(D(\varphi))$, tedy podle věty o substituci:

$$I = \int_M x^4 \, d(x,y) = \int_{\varphi_{-1}(M)} r^5 \cos^4\alpha \, d(r,\alpha)$$

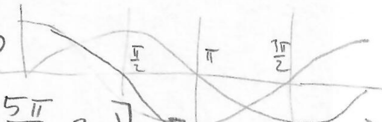
Použijeme Fubiniho větu na měřitelné omezené množině $\varphi_{-1}(M)$ a na

fci $f(r,\alpha) := r^5\cos^4\alpha$, která je spojitá a na M omezená! (Bude vidět později)

$$\varphi_{-1}(M) = \{(r,\alpha) \in D(\varphi);\ r^4 < r^2 \sin\alpha\cos\alpha,\ \cos\alpha > \sin\alpha,\ r\cos\alpha > 0\}$$

(vidíme, že $r<1$, tedy $\varphi_{-1}(M)$ je omezená a f je na ní taky omezená)

Podmínky na α: $0 < \sin\alpha\cos\alpha$; $\cos\alpha > \sin\alpha$, $\cos\alpha > 0$



$$\Rightarrow \alpha \in \left[(0,\tfrac{\pi}{2}) \cup (\pi, \tfrac{3}{2}\pi)\right] \cap \left[(0,\tfrac{\pi}{4}) \cup (\tfrac{5\pi}{4}, 2\pi)\right] \cap \left[(0,\tfrac{\pi}{2}) \cup (\tfrac{3\pi}{2}, 2\pi)\right]$$

$$= (0, \tfrac{\pi}{4})$$

řezy: $r \in (0, \sqrt{\sin\alpha\cos\alpha})$

$$I = \int_0^{\pi/4} \left(\int_0^{\sqrt{\sin\alpha\cos\alpha}} r^5 \cos^4\alpha \, dr \right) d\alpha$$

$$= \int_0^{\pi/4} \frac{1}{6} \sin^3\alpha \cos^7\alpha \, d\alpha \qquad \int_0^{\pi/4} \frac{1}{6} \sin\alpha (1-\cos^2\alpha) \cos^7\alpha \, d\alpha$$

$$= \frac{1}{6} \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} t^7 - t^9 \, dt = \frac{1}{6}\left[\frac{t^8}{8} - \frac{t^{10}}{10}\right]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{10} - \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{16} + \frac{1}{10}\cdot\frac{1}{32}\right)$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{40 - 32 - \frac{5}{2} + 1}{320} = \frac{1}{6} \cdot \frac{\frac{13}{2}}{320} = \frac{13}{12\cdot 320}$$

2. test, var. D

1. Buď $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y - 4x > 0, 0 < 4 - (x-1)^2 - y\}$. Rozhodněte, zda je množina měřitelná. Stanovisko co nejpodrobněji odůvodněte. Spočtěte
$$\int_M x^2 + y \, \mathrm{d}(x,y).$$
Pokud používáte nějakou větu, ospravedlňte její použití.

2. Buď $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; (x^2+y^2)^2 < x^2 y, x > y, x > 0\}$. Rozhodněte, zda je množina měřitelná. Stanovisko co nejpodrobněji odůvodněte. Spočtěte
$$\int_M xy \, \mathrm{d}(x,y).$$
Pokud používáte nějakou větu, ospravedlňte její použití.

2. zápočtový test – 2019 – var. D

1) $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ y - 4x > 0,\ 0 < 4 - (x-1)^2 - y\}$

Definujeme $F(x,y) = y - 4x$, $G(x,y) = 4 - (x-1)^2 - y$. Fce F, G jsou spojité.

$F_{-1}((0,+\infty))$, $G_{-1}((0,+\infty))$ i $F_{-1}((0,+\infty)) \cap G_{-1}((0,+\infty)) = M$ jsou otevřené. M je tedy (Lebesgueovsky) měřitelná.

Protože je fce $f(x,y) = x^2+y$ spojitá, je i (Lebesgueovsky) měřitelná.

Proložme průmět M na x: $4x < y < 4-(x-1)^2$

musí platit: $4x < 4 - (x^2-2x+1)$, $4x < 4 - x^2 + 2x - 1$

$$x^2 + 2x - 3 < 0,\quad (x+3)(x-1) < 0,\quad x \in (-3,1)$$

a příslušné řezy jsou $M_x = (4x, -x^2+2x+3)$

Množina M a fce f na M jsou omezené a tedy ex. $\int_M f\,d\lambda^2$. Je možné použít Fubiniho větu

$$\int_M f\,d\lambda^2 = \int_{-3}^{1}\left(\int_{4x}^{-x^2+2x+3} x^2+y\ dy\right)dx = \int_{-3}^{1} x^2(-x^2-2x+3) + \frac{1}{2}\left((-x^2+2x+3)^2 - (4x)^2\right)dx = \int_{-3}^{1} -x^4-2x^3+3x^2+\frac{1}{2}\left(x^4+4x^2+9-4x^3+12x-6x^2-16x^2\right)dx$$

$$= \int_{-3}^{1} -\frac{x^4}{2} - 4x^3 - 6x^2 + 6x + \frac{9}{2}\,dx = \left[-\frac{x^5}{10} - x^4 - 2x^3 + 3x^2 + \frac{9}{2}x\right]_{-3}^{1} =$$

$$= -\frac{1}{10} - 1 - 2 + 3 + \frac{9}{2} - \left(\frac{81\cdot 3}{10} - 81 + 2\cdot 27 + 27 - \frac{27}{2}\right) =$$

$$= \frac{-1 - 243 + 45 + 135}{10} = \frac{180-244}{10} = -\frac{64}{10} = -6{,}4$$

2) $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ (x^2+y^2)^2 < x^2 y,\ x > y,\ x > 0\}$

Def. $F(x,y) = (x^2+y^2)^2 - x^2 y$, $G(x,y) = y - x$, $H(x,y) = x$, všechny funkce jsou spojité.

Tedy $M = \{F < 0\} \cap \{G < 0\} \cap \{H > 0\}$ je otevřená jako průnik otevřených množin. Tedy je (Lebesgueovsky) měřitelná.

Fce $f(x,y) := xy$ je spojitá, tedy (Lebesgueovsky) měřitelná.

Použijeme větu o substituci a polární souřadnice φ

$$\int_M xy \, d(x,y) = \int_{\varphi_{-1}(M)} r^3 \cos\alpha \sin\alpha \, d(r,\alpha), \text{ kde } \varphi_{-1}(M) = \{(r,\alpha) \in \mathbb{R}^2;\ r > 0,\ \alpha \in (0, 2\pi),\ r^4 < r^3 \cos^2\alpha \sin\alpha,\ \cos\alpha > \sin\alpha,\ \cos\alpha > 0\}$$

Integrujeme měřitelnou množinu,

můžeme použít Fubiniho větu.

Spočítáme projekci na osu α:

$$\left.\begin{aligned} &\alpha \in (0, \tfrac{\pi}{2}) \cap (\tfrac{3\pi}{2}, 2\pi) \\ &\alpha \in (0, \tfrac{\pi}{4}) \cap (-\tfrac{3}{4}\pi, 2\pi) \\ &0 < r < \cos^2\alpha \sin\alpha \Rightarrow \alpha \in (0, \pi) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \alpha \in (0, \tfrac{\pi}{4})$$

a projekce $M_\alpha = (0, \cos^2\alpha \sin\alpha)$.

$$\int_M xy \, d(x,y) = \int_0^{\pi/4} \left(\int_0^{\cos^2\alpha \sin\alpha} r^3 \sin\alpha \cos\alpha \, dr \right) d\alpha = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{4} \cos^8\alpha \sin^4\alpha \sin\alpha \cos\alpha \, d\alpha =$$

$$\left| \sin\alpha = t \right| = \int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{1}{4} (1-t^2)^4 t^5 \, dt = \left| t = \cos t \right| = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \frac{1}{4} t^8 (1-t^2)^2 \cdot t \, dt$$

$$= \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{1}{4} t^5 (1 - 4t^2 + 6t^4 - 4t^6 + t^8) \, dt = \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{1}{4} (t^5 - 4t^7 + 6t^9 - 4t^{11} + t^{13}) \, dt$$

$$= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{6} \left(\frac{1}{2}\right)^3 - \frac{4}{8} \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \frac{6}{10} \left(\frac{1}{2}\right)^5 - \frac{4}{12} \left(\frac{1}{2}\right)^6 + \frac{1}{14} \left(\frac{1}{2}\right)^7 \right)$$

14 Zkouškové písemky

1. zkoušková písemka

1. Vyjádřete následující integrál jako řadu. Pečlivě ověřte předpoklady vět, které budete používat.

$$\int_0^{+\infty} x \lg(1 + \exp(-x^2))\, dx.$$

2. Funkce F je definovaná předpisem

$$F(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\lg(1 + a\sin^2(x))}{\sin^2(x)}\, dx.$$

Určete její definiční obor a na *celém* definičním oboru ji vypočtěte. Podrobně ověřte předpoklady použitých vět.

3. Množina M je určena předpisem

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + y^2 < 4, x^2 + y^2 > 1, x > y\}.$$

Podrobně odůvodněte, proč je množina měřitelná a spočtěte její míru λ^3. Pokud budete používat nějaké věty ověřte podrobně jejich předpoklady. Není potřeba přepočítávat standardní substituce (polární, válcové, sférické souřadnice).

1. zkoušková písemka - 2019 -

1) $$x \lg(1+\exp(-x^2)) = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} x \frac{\exp(-kx^2)}{k}$$

Spočítejme $$\int_0^{+\infty} x \frac{\exp(-kx^2)}{k}\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{+2kx\, e^{-kx^2}}{+2k^2}\,dx = \frac{1}{2k}\int_0^{+\infty} e^{-y}\,dy$$

$$= \frac{1}{2k^2}.$$

Ověříme předpoklady Lebesgueovy věty o záměně řady a integrálu.

Definujeme $f_k(x) := (-1)^{k+1} x \frac{\exp(-kx^2)}{k}$

1) f_k je spojitá, tedy lebesgueovsky měřitelná

2) $\forall N \in \mathbb{N}$ je $\left|\sum_{k=1}^{N} f_k(x)\right| \leq \sum_{k=1}^{+\infty} x \frac{\exp(-kx^2)}{k} = g(x)$

Zbývá ukázat: $g \in L^1((0,+\infty))$.

a) g je def. $\forall x > 0$, řada je konvergentní

b) g je (leb.) měřitelná, protože je to bodová limita (leb.) měřitelných funkcí, pro $\sum_{k=1}^{N} |f_k|$ jsou totiž spojité

3) Platí $|f_k| \geq 0$ a tedy $\int_0^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |f_k| = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} |f_k| = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2k^2} < +\infty$

podle Leviho věty $\Rightarrow g \in L^1((0,+\infty))$.

Ověřili jsme všechny př. Lebesgueovy věty, je

$$\int_0^{+\infty} x \lg(1+\exp(-x^2))\,dx = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{2k^2}$$

2) $F(a) = \int_0^{\pi/2} \frac{\lg(1+a\sin^2(x))}{\sin^2 x}\,dx$

$\boxed{a>-1}$

Použijeme větu o derivování integrálu podle parametru.

Def: $f(a,x) := \frac{\lg(1+a\sin^2 x)}{\sin^2 x}$

i) $\forall a\in[-1,+\infty)$: $f(a,\cdot)$ dobře definovaná na $(0,\frac{\pi}{2}]$ a spojitá a tedy leb. měřitelná

ii) $\forall x\in(0,\frac{\pi}{2}), a\in(-1,+\infty)$ ex. $\frac{\partial f}{\partial a}(a,x) := \frac{1}{1+a\sin^2 x}$

iii) Pro $a_0\in(-1,0)$, $a>a_0$, $x\in(0,\frac{\pi}{2})$: $\left|\frac{\partial f}{\partial a}(a,x)\right| \le \frac{1}{1+a_0} \in L^1((0,\frac{\pi}{2}))$

iv) $F(0) = \int_0^{\pi/2} 0\,dx = 0$

$$\Rightarrow F'(a) = \int_0^{\pi/2}\frac{1}{1+a\sin^2 x}\,dx = \int_0^{\pi/2}\frac{1}{\cos^2 x}\,\frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x}+a\,\mathrm{tg}^2 x}\,dx =$$

$$= \int_0^{\pi/2}\frac{1}{\cos^2 x}\cdot\frac{1}{1+(a+1)\,\mathrm{tg}^2 x}\,dx = \int_0^{+\infty}\frac{1}{1+(a+1)t^2}\,dt = \int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{a+1}}{\sqrt{a+1}}\,\frac{1}{1+(\sqrt{a+1}\,t)^2}\,dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a+1}}\left[\mathrm{arctg}(\sqrt{a+1}\,t)\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{\sqrt{a+1}}$$ na $(a_0,+\infty)$ a tento interval patří do $D(F)$.

Na $(a_0,+\infty)$ platí $F(a) = \pi\sqrt{a+1} + c$, $0=F(0) = c+\pi$ tj. $c=-\pi$

$\Rightarrow F(a) = \pi\left(\sqrt{1+a}-1\right)$ na $(a_0,+\infty)$. Protože bylo $a_0\in(-1,0)$ libovolné platí rovnost na $(-1,+\infty)$ a $(-1,+\infty)\subset D(F)$.

$\boxed{\text{Je } -1\in D(F)?}$ $f(-1+\frac{1}{n},x) < 0$ na $x\in(0,\frac{\pi}{2})$, $f(-1+\frac{1}{n},x) \underset{n\to+\infty}{\searrow} f(-1,x)$ na $(0,\frac{\pi}{2})$

Podle Leviho věty tedy platí: $F(-1+\frac{1}{n}) \xrightarrow{n\to+\infty} \int_0^{\pi/2} f(-1,x)\,dx$.

Protože je $F(-1+\frac{1}{n}) \xrightarrow{n\to+\infty} -\pi$, je $-1\in D(F)$, $F(-1) = -\pi$.

$\boxed{a<-1}$ $a<-1$ neleží v $D(F)$, protože $f(a,\cdot)$ není def. s.v. v $(0,\frac{\pi}{2})$.

3) $M=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ x^2+y^2+z^2<4,\ x^2+y^2>1,\ x>y\}$

Definujeme $F_1(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-4$, $F_2(x,y,z):=x^2+y^2-1$, $F_3(x,y,z)=x-y$.

Tyto funkce jsou spojité a tedy $\{F_1<0\}$, $\{F_2>0\}\cap\{F_3>0\}$ jsou otevřené.

$M=\{F_1<0\}\cup\{F_2>0\}\cup\{F_3>0\}$ je tedy otevřená a tedy Leb. měřitelná!

Pro výpočet $\lambda^3(M)$ použijeme válcové souřadnice

$$\varphi:(r,\alpha,z)\longrightarrow(x,y,z);\qquad \begin{aligned}x&=r\cos\alpha\\ y&=r\sin\alpha\\ z&=z\end{aligned}\qquad;\ \mathcal{D}(\varphi)=(0,+\infty)\times(-\pi,\pi)\times\mathbb{R}$$

$$(\operatorname{Jac}\varphi)(r,\alpha,z)=r$$

$$\lambda^3(M)=\lambda^3(M\cap\varphi(\mathcal{D}(\varphi)))\underset{\text{věta o subst.}}{=}\int_{\varphi^{-1}(M)} r\,d(r,\alpha,z),\ \text{kde}$$

$$\varphi^{-1}(M)=\{(r,\alpha,z)\in\mathcal{D}(\varphi);\ r^2<4-z^2,\ r^2>1,\ \cos\alpha>\sin\alpha\}$$

průmět na α: $\alpha\in\left(-\frac{3\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$ a

řez $\{(r,z)\in(0,+\infty)\times\mathbb{R};\ r^2<4-z^2,\ r^2>1\}=\{(r,z)\in(0,+\infty)\times\mathbb{R};\ 1<r<\sqrt{4-z^2}\}$

jeho průmět na z: $1<\sqrt{4-z^2}$; $1<4-z^2$, $z^2<3$; $z\in(-\sqrt{3},\sqrt{3})$

řez v r: $r\in(1,\sqrt{4-z^2})$

$$\lambda^3(M)=\int_{-3\pi/4}^{\pi/4}\left(\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\left(\int_1^{\sqrt{4-z^2}} r\,dr\right)dz\right)d\alpha=\frac{1}{2}\int_{-3\pi/4}^{\pi/4}\left(\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}4-z^2-1\,dz\right)d\alpha=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-3\pi/4}^{\pi/4}\left[3z-\frac{z^3}{3}\right]_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}d\alpha=\frac{\pi}{2}\cdot 2\left(3\sqrt{3}-\frac{3\sqrt{3}}{3}\right)=2\sqrt{3}\,\pi$$

2. zkoušková písemka

1. (10 bodů) Funkce F je definovaná předpisem

$$F(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{arctg}(a\sin(x))}{\sin(x)}\, dx.$$

   Určete její definiční obor a na *celém* definičním oboru ji vypočtěte. Podrobně ověřte předpoklady použitých vět.

2. (10 bodů) Použijte dvěma různými způsoby Fubiniho větu na integrál

$$\int_{(0,+\infty)^2} \frac{1}{t+1}\frac{1}{tx^2+1}\, \mathrm{d}(t,x).$$

   Pomocí výsledků spočtěte integrál $\int_0^{+\infty} \frac{\lg(x)}{1-x^2}\, dx$.

   Podrobně odůvodněte, proč je možné použít Fubiniho větu.

3. (10 bodů) Vyjádřete $\int_0^{+\infty} \frac{\lg(x)}{1-x^2}\, dx$ jako řadu. Pečlivě ověřte předpoklady vět, které budete používat. Postupujte podle návodu: i) Nejdříve vyjádřete řadou integrál $\int_0^1 \frac{\lg(x)}{1-x^2}\, dx$. ii) Integrál $\int_1^{+\infty} \frac{\lg(x)}{1-x^2}\, dx$ převeďte pomocí vhodné substituce na integrál z i). iii) Vyjádřete celý integrál $\int_0^{+\infty} \frac{\lg(x)}{1-x^2}\, dx$ jako řadu a tuto řadu sečtěte pomocí výsledku z příkladu 1).

(1)
$$F(a)=\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{arctg}(a \sin x)}{\sin x}\,dx$$

Definujme $f(a,x) := \dfrac{\operatorname{arctg}(a\sin x)}{\sin x}$

- $f(a,\cdot)$ je měřitelná $\forall a\in\mathbb{R}$, protože je spojitá na $(0,\frac{\pi}{2})$ na $(0,\pi/2)$

- $f(\cdot,x)$ je diferencovatelná $\forall x$ na $\mathbb{R}$ a podle a
$$\frac{\partial f}{\partial a}(a,x) = \frac{1}{1+a^2\sin^2 x} \quad \text{pro } a\in\mathbb{R},\ x\in(0,\tfrac{\pi}{2})$$

- $F(0)=0$

- $\left|\dfrac{1}{1+a^2\sin^2 x}\right| \le 1$ pro $x\in(0,\frac{\pi}{2})$, $a\in\mathbb{R}$, $1\in\mathcal{L}^1((0,\frac{\pi}{2}))$

Tedy
$$F'(a) = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+a^2\sin^2 x}\,dx = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\cos^2 x}\,\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x(1+a^2)}\,dx =$$
$$= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\,\frac{\sqrt{1+a^2}}{\cos^2 x}\cdot\frac{1}{1+(\operatorname{tg} x\sqrt{1+a^2})^2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\cdot\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^2}\,dt =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\Big[\operatorname{arctg} t\Big]_0^{+\infty} = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\,\frac{\pi}{2}$$

Spočítáme $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\,da = \operatorname{argsinh}(a)$ na $\mathbb{R}$, ok. $(\operatorname{argsinh} a)' = \dfrac{1}{\sinh'(\operatorname{argsinh} a)} =$
$$= \frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2(\operatorname{argsinh} a)}} = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \quad \checkmark$$

$\Rightarrow F(a) = \frac{\pi}{2}\operatorname{argsinh} a + C$; $F(0)=0=C \Rightarrow$

$F(a) = \frac{\pi}{2}\operatorname{argsinh} a$ na $\mathcal{D}(F)=\mathbb{R}$.

②

$$\int_{(0,+\infty)^2} \frac{1}{1+t}\cdot\frac{1}{1+tx^2}\, d(t,x)$$

- $f(t,x) = \dfrac{1}{1+t}\cdot\dfrac{1}{1+tx^2}$

- f je měřitelná jako fce 2 proměnných, protože je spojitá (vše na $(0,+\infty)^2$)

- f je na $(0,+\infty)^2$ nezáporná, lze tedy použít Fubiniho větu

a) $$\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t}\,\frac{1}{1+tx^2}\,dx\right)dt = \int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t}\cdot\left(\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\,\frac{1}{1+(\sqrt{t}x)^2}\,dx\right)dt$$

$$= \int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t}\,\frac{1}{\sqrt{t}}\,\Big[\operatorname{arctg}(\sqrt{t}x)\Big]_{x=0}^{+\infty}dt = \int_0^{+\infty}\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{t}}\,\frac{1}{1+t}\,dt =$$

$$= \pi\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+u^2}\,du = \frac{\pi^2}{2}$$

b) $$\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t}\,\frac{1}{1+tx^2}\,dt\right)dx = \int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}\frac{1}{t+1} - \frac{x^2}{tx^2+1}\,dt\right)\frac{1}{1-x^2}\,dx$$

$$= \int_0^{+\infty}\left(\left[\lg\frac{t+1}{tx^2+1}\right]_{t=0}^{+\infty}\frac{1}{1-x^2}\right)dx = \int_0^{+\infty}\lg\left(\frac{1}{x^2}\right)\frac{1}{1-x^2}\,dx$$

$$= -2\int_0^{+\infty}\frac{\lg x}{1-x^2}\,dx$$

③

$$\int_1^{+\infty} \frac{\lg x}{1-x^2}\,dx = \left| \begin{array}{l} y = \frac{1}{x} \\ x = \frac{1}{y} \\ dx = -\frac{1}{y^2}dy \end{array} \right| = \int_0^1 \frac{-\lg y}{1-\frac{1}{y^2}} \cdot \frac{1}{y^2}\,dy =$$

$$= \int_0^1 \frac{\lg y}{1-y^2}\,dy = \int_0^1 \sum_{k=0}^{+\infty} \lg y \cdot y^{2k}\,dy =$$

$$\stackrel{(*)}{=} \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^1 \lg y \cdot y^{2k}\,dy = \sum_{k=0}^{+\infty} \left[\frac{y^{2k+1}}{2k+1}\lg y\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{y^{2k}}{2k+1}\,dy =$$

$\swarrow d$: $\frac{1}{y}$ $\qquad \downarrow i$: $\frac{y^{2k+1}}{2k+1}$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} -\left[\frac{y^{2k+1}}{(2k+1)^2}\right]_0^1 = -\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

$$\Rightarrow \quad -2\int_0^{+\infty} \frac{\lg x}{1-x^2}\,dx = -4\cdot\left(-\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\right) = 4\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}$$

Dokonce: $\frac{\pi^2}{2} = 4\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} \Rightarrow \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$

(Dále: $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} + \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2k}\right)^2 = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}$

$\frac{3}{4}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{8} \Rightarrow \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} = \zeta(2)$) není potřeba

ad $*$) $f_k(y) := (\lg y)\, y^{2k}$ jsou měřitelné (protože spojité) na $(0,1)$ a nekladné, je tedy na záměnu $\sum$ i $\int_0^1$ možné použít Leviho větu.

(ad konvergence: $f(x) = \frac{\lg x}{1-x^2}$ spojitá, v 0: $|f(x)| \le \frac{1}{2}|\lg x|$, v 1: $\lim_{x\to 1} f(x) = -\frac{1}{2}$, v ∞: $\lim_{x\to+\infty}\frac{|f(x)|}{x^{-3/2}} = 0$ $\Rightarrow$ integrál konverguje) není potřeba

3. zkoušková písemka

1. (10 bodů) Definujme funkce $F : \mathcal{D}(F) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a $G : \mathbb{R} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ předpisem

$$F(a) = \int_0^{+\infty} e^{-ax} \frac{\sin(x)}{x}\, dx, \quad G(a,n) = \int_0^{n} e^{-ax} \frac{\sin(x)}{x}\, dx.$$

   Ukažte, že:

   (a) Pro $a > 0$ platí $\lim_{n\to+\infty} G(a,n) = F(a)$.

   (b) Pro $n \in \mathbb{N}$ platí $\lim_{a\to 0+} G(a,n) = \int_0^n \frac{\sin(x)}{x}\, dx$.

   (c) Spočtěte limitu posloupnosti $\{F(m)\}_{m=1}^{+\infty}$.

2. (10 bodů) Určete definiční obor funkce F definované výše a na jejím definičním oboru ji spočtěte. Spočtěte také $\lim_{a\to 0+} F(a)$.

3. (10 bodů) Spočtete $\lambda^2(M)$, je-li množina M definována předpisem

$$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y < \frac{8}{4+x^2}, y > \frac{x^2}{4}, y > \frac{x}{2}\}.$$

1)

a) Fix $a>0$. Definujeme pro $n\in\mathbb{N}$, $f_n:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ předpisem $f_n(x)=e^{-ax}\frac{\sin x}{x}\chi_{(0,n)}(x)$.

- f_n je spojitá na $(0,n)\cup(n,+\infty)$, pro $G\subset\mathbb{R}$ ot. platí $(f_n)_{-1}(G)\cap((0,n)\cup(n,+\infty))$ je otevřená, tedy f_n je měřitelná
- $f_n(x)\xrightarrow{n\to+\infty}e^{-ax}\frac{\sin x}{x}$ pro $x\in(0,+\infty)$
- $|f_n(x)|\leq e^{-ax}$ pro $n\in\mathbb{N}, x>0$ a $e^{-ax}\in\mathcal{L}^1((0,+\infty))$

Podle Lebesgueovy věty tedy platí $\int_0^{+\infty}f_n(x)dx=\int_0^n e^{-ax}\frac{\sin x}{x}dx\xrightarrow{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}e^{-ax}\frac{\sin x}{x}dx$.

b) Fix $n\in\mathbb{N}$. Definujeme pro $a>0$, $g(a,x)=e^{-ax}\frac{\sin x}{x}$, $g:\mathbb{R}\times(0,n)\to\mathbb{R}$

- $g(a,\cdot)$ jsou spojité na $(0,n)$, tedy také lebesgueovsky měřitelné
- $|g(a,x)|\leq e^{n}$ pro $a\in(-1,1)$, $x\in(0,n)$ a $e^n\in\mathcal{L}^1((0,n))$
- $g(\cdot,x)$ jsou spojité na $(-1,1)$ $\forall x\in(0,n)$

Tedy podle věty o spojité závislosti integrálu na par.: $G(a,n)=\int_0^n e^{-ax}\frac{\sin x}{x}dx=\int_0^n g(a,x)\,dx\xrightarrow{a\to0+}\underbrace{\int_0^n\frac{\sin x}{x}dx}_{=G(0,n)}$

c) Definujme $h_n(x):=e^{-nx}\frac{\sin x}{x}$, $h_n:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$

- h_n jsou spojité na $(0,+\infty)$ tedy lebesgueovsky měřitelné
- $h_n(x)\xrightarrow{n\to+\infty}0$ pro $x\in(0,+\infty)$
- $|h_n(x)|\leq e^{-x}$ pro $n\in\mathbb{N}$, $x>0$ a $e^{-x}\in\mathcal{L}^1((0,+\infty))$

Podle Lebesgueovy věty tedy platí $F(n)=\int_0^{+\infty}e^{-nx}\frac{\sin x}{x}dx\xrightarrow{n\to+\infty}0$.

Bonus 1 (není v písemce): Označme $H(x)=\int\frac{\sin x}{x}dx$ na $(0,+\infty)$. Protože je $\frac{\sin x}{x}$ spojitá na $(0,+\infty)$ a $\int_0^n\frac{\sin x}{x}dx$ existuje, je $\int_0^n\frac{\sin x}{x}dx=(N)\int_0^n\frac{\sin x}{x}dx=$
$=H(n)-H(0+)$. Tedy

$\lim_{n\to+\infty}\int_0^n\frac{\sin x}{x}dx=\lim_{n\to+\infty}H(n)-H(0+)=(N)\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$, protože poslední Newtonův integrál konverguje.

Bonus 2 (neúplné řešení):

- Platí dokonce:

$$G(a,n) \overset{n\to+\infty}{\rightrightarrows} F(a) \quad \text{pro } a\in(0,+\infty)$$

Ukážeme, že je splněna BC podmínka st. konvergence, tj.:

$$\forall \varepsilon>0, \exists n_0>0, \forall n''>n'>n_0, a>0: |G(a,n'')-G(a,n')|<\varepsilon$$

$$\text{tj. } \left|\int_{n'}^{n''} e^{-ax}\frac{\sin x}{x}\,dx\right| < \varepsilon \qquad (*)$$

Fix $\varepsilon>0$

Podle 2. věty o střední hodnotě integrálního počtu [Pick, 9.4.13]

Pro $n''>n'>0$ ex. $c\in[n',n'']$ tak, že

$$\left|\int_{n'}^{n''} e^{-ax}\frac{\sin x}{x}\,dx\right| \le \left|e^{-an'}\int_{n'}^{c}\frac{\sin x}{x}\,dx + e^{-an''}\int_{c}^{n''}\frac{\sin x}{x}\,dx\right|$$

$$\le \left|\int_{n'}^{c}\frac{\sin x}{x}\,dx\right| + \left|\int_{c}^{n''}\frac{\sin x}{x}\,dx\right|$$

Z konvergence Newtonova integrálu $(N)\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx$, ex. $n_0>0$ tak, že

$$\forall \tilde{n}', \tilde{n}'' > n_0 \text{ je } \left|\int_{\tilde{n}'}^{\tilde{n}''}\frac{\sin x}{x}\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

S touto volbou n_0 dostáváme $\forall n''>n'>n_0$ platí $(*)$.

- Podle Moore-Osgoodovy věty [Pick 12.1.7] tedy platí

$$\lim_{n\to+\infty}\lim_{a\to0+} G(a,n) = \lim_{a\to0+}\lim_{n\to+\infty} G(a,n)$$

$$(N)\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx = \lim_{a\to0+} F(a)$$

2 Spočtěte $F(a) := \int_0^{+\infty} \underbrace{e^{-ax} \frac{\sin x}{x}}_{f(a,x)} dx$ na jejím definičním oboru:

a) $\mathcal{D}(F)$: $\cdot$ $(0,+\infty) \in \mathcal{D}(F)$, protože $|f(a,x)| \le e^{-ax}$, $\left|\int_0^{+\infty} e^{-ax} dx\right| < +\infty$ a $f(a,\cdot)$ je spojitá na $(0,+\infty)$ pro $a \in \mathbb{R}$ a tedy lebesgueovsky měřitelná

$\cdot$ $(-\infty, 0] \cap \mathcal{D}(F) = \emptyset$, protože $|f(a,x)| \ge \frac{|\sin x|}{x}$ a $\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx = +\infty$

b) F': ověříme předpoklady věty o derivování integrálu podle parametru

- $f(a,\cdot)$ je leb. měřitelná pro $a \in \mathbb{R}$, protože je spojitá na $(0,+\infty)$
- $\forall a \in \mathbb{R}, x \in (0,+\infty)$ ex. $\frac{\partial f}{\partial a}(a,x) = -e^{-ax} \sin x$
- $F(a)$ konverguje pro všechna $a \in \mathcal{D}(F) = (0,+\infty)$
- pro $a_0 > 0$ platí $\forall a > a_0, x \in (0,+\infty)$: $\left|\frac{\partial f}{\partial a}(a,x)\right| \le e^{-a_0 x}$ a $\left|\int_0^{+\infty} e^{-a_0 x} dx\right| < +\infty$.

Můžeme použít věty na interval $(a_0, +\infty)$ pro lib. $a_0 > 0$.

$$F'(a) = -\int_0^{+\infty} \underset{\substack{\downarrow d \\ -a e^{-ax}}}{e^{-ax}} \underset{\substack{\downarrow i \\ -\cos x}}{\sin x}\, dx \overset{PP}{=} -\left(\underbrace{\left[-e^{-ax} \cos x\right]_0^{+\infty}}_{=1} - \int_0^{+\infty} \underset{\substack{\downarrow d \\ -a^2 e^{-ax}}}{a e^{-ax}} \underset{\substack{\downarrow i \\ +\sin x}}{\cos x}\, dx \right) =$$

$$= -\left(1 + \underbrace{\left[-a e^{-ax} \sin x\right]_0^{+\infty}}_{=0} - \int_0^{+\infty} a^2 e^{-ax} \sin x\, dx\right) = -a^2 F'(a) - 1$$

$$(1+a^2) F'(a) = -1, \quad F'(a) = -\frac{+1}{1+a^2} = (c - \operatorname{arctg} a)'$$

$\Rightarrow F(a) = c - \operatorname{arctg} a$ na $(0,+\infty)$.

c) Podle 1 příkladu je $F(+\infty-) = 0 = c - \frac{\pi}{2} \Rightarrow c = \frac{\pi}{2}$ a

$$F(a) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} a \quad \text{na } (0,+\infty)$$

Tedy $\left((N) \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \right) \lim_{a \to 0+} F(a) = \frac{\pi}{2}$

3) $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ y < \frac{8}{4+x^2},\ y > \frac{x^2}{4},\ y > \frac{x}{2}\}$

• Definujeme $G_1(x,y) = \frac{8}{4+x^2} - y$, $G_2(x,y) = y - \frac{x^2}{4}$, $G_3(x,y) = y - \frac{x}{2}$.
Protože $G_1 - G_3$ jsou spojité, jsou $\{G_1>0\}$, $\{G_2>0\}$ i $\{G_3>0\}$

otevřené a tedy je i $M = \bigcap_{i=1}^{3} \{G_i > 0\}$ otevřená a tedy borelovská a tedy λ^2 měřitelná.

Protože je fce 1 spojitá a tedy měřitelná a nezáporná, můžeme použít Fubiniho větu.

Spočítejme projekci M na osu x.
$\max\left(\frac{x}{2}, \frac{x^2}{4}\right) < \frac{8}{4+x^2}$ tj. na $(-\infty, 0)$ a $(2, +\infty)$:
$\frac{x^2}{4} \underset{i)}{<} \frac{8}{4+x^2}$ a na $[0,2]$: $\frac{x}{2} \underset{ii)}{<} \frac{8}{4+x^2}$

i) $\frac{x^2}{4} < \frac{8}{4+x^2}$, $x^4 + 4x - 32 < 0$, $(x^2+2)^2 < 36$, $x^2 = -2 \pm 6$ (tj. 4)
$x_{1,2} = \pm 2 \longrightarrow x \in (-2, 2) \Rightarrow (-2, 0)$

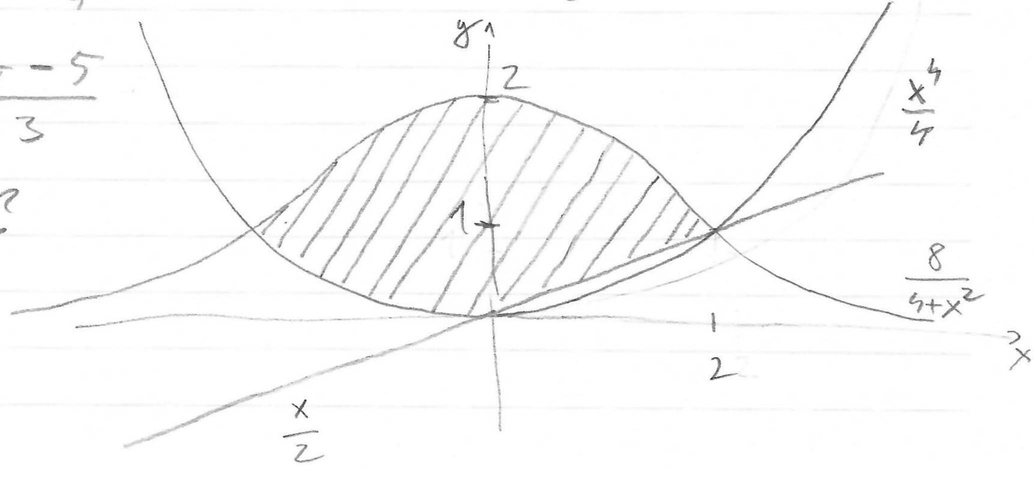
ii) $\frac{x}{2} < \frac{8}{4+x^2}$, $x^3 + 4x < 16$, $x^3 + 4x - 16 : x - 2 = x^2 + 2x + 8$
$-(x^3 - 2x^2)$
$2x^2 + 4x$ $= (x+1)^2 + 7 > 0$
$-(2x^2 - 4x)$
$8x - 16$

$\lim_{x \to -\infty} x^3 + 4x = -\infty$
$\Rightarrow x \in (-\infty, 2) \cap [0, 2] = (0, 2)$

$$\Rightarrow \lambda^2(M) = \int_{-2}^{0} \left(\int_{x^2/4}^{\frac{8}{4+x^2}} dy \right) dx + \int_{0}^{2} \left(\int_{x/2}^{\frac{8}{4+x^2}} dy \right) dx$$

$$= \frac{6\pi - 5}{3}$$

Jak vypadá M?



4. zkoušková písemka

1. (10 bodů) Spočtete $\lambda^3(M)$, je-li množina M definována předpisem
$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; (x^2+y^2+z^2)^2 < xyz, y > 0\}.$$

2. (10 bodů) Definujme funkci $F : \mathcal{D}(F) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ předpisem
$$F(a) = \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}(ax)}{x^2\sqrt{x^2-1}}\, dx.$$
Najděte definiční obor F a spočtěte $F(0)$, $\lim_{n\to+\infty} F(n)$ a $\lim_{n\to+\infty} F(-n)$. Zjistěte, kde je funkce F spojitá.

3. (10 bodů) Pro funkci z předchozího příkladu vyšetřete její monotonii. Spočtěte limity F v krajních bodech $D(F)$ a $F'(0)$, $F'(+\infty-)$ a $F'(-\infty+)$. Určete $H(F)$.

1)

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ;\ (x^2+y^2+z^2)^2 < xyz,\ y > 0\}$$

M je měřitelná, protože je otevřená $M = G^{-1}(-\infty,0) \cap F^{-1}(0,+\infty)$, kde

sférické souřadnice: $x = r\cos\alpha\cos\beta$ G, F jsou spojité: $G(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^2 - xyz$

$\varphi: y = r\cos\alpha\sin\beta$ $F(x,y,z) = y$

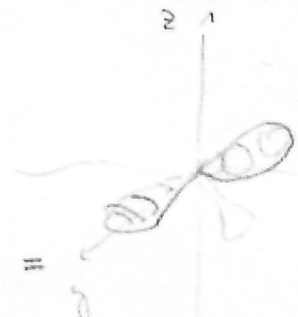
$z = r\sin\alpha$ $\operatorname{Jac}\varphi = r^2\cos\alpha$

$$r^4 < r^3\cos^2\alpha\sin\alpha\cos\beta\sin\beta$$

$$0 < r < \cos^2\alpha\sin\alpha\,\frac{1}{2}\sin(2\beta)$$ $y > 0$ znamená, $\beta \in (0,\pi)$

$\Rightarrow \alpha \in (0,\frac{\pi}{2})$ & $\beta \in (0,\frac{\pi}{2})$ M_1

$\alpha \in (-\frac{\pi}{2},0)$ & $\beta \in (\frac{\pi}{2},\pi)$ M_2



$$\lambda^3(M_1) = \int_0^{\pi/2}\left(\int_0^{\pi/2}\left(\int_0^{\cos^2\alpha\sin\alpha\frac{1}{2}\sin(2\beta)} r^2\cos\alpha\, dr\right)d\beta\right)d\alpha =$$

$$= \int_0^{\pi/2}\left(\int_0^{\pi/2}\frac{\cos\alpha}{3}\cos^6\alpha\sin^3\alpha\,\frac{1}{8}\sin^3(2\beta)\,d\beta\right)d\alpha$$

$$= \frac{1}{24}\int_0^{\pi/2}\cos^7\alpha(1-\cos^2\alpha)\sin\alpha\,d\alpha\int_0^{\pi/2}(1-\cos^2 2\beta)\sin 2\beta\,d\beta$$

$$= \frac{1}{24}\cdot\frac{1}{2}\int_0^1 t^7 - t^9\,dt\int_{-1}^1 1-s^2\,ds = \frac{1}{48}\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{10}\right)\cdot 2\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{24}\cdot\frac{2}{80}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{80} = \frac{1}{18}\cdot\frac{1}{80} = \frac{1}{1440}$$

$$\lambda^3(M_2) = \int_{-\pi/2}^{0}\left(\int_{\pi/2}^{\pi}\left(\int_0^{\cos^2\alpha\sin\alpha\frac{1}{2}\sin 2\beta} r^2\cos\alpha\,dr\right)d\beta\right)d\alpha =$$

$$= \int_{-\pi/2}^{0}\left(\int_{\pi/2}^{\pi}\frac{\cos\alpha}{3}\cos^6\alpha\sin^3\alpha\,\frac{1}{8}\cdot\sin^3 2\beta\,d\beta\right)d\alpha =$$

$$= \int_{-\pi/2}^{0}\frac{1}{24}\cos^7\alpha(1-\cos^2\alpha)\sin\alpha\,d\alpha\int_{\pi/2}^{\pi}(1-\cos^2 2\beta)\sin 2\beta\,d\alpha =$$

$$= \int_0^1\frac{1}{24}t^7 - t^9\,dt\int_{-1}^1 1-s^2\,ds\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{1440},\quad \lambda^3(M) = \frac{1}{720}$$

(2)

- $D(F)=\mathbb{R}$, protože je-li $f(a,x) := \dfrac{\operatorname{arctg}(ax)}{x^2\sqrt{x^2-1}}$, platí

$$|f(a,x)| \le \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{x^2\sqrt{x-1}} =: g(x)$$ a integrál $\int_1^{+\infty}$ z této funkce konverguje.

(je totiž $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{\frac{1}{x^2}} = 0$ a $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$ konverguje, $\lim_{x\to 1+}\dfrac{g(x)}{\frac{1}{\sqrt{x-1}}} = \frac{\pi}{2}$ a $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}}dx$ konverguje a g je spojitá na $(1,+\infty)$)

- $F(0) = \int_1^{+\infty} 0\,dx = 0$

- $\lim_{a\to+\infty} F(a) = \int_1^{+\infty}\frac{\pi}{2}\frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}}dx$ protože $f(a,x)\xrightarrow{a\to+\infty}\frac{\pi}{2}\frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}}$

a $|f(a,x)|\le g(x)$ a $g\in L^1(1,+\infty)$ a $f(a,\cdot)$ je měřitelná.

$$\int_1^{+\infty}\frac{\pi}{2}\frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}}dx = \left|\begin{array}{l} \sqrt{x^2-1} = x+t \\ \cancel{x^2}-1 = \cancel{x^2}+2tx+t^2 \\ -\frac{(1+t^2)}{2t} = x = \varphi(t) \end{array}\right. \quad \varphi'(t) \overset{t\neq 0}{=} \frac{-1}{4t^2}(4t^2-2-2t^2) = \frac{-2}{4t^2}(t^2-1) > 0 \text{ na } (-1,0)$$

$$\varphi:(-1,0)\to(1,+\infty)$$

$$x+t = t-\frac{1+t^2}{2t} = \frac{2t^2-1-t^2}{2t} = \frac{t^2-1}{2t} > 0 \text{ na } (-1,0)$$

$$= \int_{-1}^{0}\frac{\pi}{\cancel{2}}\frac{\cancel{4t^2}}{(1+t^2)^2}\cdot\underbrace{\frac{2t}{\cancel{t^2-1}}}\cdot\frac{-\cancel{2}\cancel{(t^2-1)}}{\cancel{4t^2}}dt \quad = \sqrt{x^2-1}$$

$$= -\pi\int_{-1}^{0}\frac{2t}{(t^2+1)^2}dt = -\pi\left[-\frac{1}{t^2+1}\right]_{-1}^{0} = -\pi\left(-1+\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

- $\lim_{a\to-\infty}F(a) = \lim_{a\to-\infty} -F(-a)$, protože F je zřejmě lichá!

$$= \lim_{a\to+\infty} -F(a) = -\frac{\pi}{2}$$

- $f(\cdot,x)$ je spojitá na $\mathbb{R}$ pro $x\in(1,+\infty)$, $f(a,\cdot)$ je spojitá na $(1,+\infty)$ tedy měřitelná $\forall a\in\mathbb{R}$

$|f(a,x)|\le g(x)$, $g\in L^1(1,+\infty)$, tedy F je spojitá na $\mathbb{R}$

③

• monotonie: jestliže $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$, je $f(a,x) < f(b,x)$ $\forall x \in (1,+\infty)$, F je tedy rostoucí (na $\mathbb{R}$) z monotonie integrálu

• protože $\lim\limits_{a\to+\infty} F(a) = \frac{\pi}{2}$ a F je rostoucí $\mathbb{R}$, je $\lim\limits_{a\to+\infty} F(a) = \frac{\pi}{2}$

protože $\lim\limits_{a\to-\infty} F(a) = -\frac{\pi}{2}$

• derivace: • $f(a,\cdot)$ je měřitelná

• $\forall (a,x) \in \mathbb{R}\times(1,+\infty)$: $\frac{\partial f}{\partial a}(a,x) = \frac{1}{1+a^2x^2} \cdot \frac{x}{x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

• $\forall (a,x) \in \mathbb{R}\times(1,+\infty)$: $\left|\frac{\partial f}{\partial a}(a,x)\right| \le \frac{1}{x} \frac{1}{\sqrt{x-1}} =: h(x)$

a $h \in L^1(1,+\infty)$ protože jako výše: $\left(\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{h(x)}{\frac{1}{x^{3/2}}} = 1, \lim\limits_{x\to 1+} \frac{h(x)}{\frac{1}{\sqrt{x-1}}} = 1\right)$

• $F(a)$ konverguje $\forall a \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \quad F'(a) = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} \frac{1}{1+a^2x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\, dx \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

$$F(0) = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\, dx = \int_{-1}^{0} + \frac{2t}{t^2+1} \cdot \cancel{\frac{2t}{t^2-1}} \cdot \frac{1-t^2}{\cancel{2t^2}}\, dt$$

$$= \int_{-1}^{0} \frac{2}{t^2+1}\, dt = 2\left[\operatorname{arctg} t\right]_{-1}^{0} = 2\left(0+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$$

• protože je F rostoucí, musí $\mathcal{H}(F) = \left(\lim\limits_{a\to-\infty} F(a), \lim\limits_{a\to+\infty} F(a)\right) = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

• $|F'(a)| \le \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x-1}}\, dx \cdot \frac{1}{a^2} = \int_1^{+\infty} h(x)\,dx\, \frac{1}{a^2} \xrightarrow[a\to\pm\infty]{} 0$, protože $h \in L^1(1,+\infty)$.

5. zkoušková písemka

Nezapomeňte podrobně ověřit předpoklady použitých vět.

1. (10 bodů) Vyjádřete následující integrál jako řadu.

$$\int_0^1 x \lg(x) \lg(1+x)\, dx.$$

2. (10 bodů) Definujme

$$F(a) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-ax}}{x} \cos(x)\, dx.$$

Spočtěte F na $\mathcal{D}(F)$.

3. (10 bodů) Množina M je určena předpisem

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 < 2x, x < z, y < z, z < 4\}.$$

Podrobně odůvodněte, proč je množina měřitelná, a spočtěte její míru $\lambda^3(M)$. Pokud budete používat nějaké věty, ověřte podrobně jejich předpoklady. Není potřeba přepočítávat standardní substituce (polární, válcové, sférické souřadnice).

1) $$I=\int_0^1 x\lg x \lg(1+x)\,dx = \int_0^1 \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^{k+1}}{k} \lg x \, dx$$

Spočítáme $k \geq 1$
$$\int_0^1 \underset{\downarrow i \; \frac{x^{k+2}}{k+2}}{x^{k+1}} \underset{\downarrow d \; \frac{1}{x}}{\lg x}\,dx = \underbrace{\left[\frac{x^{k+2}}{2+k}\cdot \lg x\right]_0^1}_{=0} - \int_0^1 \frac{x^{k+1}}{k+2}\,dx$$

$$= -\left[\frac{x^{k+2}}{(k+2)^2}\right]_0^1 = -\frac{1}{(k+2)^2}$$

Prohodíme na I Lebesgueovu větu: $f_k(x) := (-1)^{k+1}\frac{x^{k+1}}{k}\lg x$

f_k jsou měřitelné, protože jsou spojité na $(0,1)$,

majoranta: pro $K \in \mathbb{N}$: $$\left|\sum_{k=1}^{K} (-1)^{k+1}\frac{x^{k+1}}{k}\lg x\right| \leq \sum_{k=1}^{K} \frac{x^{k+1}}{k}|\lg x| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k+1}|\lg x|}{k} =: g$$

$g \in L^1(0,1)$, protože $$\int_0^1 |g(x)|\,dx \leq \int_0^1 \sum_{k=1}^{+\infty} -\frac{x^{k+1}\lg x}{k}\,dx \overset{(*)}{=}$$
$$-\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}\int_0^1 x^{k+1}\lg x\,dx = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+2)^2}.$$ Pro záměnu $(*)$ jsme použili Leviho větu, protože $-\frac{x^{k+1}\lg x}{k} > 0$ pro $x \in (0,1)$.

Tedy: $$I = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^1 (-1)^{k+1}\frac{1}{k}x^{k+1}\lg x\,dx = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k}\frac{1}{k(k+2)^2}$$

Rozložíme na parciální zlomky:

$$\frac{1}{k(k+2)^2} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k+2} + \frac{C}{(k+2)^2}, \qquad 1 = A(k+2)^2 + Bk(k+2) + C(k)$$

$k=0 \Rightarrow A = \frac{1}{4}$ $\qquad k^2: 0 = A+B,\ B = -\frac{1}{4}$

$k=-2 \Rightarrow C = -\frac{1}{2}$

$$I = \underbrace{\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{1}{4k} - \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{1}{4(k+2)}}_{= -\frac{1}{4} + \frac{1}{8}} - \frac{1}{2} \underbrace{\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k+2}\right)^2 (-1)^{k(+2)}}_{\check{R} + 1 - \frac{1}{4}}$$

$$= -\frac{1}{8} - \frac{1}{2}\left(\check{R} + \frac{3}{4}\right) = -\frac{1}{2} - \frac{\check{R}}{2}$$

Výpočet $\check{R} := \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{1}{k^2} - 2\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k)^2} + 2\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k)^2} =$

$$= -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = -\frac{1}{2} \underbrace{\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}}_{= \frac{\pi^2}{6} \text{ viz písemka 2}} = -\frac{\pi^2}{12}$$

$$I = \frac{\pi^2}{24} - \frac{1}{2}$$

2) Definujeme $f(a,x) := \frac{e^{-x}-e^{-ax}}{x}\cos x$.

1) $f(a,\cdot)$ je spojitá na $(0,+\infty)$ tedy měřitelná pro $a\in\mathbb{R}$

2) $\frac{\partial f}{\partial a}(a,x) = e^{-ax}\cos x \quad \forall a\in\mathbb{R},\ x\in(0,+\infty)$

3) fixujme lib. $a_0\in(0,1)$: $\forall a\in(a_0,+\infty): \left|\frac{\partial f}{\partial a}(a,x)\right| \le e^{-a_0 x} \in \mathcal{L}^1(0,+\infty)$

4) $1\in(a_0,+\infty)$ a $F(1)=0$

$\Rightarrow (a_0,+\infty)\subset \mathcal{D}(F)$ a $F'(a)=\int_0^{+\infty} e^{-ax}\cos x\,dx \quad \forall a>a_0$

Protože a_0 bylo lib. $\in(0,1)$: $(0,+\infty)\subset \mathcal{D}(F)$ a $\forall a>0$: $F'(a)=\int_0^{+\infty} e^{-ax}\cos x\,dx$ $\quad \big(d:\ e^{-ax} \to -ae^{-ax},\quad i:\ \cos x \to \sin x\big)$

$$= \underbrace{\left[\sin x\, e^{-ax}\right]_0^{+\infty}}_{=0} + a\int_0^{+\infty} e^{-ax}\sin x\,dx = a\left[-\cos x\, e^{-ax}\right]_0^{+\infty} - a^2\int_0^{+\infty} e^{-ax}\cos x\,dx$$

$\big(d:\ e^{-ax} \to -ae^{-ax},\quad i:\ \sin x \to -\cos x\big)$

$$= a - a^2F'(a) \Rightarrow F'(a) = \frac{a}{1+a^2} = \left(\frac{1}{2}\lg(1+a^2)\right)'$$

$$\Rightarrow F(a) = \frac{1}{2}\lg(1+a^2) + K,\quad 0=F(1) = \frac{1}{2}\lg 2 + K \Rightarrow K = -\frac{1}{2}\lg 2$$

$$F(a) = \frac{1}{2}\lg(1+a^2) - \frac{1}{2}\lg 2 = \lg\left(\sqrt{\frac{1+a^2}{2}}\right) \text{ na } (0,+\infty)$$

Určení $\mathcal{D}(F)$. Víme z předchozího, že $(0,+\infty)\subset\mathcal{D}(F)$

Je-li $a<0$: $\int_0^{+\infty}\left|\frac{e^{-x}-e^{-ax}}{x}\cos x\right|dx \ge \int_0^{+\infty}\frac{|e^{-ax}-1|}{x}|\cos x|\,dx$

$$\ge \int_{k\pi+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}}^{k\pi+\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{6}} \frac{e^{-ax}-1}{x}\cdot\frac{1}{2} \ge \frac{e^{-a(k\pi+\frac{4\pi}{6})}}{k\pi+\frac{8\pi}{6}}\cdot\frac{1}{2} \to +\infty$$

Tedy $a\notin\mathcal{D}(F)$.

$0\notin\mathcal{D}(F)$ protože (N) $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x}-1}{x}\cos x\,dx$ konverguje pouze neabsolutně.

Problém působí část $\int_{10}^{+\infty}\frac{1}{x}\cos x\,dx$ (u nekonečna). $\Rightarrow \mathcal{D}(F)=(0,+\infty)$.

3)

(*) $M = F_{-1}((-\infty,0)) \cap G_{-1}((-\infty,0)) \cap H_{-1}((-\infty,0)) \cap CH_{-1}((-\infty,0))$, kde

$$F(x,y,z) = 2x - x^2 - y^2,\quad G(x,y,z) = x - z,\quad H(x,y,z) = y - z,\quad CH(x,y,z) = z - 4.$$

Jelikož jsou F, G, H, CH spojité fce, jsou množiny na pravé straně (*) otevřené a tedy M je otevřená, tedy borelovská, tedy lebesgueovsky měřitelná!

Použijeme válcové souřadnice $\varphi : (r,\alpha,t) \longrightarrow (r\cos\alpha, r\sin\alpha, t)$

$$\underbrace{(0,+\infty)\times(-\pi,\pi)\times\mathbb{R}}_{U} \longrightarrow \underbrace{\mathbb{R}^3 \setminus \{(x,0,z),\ x \le 0,\ z\in\mathbb{R}\}}_{\varphi(U)}$$

φ zobrazuje U prostě na $\varphi(U)$ a splňuje všechny pp věty o substituci

$\mathrm{Jac}\,\varphi = r$

$$\lambda^3(M) = \lambda^3(M \cap \varphi(U)) = \int_{\varphi_{-1}(M)} r \, d\lambda(r,\alpha,t)$$

$$\varphi_{-1}(M) = \{(r,\alpha,t) \in U;\ r^2 < 2r\cos\alpha,\ r\cos\alpha < t,\ r\sin\alpha < t,\ t < 4\}$$

Tj. $r < 2\cos\alpha$ a $\alpha \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $t \in (\max(r\cos\alpha, r\sin\alpha), 4)$

$r < 2 \Rightarrow \max(r\cos\alpha, r\sin\alpha) < 4$

$$\Rightarrow \lambda^3(M) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\int_0^{2\cos\alpha} \left(\int_{\max(r\cos\alpha, r\sin\alpha)}^{4} r \, dz \right) dr \right) d\alpha$$

Ještě je potřeba vyřešit: $\cos\alpha < \sin\alpha$ ~~pro~~. Omezíme se na $\alpha \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ nerovnost platí pro $\alpha \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ tak

$$\lambda^3(M) = \int_{-\pi/2}^{\pi/4} \left(\int_0^{2\cos\alpha} \left(\int_{r\cos\alpha}^{4} r \, dz \right) dr \right) d\alpha + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \left(\int_0^{2\cos\alpha} \left(\int_{r\sin\alpha}^{4} r \, dz \right) dr \right) d\alpha =$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/4} \left(\int_0^{2\cos\alpha} r(4 - r\cos\alpha) \, dr \right) d\alpha + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \left(\int_0^{2\cos\alpha} r(4 - r\sin\alpha) \, dr \right) d\alpha$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 4 \cdot \frac{4\cos^2\alpha}{2} \, d\alpha - \int_{-\pi/2}^{\pi/4} \cos\alpha \, \frac{8\cos^3\alpha}{3} \, d\alpha - \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin\alpha \, \frac{8\cos^3\alpha}{3} \, d\alpha =$$

$$= 4\pi - \frac{8}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/4}\left(\frac{1+\cos 2\alpha}{2}\right)^2 d\alpha + \frac{8}{3}\left[\frac{\cos^4\alpha}{4}\right]_{\pi/4}^{\pi/2} =$$

$$= 4\pi - \frac{8}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/4}\frac{1}{4}\left(1+2\cos 2\alpha + \frac{1+\cos 4\alpha}{2}\right) d\alpha - \frac{8}{3\cdot 4}\cdot\frac{1}{4} =$$

$$= 4\pi - \frac{2}{3}\left[\frac{3}{2}\alpha + \sin 2\alpha - \frac{\sin 4\alpha}{8}\right]_{-\pi/2}^{\pi/4} - \frac{1}{6} =$$

$$= 4\pi - \frac{1}{6} - \frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}\cdot\frac{\cancel{3}}{\cancel{2}}\,\frac{3\pi}{4} - \frac{2}{3}\left(\;1\;\right) = \pi\left(4 - \frac{3}{4}\right) + \left(-\frac{2}{3} - \frac{1}{6}\right)$$

$$= \pi\,\frac{13}{4} - \frac{5}{6}$$

Reference

[Barto and Tůma, 2019] Barto, L. and Tůma, J. (2019). Lineární algebra. skript k přednášce, `http://www.karlin.mff.cuni.cz/~barto/LinAlg/skripta_la6.pdf`.

[Cohn, 2013] Cohn, D. L. (2013). *Measure theory*. Birkhäuser Advanced Texts: Basler Lehrbücher. [Birkhäuser Advanced Texts: Basel Textbooks]. Birkhäuser/Springer, New York, second edition.

[Lukeš and Malý, 2005] Lukeš, J. and Malý, J. (2005). *Measure and integral*. Matfyzpress, Prague, second edition.

[Malý, 2019] Malý, J. (2019). Teorie míry a integrálu. skript k přednášce, `http://www.karlin.mff.cuni.cz/~maly/`.

[Pick et al., 2019] Pick, L., Hencl, S., Spurný, J., and Zelený, M. (2019). Matematická analýza 1. skript k přednášce, verze 13.9.2019, `http://www.karlin.mff.cuni.cz/~pick/analyza.pdf`.

[Rana, 2002] Rana, I. K. (2002). *An introduction to measure and integration*, volume 45 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, second edition.

[Rataj, 2017] Rataj, J. (2017). Teorie míry a integrálu. skript k přednášce, `http://www.karlin.mff.cuni.cz/~rataj/`.

[Rudin, 1977] Rudin, W. (1977). *Analýza v reálném a komplexním oboru*. Academia, Prague. Translated from the second English edition by Ivan Netuka and Jiří Veselý.

[Tao, 2011] Tao, T. (2011). *An introduction to measure theory*, volume 126 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI.