

# JAK NA ELEKTRODYNAMIKU

SEPSAL: Iosephus Kučeravý

OBSAH: Tomáš Ledvinka, Vojtěch Witzani, Martin Žofka

ZDROJE ZÁPISKŮ: Iosephus Kučeravý, Michaela Šídová, Jakub Žáček

ILUSTRACE: Iosephus Kučeravý, Michaela Šídová, Tomáš Ledvinka

## Obsah

<b>1</b>	<b>ELEKTROSTATIKA</b>	<b>1</b>
1.1	ZÁKLADY VEKTOROVÉ ANALÝZY, OPAKOVÁNÍ . . . . .	2
1.2	GAUSSOVA VĚTA . . . . .	6
1.3	URČENÍ POTENCIÁLU PŘÍMOU INTEGRACÍ . . . . .	13
1.4	KŘIVOČARÉ SOUŘADNICE . . . . .	15
1.5	KAPACITA . . . . .	19
<b>2</b>	<b>KAPACITY</b>	<b>23</b>
<b>3</b>	<b>MULTIPÓLOVÝ ROZVOJ</b>	<b>27</b>
<b>4</b>	<b>MAGNETOSTATIKA</b>	<b>33</b>
<b>5</b>	<b>ELEKTROMAGNETICKÉ VLNY</b>	<b>60</b>

# 1 ELEKTROSTATIKA

## Elektrostatika

### Základy vektorové analýzy, opakování.

1. Ověřte **Gaussovu větu** pro vektorové pole

$$\vec{A} = \nabla(x^2 + y^2 - 2z^2).$$

Spočítejte a porovnejte  $\oint_{\partial V} \vec{A} \cdot d\vec{S}$  a  $\int_V \nabla \cdot \vec{A} dV$  pro objem  $V$  ve tvaru válce s osou totožnou s osou  $z$  a se středem v počátku souřadnic.

2. Nalezněte **siločáry** pro pole  $\vec{A}$ .

3. Ukažte v kartézských souřadnicích s pomocí pravidla o derivaci složené funkce, že pro sféricky symetrickou skalární funkci  $f(|\vec{r}|)$  platí

$$\nabla f(|\vec{r}|) = f' \vec{e}_r$$

a

$$\Delta f(|\vec{r}|) = f'' + \frac{2}{r} f' = \frac{1}{r^2} (r^2 f')' = \frac{1}{r} (r f)''.$$

### Gaussova věta.

Příklady použití Gaussovy věty při hledání elektrostického pole symetrických zdrojů.

4. Pole vytvářené zdrojem ve tvaru koule vyplněné konstantní nábojovou hustotou. Zdůraznit význam spojitosti  $\vec{E} = -\nabla\Phi$  a  $\Phi$  v místě napojení vnitřního a vnějšího řešení. Ověřit Poissonovu rovnici.

5. Pole vytvářené zdrojem ve tvaru nekonečně dlouhého válce za předpokladu závislosti potenciálu ve tvaru  $\Phi(R)$ .

6. Idealizovaný deskový kondenzátor za předpokladu  $\Phi(z)$ . Nespojitost  $\vec{E}$ . Plošný náboj. Jednotky  $\Phi, \vec{E}$ . Elektrická pevnost vzduchu a  $\text{SiO}_2$ , t.j. jak "velký" je jeden Volt.

7. Deskový kondenzátor s uzemněnými elektodami, uvnitř konstantní nábojová hustota.

8. Superpozice úloh 6 a 7.

9. Uvažujte elektrický potenciál pro vodíkový atom

$$\Phi(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a} \left(1 + \frac{a}{r}\right) e^{-\frac{2r}{a}}.$$

Nalezněte nábojovou hustotu, jenž je jeho zdrojem. Povšimněte si, přítomnosti bodového náboje  $+q$  v centru a jej obklopujícího oblaku s celkovým nábojem  $-q$ .

### Určení potenciálu přímou integrací.

10. Rovnoměrně nabitá úsečka.

$$\Phi(R, z) = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 a} \ln \frac{z - a - \sqrt{R^2 + (z - a)^2}}{z + a - \sqrt{R^2 + (z + a)^2}}$$

11. Rovnoměrně nabitá kružnice. Úplné eliptické integrály. Řešení v [Kvasnica, str. 328], pozor na chybné znaménko v definici  $A$ .

### Křivočaré souřadnice.

12. Porovnejte  $\nabla 2r^2 P_2(\cos\theta)$  s  $\nabla(2z^2 - x^2 - y^2)$ . První počítejte podle formulek pro derivování ve sférických souřadnicích, druhý jednoduše v souřadnicích kartézských. Ukažte, že oba výsledky představují totéž pole vyjádřené jednou ve sférických a jednou v kartézských souřadnicích.

13. Nalezněte divergence polí z příkladu 12.

14. Nalezněte nějaký polynom 3. stupně  $P_3$  v  $x, y, z$  splňující  $\nabla^2 P_3 = 0$ . Převedte jej do sférických souřadnic, identifikujte úhlovou část. Spočítejte  $\nabla^2 P_3$  ještě jednou ve sférických souřadnicích, nezapomenout zmínit rozdělení Laplaceova operátoru na radiální a úhlovou část. Pozn. Při troše snahy si studenti "vyberou" takový polynom, který vede přímo na reálnou či imaginární část  $Y_{3m}$ ,  $m = 0, 1, 2, 3$ . Zmínit kulové funkce.

15. Hledat "radiální"  $\Phi(s)$  řešení Laplaceovy rovnice v protáhlých elipsoidálních souřadnicích

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{s^2 - a^2} \sin v \cos \phi \\ y &= \sqrt{s^2 - a^2} \sin v \sin \phi \\ x &= s \cos v \end{aligned}$$

Postup: Ukázat, že  $s = \text{const.}$  jsou elipsy s ohnisky v koncích úsečky  $z \in \langle -a..a \rangle$ . Spočítat Laméovy koeficienty. Nalézt řešení Laplaceovy rovnice  $\nabla^2 \Phi(s) = 0$ . Indetifikovat dvě integrační konstanty jako náboj a potenciál v nekonečnu. Ukázat, že transformací potenciálu z úlohy 10 dostaneme tentýž potenciál.

### Kapacita.

16. Kapacita vodiče ve tvaru koule. Zopakovat i když se to dělá na přednášce.

17. Koaxiální kondenzátor. Pole vně i uvnitř.

18. Matice kapacit pro dvě velmi vzdálené koule. Diagonální členy i vzájemné kapacity lze odhadnout tak, že koule nahradíme bodovými náboji a přepokládáme, že v jejich blízkosti nejsou ekvipotenciální plochy deformované přítomností druhého náboje. Zdůraznit záporné znaménko koeficientu  $C_{12}$ .

19. Variační princip pro elektrostatiku. Ukažte pro jeden konečný vodič ve vesmíru s potenciálem na povrchu  $U$ , že pro každé  $\Phi(\vec{x})$  splňující hraniční podmínky  $\Phi(\partial V) = U$ ,  $\Phi(\infty) = 0$  splňuje funkcionál energie  $W[\Phi]$  nerovnost

$$W[\Phi] \equiv \frac{\epsilon_0}{2} \int [\nabla\Phi]^2 dV \geq \frac{1}{2} CU^2$$

a dává tak možnost nalézt horní odhad kapacity vodivého tělesa. Zmínit, že takto lze dokázat, že vejde-li se těleso  $A$  dovnitř tělesa  $B$  musí pro kapacity platit  $C_A < C_B$  (domácí úloha pro zvědavé studenty).

# 1.1 ZÁKLADY VEKTOROVÉ ANALÝZY, OPAKOVÁNÍ

## Příklad 1-1: (Gaussova věta)

**Úkol:** Ověřte Gaussovu větu pro vektorové pole

$$\vec{A} = \vec{\nabla}(x^2 + y^2 - 2z^2)$$

Dále spočítejte a porovnejte  $\oint_{\partial V} \vec{A} \cdot d\vec{S}$  a  $\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{A} dV$  pro objem  $V$  ve tvaru válce s osou totožnou s osou  $z$  a se středem v počátku souřadnic a s výškou  $2h$ .

✓ Řešení:

$$\text{Integrační oblast (objem)} \quad V : x^2 + y^2 < a^2 \quad \wedge \quad |z| < h$$

Vypočítání tvaru pole  $\vec{A}$  (vypočítání gradientu):

$$\vec{A} = \vec{\nabla}(x^2 + y^2 - 2z^2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial(x^2)}{\partial x} \\ \frac{\partial(y^2)}{\partial y} \\ \frac{\partial(-2z^2)}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ -4z \end{pmatrix}$$

Vypočítání divergence pole  $\vec{A}$  a dopočítání objemového integrálu

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ -4z \end{pmatrix} = 2 + 2 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{A} dV = 0}$$

Plocha horní podstavu:

$$d\vec{S} = dS \vec{n} = r dr d\varphi \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\int_S \vec{1} \cdot d\vec{S} = \pi a^2 = \int_0^{2\pi} \int_0^a 1r dr d\varphi$$

Nyní místo  $\vec{1}$  dosadíme  $\vec{A}$ , pro zjištění toku horní podstavou:

$$z = h \quad \Rightarrow \quad \vec{A} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ -4h \end{pmatrix}$$

$$I_1 = \int_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = \int_S (2x \quad 2y \quad -4h) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} r dr d\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^a -4hr dr d\varphi = -4\pi ha^2$$

Tok spodní podstavou:

$$z = -h \quad \Rightarrow \quad \vec{A} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 4h \end{pmatrix}, \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$I_2 = \int_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = \int_S (2x, \quad 2y, \quad 4h) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} r dr d\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^a -4hr dr d\varphi = -4\pi ha^2$$

Celkový tok podstavami:

$$I_1 + I_2 = -8\pi ha^2$$

Tok pláštěm:

$$d\vec{S} = dS \vec{n} = dz a d\varphi \vec{n}, \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{A} = \begin{pmatrix} 2a \cos \varphi \\ 2a \sin \varphi \\ z \end{pmatrix}$$

$$I_3 = \int_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = \int_S (2a \cos \varphi, 2a \sin \varphi, z) \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} dz a d\varphi = \int_0^{2\pi} \int_{-h}^h 2a \cos^2 \varphi + 2a \sin^2 \varphi dz a d\varphi$$

$$I_3 = 2a^2 \cdot 2\pi \cdot 2h = 8\pi ha^2$$

Celkový tok hranicí oblasti  $\partial V$ :

$$I_1 + I_2 + I_3 = -8\pi ha^2 + 8\pi ha^2 = 0 = \oint_{\partial V} \vec{A} \cdot d\vec{S}$$

Čímž jsme ověřili, že pro toto pole platí Gaussova věta, neboť:

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{A} dV = 0 = \oint_{\partial V} \vec{A} \cdot d\vec{S}$$

### Příklad 1-2: (Siločáry)

**Úkol:** Nalezněte siločáry pro výše uvedené pole  $\vec{A}$

$$\vec{A} = \vec{\nabla}(x^2 + y^2 - 2z^2)$$

✓ **Řešení:**

Z  $\mu_0$  víme (z minulá víme, haha vtípek):

$$\vec{A} = \vec{\nabla}(x^2 + y^2 - 2z^2) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ -4z \end{pmatrix} = 2x\vec{e}_x + 2y\vec{e}_y - 4z\vec{e}_z$$

Ledvinkovo ponaučení:

$$\begin{aligned} \text{Rovnice siločáry pro neznámou křivku } \vec{x}(s) \rightarrow \text{řeší diferenciální rovnici} \quad \frac{d\vec{x}(s)}{ds} = \lambda(s)\vec{A}(\vec{x}(s)) \\ \frac{dx(s)}{ds} = \lambda(s) \cdot A_x(s) = \lambda(s) \cdot 2x(s) \\ \frac{dy(s)}{ds} = \lambda(s) \cdot A_y(s) = \lambda(s) \cdot 2y(s) \\ \frac{dz(s)}{ds} = \lambda(s) \cdot A_z(s) = \lambda(s) \cdot (-4)z(s) \end{aligned}$$

Volme:  $\lambda = 1$

Pak dostaneme soustavu:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{ds} &= 2x(s) \Rightarrow \int \frac{dx}{x} = 2 \int ds \Rightarrow \ln\left(\frac{x}{x_0}\right) = 2s \\ \frac{dy}{ds} &= 2y(s) \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = 2 \int ds \Rightarrow \ln\left(\frac{y}{y_0}\right) = 2s \\ \frac{dz}{ds} &= -4z(s) \Rightarrow \int \frac{dz}{z} = -4 \int ds \Rightarrow \ln\left(\frac{z}{z_0}\right) = -4s\end{aligned}$$

Aplikujeme exponenciálu pro vyjádření jednotlivých složek:

$$\left. \begin{aligned}x &= x_0 e^{2s} \\ y &= y_0 e^{2s} \\ z &= z_0 e^{-4s}\end{aligned} \right\} \rightarrow e^{2s} = u \rightarrow \begin{aligned}x &= x_0 u \\ y &= y_0 u \\ z &= z_0 u^{-2}\end{aligned}$$

kde  $x_0, y_0, z_0$  jsou počáteční podmínky

### Příklad 1-3: (Radiálně symetrická funkce)

**Úkol:** Ukažte v kartézských souřadnicích s pomocí pravidla o derivaci složené funkce, že pro sféricky symetrickou skalární funkci  $f(|\vec{r}|)$  platí:

$$\vec{\nabla} f(|\vec{r}|) = f' \vec{e}_r$$

a

$$\Delta f = f'' + \frac{2}{r} f' = \frac{1}{r^2} (r^2 f')' = \frac{1}{r} (rf)''$$

✓ Řešení:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad \dots \text{ sférická souřadnice}$$

Derivace složené funkce:

$$\frac{\partial}{\partial x} f(g(x, y, z)) = \frac{df}{dg} \frac{\partial g}{\partial x}$$

Kartézský případ:

$$\vec{\nabla} f = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)_K$$

$$\left. \begin{aligned}\frac{\partial f(r)}{\partial x} &= f'(r) \frac{1}{2} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = f'(r) \frac{x}{r} \\ \frac{\partial f(r)}{\partial y} &= f'(r) \frac{1}{2} \frac{2y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = f'(r) \frac{y}{r} \\ \frac{\partial f(r)}{\partial z} &= f'(r) \frac{1}{2} \frac{2z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = f'(r) \frac{z}{r}\end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{\vec{\nabla} f(r) = \frac{f'(r)}{r} \underbrace{(x, y, z)}_{\vec{x} = \vec{r}} = f'(r) \frac{\vec{r}}{r} = f'(r) \vec{e}_r} \quad \checkmark$$

kde  $\vec{x}$  značí polohový vektor

Nyní spočítáme výraz pro Laplaceův operátor:

$$\Delta f(r) = \vec{\nabla} \cdot \underbrace{(\vec{\nabla} f(r))}_{\vec{A}}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} f'(r) \frac{x}{r} + \frac{\partial}{\partial y} f'(r) \frac{y}{r} + \frac{\partial}{\partial z} f'(r) \frac{z}{r}$$

Mezivýpočet

$$\frac{\partial}{\partial x} f'(r) \frac{x}{r} = f''(r) \frac{x}{r} \frac{x}{r} + f'(r) \left( \frac{x}{r} \right)' = f''(r) \left( \frac{x}{r} \right)^2 + f'(r) \frac{1 \cdot r - x \frac{\partial r}{\partial x}}{r^2} = f''(r) \left( \frac{x}{r} \right)^2 + f'(r) \frac{r - \frac{x^2}{r}}{r^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} f'(r) \frac{x}{r} = f''(r) \left( \frac{x}{r} \right)^2 + f'(r) \left( \frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3} \right) = f''(r) \frac{x^2}{r^2} + \frac{f'(r)}{r^3} (r^2 - x^2)$$

Celkem tedy dostáváme

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \underbrace{f''(r) \frac{x^2}{r^2}} + \underbrace{\frac{f'(r)}{r^3} (r^2 - x^2)} + \underbrace{f''(r) \frac{y^2}{r^2}} + \underbrace{\frac{f'(r)}{r^3} (r^2 - y^2)} + \underbrace{f''(r) \frac{z^2}{r^2}} + \underbrace{\frac{f'(r)}{r^3} (r^2 - z^2)}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = f''(r) \underbrace{\left( \frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} + \frac{z^2}{r^2} \right)}_{\frac{r^2}{r^2} = 1} + \frac{f'(r)}{r^3} \underbrace{(r^2 - x^2 + r^2 - y^2 + r^2 - z^2)}_{3r^2 - r^2} = f''(r) + \frac{f'(r)}{r^3} (2r^2) = f''(r) + 2 \frac{f'(r)}{r}$$

Tedy vidíme, že platí:

$$\boxed{\Delta f(r) = f'' + \frac{2}{r} f'}$$

Další rovnosti ověříme přímým zderivováním zadaných výrazů:

$$\frac{1}{r^2} (r^2 f')' = \frac{1}{r^2} (2r f'(r) + r^2 f''(r)) = f''(r) + \frac{2}{r} f'(r) \quad \checkmark$$

$$\frac{1}{r} (r f)'' = \frac{1}{r} (f(r) + r f'(r))' = \frac{1}{r} (f'(r) + f'(r) + r f''(r)) = f''(r) + \frac{2}{r} f'(r) \quad \checkmark$$

## 1.2 GAUSSOVA VĚTA

⇒ Příklady Gaussovy věty při hledání elektrostatického pole symetrických zdrojů.

Opakování

$$\text{Gaussova věta: } \begin{cases} \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} & \dots \text{ diferenciální tvar, Maxwellova rovnice} \\ \oint_{\partial\Omega} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} Q_{\Omega} & \dots \text{ integrální tvar} \end{cases}$$

Symetrie vhodná pro Gaussovu větu:

$$\oint_{\partial\Omega} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_{\partial\Omega} E_{\perp} \cdot \vec{n} dS = E_{\perp} \int_{\partial\Omega} dS = E_{\perp} S_{\partial\Omega}$$

### Příklad 1-4: ( $\vec{E}, \Phi$ , Poissonova rovnice)

**Zadání:** Mějme pole vytvářené zdrojem ve tvaru koule vyplněné konstantní nábojovou hustotou.

**Úkol:** Vypočítejte pomocí Gaussova zákona tvar elektrického pole  $\vec{E}$  v celém prostoru. Zdůrazněte význam spojitosti  $\vec{E} = -\nabla\Phi$  a  $\Phi$  v místě napojení vnitřního a vnějšího řešení. Ověřte Poissonovu rovnici.

✓ Řešení:

Konstantní nábojová hustota  $\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi a^3}$ , poloměr koule  $r = a$ , integrační oblast  $\Omega$  je koule o poloměru  $r$ .

$$\vec{E} = E_{\perp} \vec{e}_r$$

- Jednotlivé případy pro  $\vec{E}$ :

$r < a$ :	$E_{\perp} \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3$	
	$E_{\perp} = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}$	... lineární růst až do $a$
$r > a$ :	$E_{\perp} \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \rho \cdot \frac{4}{3}\pi a^3$	
	$E_{\perp} = \frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0 r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$	... kvadratický pokles od $a$
$r = a$ :	$E_{\perp}(a^-) = E_{\perp}(a^+) = \frac{\rho a}{3\varepsilon_0}$	⇒ výrazy se rovnají, žádný skok na rozhraní

- Nyní spočítáme potenciál  $\Phi(r)$

$$\vec{E} = E_r \vec{e}_r$$

$$E_r = \begin{cases} \left(\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\right) r & r \leq a \\ \left(\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\right) \frac{a^3}{r^2} & r > a \end{cases}$$

Vyjdeme nyní ze vzorečku  $\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi$ , který aplikujeme na výše uvedené  $E_r$

$$E_r = -\frac{d\Phi(r)}{dr}$$

$$\frac{d\Phi(r)}{dr} = \begin{cases} -\left(\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\right)r & r \leq a \\ -\left(\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\right)\frac{a^3}{r^2} & r > a \end{cases} \rightarrow \int dr \rightarrow \Phi(r) = \begin{cases} -\left(\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\right)\left(\frac{1}{2}r^2 + A\right) & r \leq a \\ -\left(\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\right)\left(-\frac{a^3}{r} + B\right) & r > a \end{cases}$$

Pokládáme  $B = 0$ , neboť v nekonečnu chceme nulový potenciál.

Konstantu  $A$  určíme z podmínky spojitosti objemově rozloženého náboje, pro  $r = a$  musí platit:

$$\begin{aligned} \Phi(a^-) &= -\left(\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\right)\left(\frac{1}{2}a^2 + A\right) = \left(\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\right)\frac{a^3}{a} = \Phi(a^+) \\ -\left(\frac{1}{2}a^2 + A\right) &= a^2 \Rightarrow A = -a^2 - \frac{1}{2}a^2 \Rightarrow \boxed{A = -\frac{3}{2}a^2} \end{aligned}$$

Pro potenciál  $\Phi(r)$  tak dostáváme výraz:

$$\Phi(r) = \begin{cases} \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(\frac{3a^2 - r^2}{2}\right) & r \leq a \\ \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(\frac{a^3}{r}\right) & r > a \end{cases}$$

- Ověření Poissonovy rovnice (pouze pro  $r \leq a$ , kde jsou zdroje (náboje)):

$$\Delta\Phi(r \leq a) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla}\Phi) = \frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(\frac{3a^2 - r^2}{2}\right)'' = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0}$$

Mělo ale vyjít:

$$\Delta\Phi(r \leq a) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

### Příklad 1-5: (Pole (ne)konečně dlouhého válce)

**Zadání:** Pole vytvářené zdrojem ve tvaru nekonečně dlouhého válce za předpokladu závislosti potenciálu ve tvaru  $\Phi(R)$ .

Ledvinka se ale rozhodl počítat pro konečný válec o výšce  $h$ .

✓ **Řešení:**

Pro hustotu náboje platí následující rozložení:

$$x^2 + y^2 < a^2 \quad \dots \rho$$

$$x^2 + y^2 > a^2 \quad \dots 0$$

Dále si rozepíšeme:

$$\oint_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \frac{\rho}{\varepsilon_0} dV$$



$$R = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \dots \text{ válcová souřadnice}$$

Levá strana rovnice:

$$\oint_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{S} = E_R 2\pi R h$$

Pravá strana rovnice:

$$\iiint_V \frac{\rho}{\varepsilon_0} dV$$

### Příklad 1-6: (Ideální deskový kondensátor)

**Zadání:** Idealizovaný deskový kondenzátor za předpokladu  $\Phi(z)$ . Nespojitosť  $E$ . Plošný náboj. Jednotky  $\Phi, E$ . Elektrická pevnosť vzduchu a  $\text{SiO}_2$ , t.j. jak „velký“ je jeden Volt.

✓ Řešení:

**Příklad 1-7: (Deskový kondensátor s uzemněnými elektrodami)**

**Zadání:** Deskový kondenzátor s uzemněnými elektrodami, uvnitř konstantní nábojová hustota.

✓ Řešení:

**Příklad 1-8: (Superposice 6 a 7)**

**Zadání:**

---

**Úkol:**

✓ Řešení:

### Příklad 1-9: (Vodíkový atom)

**Zadání:** Uvažujte elektrický potenciál pro vodíkový atom

$$\Phi(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a} \left(1 + \frac{a}{r}\right) e^{-\frac{2r}{a}}.$$

Nalezněte nábojovou hustotu, jenž je jeho zdrojem. Pověšimněte si, přítomnosti bodového náboje  $+q$  v centru a jej obklopujícího oblaku s celkovým nábojem  $-q$ .

Určení potenciálu přímou integrací.

✓ Řešení:

### 1.3 URČENÍ POTENCIÁLU PŘÍMOU INTEGRACÍ

#### Příklad 1-10: (Rovnoměrně nabitá úsečka)

**Zadání:** Rovnoměrně nabitá úsečka.

$$\Phi(R, z) = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 a} \ln \frac{z - a - \sqrt{R^2 + (z - a)^2}}{z + a - \sqrt{R^2 + (z + a)^2}}$$

✓ Řešení:

**Příklad 1-11: (Rovnoměrně nabitá kružnice)**

**Zadání:** Rovnoměrně nabitá kružnice. Úplné eliptické integrály. Řešení v [Kvasnica, str. 328], pozor na chybné znaménko v definici  $A$ .

✓ Řešení:

## 1.4 KŘIVOČARÉ SOUŘADNICE

### Příklad 1-12: (Sférické a kartézské souřadnice)

**Zadání:** Porovnejte  $\nabla 2r^2 P_2(\cos \theta)$  s  $\nabla (2z^2 - x^2 - y^2)$ . První počítejte podle formulek pro derivování ve sférických souřadnicích, druhý jednoduše v souřadnicích kartézských. Ukažte, že oba výsledky představují totéž pole vyjádřené jednou ve sférických a jednou v kartézských souřadnicích.

✓ Řešení:



**Příklad 1-13: (Divergence polí)**

**Zadání:** Nalezněte divergence polí z příkladu 12.

✓ Řešení:

### Příklad 1-14: (Laplaceův operátor)

**Zadání:** Nalezněte nějaký polynom 3 . stupně  $P_3$  v  $x, y, z$  splňující  $\nabla^2 P_3 = 0$ . Převeďte jej do sférických souřadnic, identifikujte úhlovou část.

Spočtete  $\nabla^2 P_3$  ještě jednou ve sférických souřadnicích, nezapomenout zmínit rozdělení Laplaceova operátoru na radiální a úhlovou část.

Poznámka: Při troše snahy si studenti „vyberou“ takový polynom, který vede přímo na reálnou či imaginární část  $Y_{3m}$ ,  $m = 0, 1, 2, 3$ . Zmínit kulové funkce.

✓ Řešení:

**Příklad 1-15: (Radiální řešení Laplaceovy rovnice)**

**Zadání:** Hledat "radiální"  $\Phi(s)$  řešení Laplaceovy rovnice v protáhlých elipsoidálních souřadnicích

$$x = \sqrt{s^2 - a^2} \sin v \cos \phi$$

$$y = \sqrt{s^2 - a^2} \sin v \sin \phi$$

$$z = s \cos v$$

**Postup:** Ukázat, že  $s = \text{const.}$  jsou elipsy s ohnisky v koncích úsečky  $z \in \langle -a, a \rangle$ . Spočítat Laméovy koeficienty. Nalézt řešení Laplaceovy rovnice  $\nabla^2 \Phi(s) = 0$ . Identifikovat dvě integrační konstanty jako náboj a potenciál v nekonečnu. Ukázat, že transformací potenciálu z úlohy 10 dostaneme tentýž potenciál.

✓ Řešení:

## 1.5 KAPACITA

### **Příklad 1-16: (Kapacita vodiče ve tvaru koule)**

**Zadání:** Kapacita vodiče ve tvaru koule. Zopakovat i když se to dělá na přednášce.

✓ Řešení:

**Příklad 1-17: (Koaxiální kondensátor)**

**Zadání:** Koaxiální kondenzátor. Pole vně i uvnitř.

✓ Řešení:

### **Příklad 1-18: (Matice kapacit)**

**Zadání:** Matice kapacit pro dvě velmi vzdálené koule. Diagonální členy i vzájemné kapacity lze odhadnout tak, že koule nahradíme bodovými náboji a přepokládáme, že v jejich blízkosti nejsou ekvipotenciální plochy deformované přítomností druhého náboje. Zdůraznit záporné znaménko koeficientu  $C_{12}$ .

✓ **Řešení:**

### Příklad 1-19: (Variační princip pro elektrostatiiku)

**Zadání:** Variační princip pro elektrostatiiku. Ukažte pro jeden konečný vodič ve vesmíru s potenciálem na povrchu  $U$ , že pro každé  $\Phi(\vec{x})$  splňující hraniční podmínky  $\Phi(\partial V) = U$ ,  $\Phi(\infty) = 0$  splňuje funkcionál energie  $W[\Phi]$  nerovnost

$$W[\Phi] \equiv \frac{\epsilon_0}{2} \int [\nabla\Phi]^2 dV \geq \frac{1}{2} CU^2$$

a dává tak možnost nalézt horní odhad kapacity vodivého tělesa. Zmínit, že takto lze dokázat, že vejde-li se těleso  $A$  dovnitř tělesa  $B$  musí pro kapacity platit  $C_A < C_B$  (domácí úloha pro zvědavé studenty).

✓ Řešení:

## 2 KAPACITY

### Bodový náboj poblíž vodivé koule

Ukažte, že Greenova úloha

$$\Delta \Phi_{\vec{r}'}(\vec{r}) = -\frac{Q}{\epsilon_0} \delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad (1)$$

na oblasti  $\Omega = R^3 \setminus K_a(0)$ , tedy prostoru s vyňatou koulí o poloměru  $a$  se středem v počátku, a s hraničními podmínkami  $\Phi(\infty) = 0$  a  $\Phi(K_a(0)) = U$  má řešení

$$\Phi_{\vec{r}'}(\vec{r}) = \frac{Ua}{|\vec{r}|} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \frac{a}{|\vec{r}'|} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}''|} \right) \quad (2)$$

kde  $\vec{r}'' = \frac{a^2}{|\vec{r}'|^2} \vec{r}'$

Při odvozování je asi nejjednodušší použít názornou identitu  $|\alpha\vec{n} - \beta\vec{m}| = |\alpha\vec{m} - \beta\vec{n}|$ , kde  $\vec{n}$  a  $\vec{m}$  jsou jednotkové vektory. Připomeňte, že  $\Phi_{\vec{r}'}(\vec{r}) = G(\vec{r}, \vec{r}')$  z přednášky položíme-li  $U = 0$ .

### Kapacita dvou vodivých koulí

Pro dvě vodivé koule  $K_a(0)$  a  $K_b(d\vec{e}_z)$  na nichž je dána hraniční podmínka  $\Phi(K_a(0)) = U_a$  a  $\Phi(K_b(d\vec{e}_z)) = U_b$  zkonstruuje potenciál ve tvaru nekonečné řady

$$\Phi(\vec{r}) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{q_i}{|\vec{r} - s_i\vec{e}_z|} + \frac{q'_i}{|\vec{r} - (d - s'_i)\vec{e}_z|} \quad (3)$$

kde  $q_i$  je obrazem  $q'_{i-1}$  a  $q'_i$  je obrazem  $q_{i-1}$  a tyto obrazy se nacházejí ve vzdálenostech  $s_i$  resp.  $s'_i$  od středů příslušných koulí. Protože vzor a obraz dohromady přispívají nulovým napětím na povrchu příslušné koule, jsou to členy  $q_0$  a  $q'_0$ , které nejsou obrazem ničeho a určují hodnoty napětí na koulích. Proto platí

$$q_0 = aU_a, \quad q'_0 = bU_b \quad \text{a samozřejmě } s_0 = s'_0 = 0 \quad (4)$$

Ze vztahu vzor-obraz dostáváme náboje obrazů

$$q_i = -\frac{a}{d - s'_{i-1}} q'_{i-1}, \quad q'_i = -\frac{b}{d - s_{i-1}} q_{i-1} \quad (5)$$

a jejich polohu

$$s_i = \frac{a^2}{d - s'_{i-1}}, \quad s'_i = \frac{b^2}{d - s_{i-1}} \quad (6)$$

Místo integrování elektrické indukce přes povrch koulí zjistíme náboj uvnitř jako součet

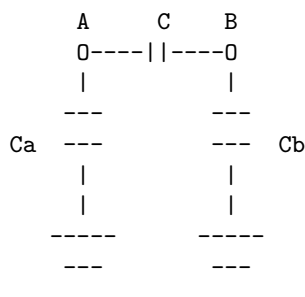
$$Q_a = 4\pi\epsilon_0 \sum_{i=0}^{\infty} q_i, \quad Q_b = 4\pi\epsilon_0 \sum_{i=0}^{\infty} q_b \quad (7)$$

Protože řada konverguje nejhůře jako geometrická řada s kvocientem  $\frac{\max(a,b)}{d-a-b}$  má pro vzdálené koule smysl i první člen. Ukažte, že jde o vzájemné kapacity.

Ukažte, že v prvním přiblížení roste při nabíjení jedné z koulí potenciál na druhé vybité, stejně jako kdyby tam vůbec nebyla a uvažovali jsme jen potenciál v jejím místě.

### Vzájemné kapacity pro inženýry

Popište názorně úlohu o matici kapacit dvou vodičů pomocí II-článku tvořeného kondenzátory a z rovnosti energií zkonstruuje matici kapacit.





### Příklad 2-1: (Bodový náboj poblíž vodivé koule)

**Zadání:** Ukažte, že Greenova úloha

$$\Delta \Phi_{\vec{r}'}(\vec{r}) = -\frac{Q}{\epsilon_0} \delta(\vec{r} - \vec{r}')$$

na oblasti  $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus K_a(0)$ , tedy prostoru s vyňatou koulí o poloměru  $a$  se středem v počátku, a s hraničními podmínkami  $\Phi(\infty) = 0$  a  $\Phi(K_a(0)) = U$  má řešení

$$\Phi_{\vec{r}'}(\vec{r}) = \frac{Ua}{|\vec{r}'|} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \frac{a}{|\vec{r}'|} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}''|} \right)$$

kde  $\vec{r}'' = \frac{a^2}{|\vec{r}'|^2} \vec{r}'$ . Při odvozování je asi nejjednodušší použít názornou identitu  $|\alpha\vec{n} - \beta\vec{m}| = |\alpha\vec{m} - \beta\vec{n}|$ , kde  $\vec{n}$  a  $\vec{m}$  jsou jednotkové vektory. Připomeňte, že  $\Phi_{\vec{r}'}(\vec{r}) = G(\vec{r}, \vec{r}')$  z přednášky položíme-li  $U = 0$ .

✓ Řešení:

### Příklad 2-2: (Kapacita dvou vodivých koulí)

**Zadání:** Pro dvě vodivé koule  $K_a(0)$  a  $K_b(d\vec{e}_z)$  na nichž je dána hraniční podmínka  $\Phi(K_a(0)) = U_a$  a  $\Phi(K_b(d\vec{e}_z)) = U_b$  zkonstruuje potenciál ve tvaru nekonečné řady

$$\Phi(\vec{r}) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{q_i}{|\vec{r} - s_i \vec{e}_z|} + \frac{q'_i}{|\vec{r} - (d - s'_i) \vec{e}_z|}$$

kde  $q_i$  je obrazem  $q'_{i-1}$  a  $q'_i$  je obrazem  $q_{i-1}$  a tyto obrazy se nacházejí ve vzdálenostech  $s_i$  resp.  $s'_i$  od středů příslušných koulí. Protože vzor a obraz dohromady přispějí nulovým napětím na povrchu příslušné koule, jsou to členy  $q_0$  a  $q'_0$ , které nejsou obrazem ničeho a určují hodnoty napětí na koulích. Proto platí

$$q_0 = aU_a, \quad q'_0 = bU_b \quad \text{a samozřejmě } s_0 = s'_0 = 0$$

Ze vztahu vzor-obraz dostáváme náboje obrazů

$$q_i = -\frac{a}{d - s'_{i-1}} q'_{i-1}, \quad q'_i = -\frac{b}{d - s_{i-1}} q_{i-1}$$

a jejich polohu

$$s_i = \frac{a^2}{d - s'_{i-1}}, \quad s'_i = \frac{b^2}{d - s_{i-1}}$$

Místo integrování elektrické indukce přes povrch koulí zjistíme náboj uvnitř jako součet

$$Q_a = 4\pi\epsilon_0 \sum_{i=0}^{\infty} q_i, \quad Q_b = 4\pi\epsilon_0 \sum_{i=0}^{\infty} q_b$$

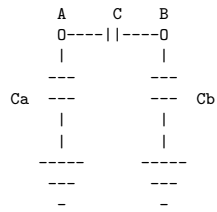
Protože řada konverguje nejhůře jako geometrická řada s kvocientem  $\frac{\max(a,b)}{d-a-b}$  má pro vzdálené koule smysl i první člen. Ukažte, že jde o vzájemné kapacity.

Ukažte, že v prvním přiblížení roste při nabíjení jedné z koulí potenciál na druhé vybité, stejně jako kdyby tam vůbec nebyla a uvažovali jsme jen potenciál v jejím místě.

✓ Řešení:

### Příklad 2-3: (Vzájemné kapacity pro inženýry)

**Zadání:** Popište názorně úlohu o matici kapacit dvou vodičů pomocí II-článku tvořeného kondenzátory a z rovnosti energií zkonstruuje matici kapacit.



✓ Řešení:

### 3 MULTIPÓLOVÝ ROZVOJ

#### Multipólový rozvoj pro axiálně symetrické zdroje

1. Uvažujte definici Legendrových polynomů

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xw+x^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} x^l P_l(w) . \quad (1)$$

Ukažte, že

a)  $P_0(w) = 1, P_1(w) = w, P_2(w) = \frac{3}{2}w^2 - \frac{1}{2}$ . Je vhodné nejprve využít vztahu

$$\frac{1}{\sqrt{1+t}} = 1 - \frac{1}{2}t + \frac{3}{8}t^2 \mp \dots$$

(jen v krajním případě počítat derivace  $(1/s)' = (w-x)/s^3, (1/s)'' = (3w^2 - 4xw + 2x^2 - 1)/s^5$ )

b)  $P_l(w)$  je polynom stupně  $l$  v proměnné  $w$ ,

c)  $P_l(\pm 1) = (\pm 1)^l$ ,

d) jsou-li  $r$  a  $\vartheta$  sférické souřadnice (zkuste položit  $x = a/r$ ),

$$\Delta \frac{P_l(\cos \vartheta)}{r^{l+1}} = 0 . \quad (2)$$

Povšimněte si, že generující vzorec pro Legendrovy polynomy (1) souvisí s potenciálem náboje umístěného na ose  $z$  ve vzdálenosti  $a$  od počátku.

2. Ukažte, že elektrostatické pole axiálně symetrického zdroje lze na ose  $z > 0$  a daleko od zdrojů psát ve tvaru

$$\Phi(x=0, y=0, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{q_l}{z^{l+1}} , \quad (3)$$

kde koeficienty  $q_l$  jsou dány vlastnostmi zdroje

$$q_l = \int_V \rho(\vec{x}') (r')^l P_l(\cos \vartheta') d^3x' \quad (4)$$

3. Ukažte, že za předpokladu, že pole daleko od zdrojů lze rozvinout do řady v  $1/r$  (to je důsledkem předpokladů obecného multipólového rozvoje, jaké platí i pro tento speciální případ), je pole buzené zdrojem popsáno multipólovým rozvojem

$$\Phi(r, \vartheta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} q_l \frac{P_l(\cos \vartheta)}{r^{l+1}} , \quad (5)$$

**Poznámka.** Legendrovy polynomy jsou vzorovým příkladem ortogonální báze funkcí, na rozdíl od kulových funkcí je jejich normalizace a fáze volena vztahem  $P_l(1) = 1$  a tak relace ortogonality vypadá následovně

$$\int_{-1}^1 P_l(z) P_{l'}(z) dz = \int_{-1}^1 P_l(\cos \vartheta) P_{l'}(\cos \vartheta) d \cos \vartheta = \frac{2}{2l+1} \delta_{ll'} \quad (6)$$

a úplnost dokládá vzorec

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{2} P_l(\cos \vartheta) P_{l'}(\cos \vartheta') = \delta(\cos \vartheta - \cos \vartheta') = \frac{1}{\sin \vartheta} \delta(\vartheta - \vartheta') \quad (7)$$

Zde je explicitně připomenut vztah  $\delta(f(x)) = 1/f' \delta(x - x_0)$ .

**Příklad.** Jako prototyp netriviálního elektrostatického pole nám poslouží rovnoměrně nabitá tyčka (náboj  $Q$ , délka  $2a$ ):

$$4\pi\epsilon_0\Phi(\vec{r}) = \frac{Q}{2a} \ln \frac{z-a-\sqrt{\rho^2+(z-a)^2}}{z+a-\sqrt{\rho^2+(z+a)^2}} \quad (8)$$

Uvažujme hodnoty potenciálu na poloose  $z > 0$

$$4\pi\epsilon_0\Phi(z) = \frac{Q}{2a} \ln \frac{z+a+\sqrt{(z+a)^2}}{z-a+\sqrt{(z-a)^2}} = \frac{Q}{2a} \ln \frac{z+a}{z-a} = \frac{Q}{2a} \ln \frac{1+\frac{a}{z}}{1-\frac{a}{z}} \quad (9)$$

Při uvážení rozvoje  $\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 + \dots$  dostaneme

$$4\pi\epsilon_0\Phi(z) = \frac{Q}{z} \left( 1 + \frac{1}{3} \left(\frac{a}{z}\right)^2 + \frac{1}{5} \left(\frac{a}{z}\right)^4 + \frac{1}{7} \left(\frac{a}{z}\right)^6 + \dots \right) \quad (10)$$

Protože platí, že  $P_l(\cos 0) = 1$ , musí  $Q, Qa^2/3, Qa^4/5$  atd. být koeficienty  $q_0, q_2, q_4$  atd. v multipólovém rozvoji .

Ověříme, zda koeficienty souhlasí:

$$q_l = \int_{-a}^a \frac{Q}{2a} |z|^l P_l(\cos \vartheta) dz, \quad \cos \vartheta = \frac{z}{|z|} = \text{sgn } z \quad (11)$$

Pro lichá  $l$  je integrand lichá funkce (nebot  $P_{2k+1}(\pm 1) = \pm 1$ ) a tak nenulové zůstanou jen sudé koeficienty

$$q_{2n} = \frac{Q}{2n+1} a^{2n} \quad (12)$$

totožné s těmi, jaké jsme určili z rozvoje potenciálu podél osy  $z$ .

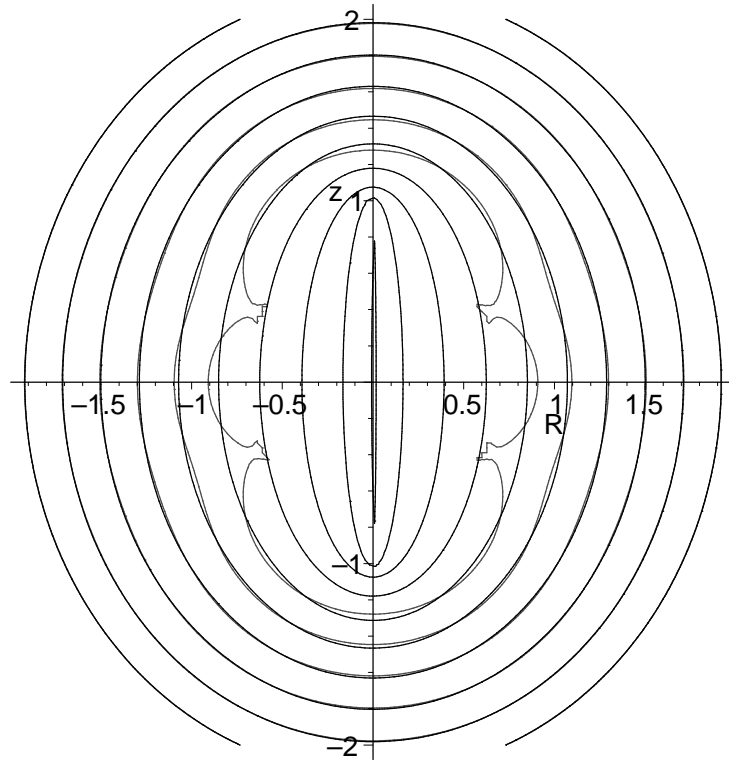


Figure 1: Srovnání ekvipotenciál pole nabitě úsečky a prvních třech nenulových členů multipólového rozvoje. Pověšměte si, jak se projevuje existence poloměru konvergence řady v  $1/r$ . Poloměr konvergence je 1.

### Příklad 3-1: (Legendreovy polynomy)

**Zadání:** Uvažujte definici Legendreových polynomů

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xw+x^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} x^l P_l(w).$$

Ukažte, že

a)  $P_0(w) = 1, P_1(w) = w, P_2(w) = \frac{3}{2}w^2 - \frac{1}{2}$ . Je vhodné nejprve využít vztahu

$$\frac{1}{\sqrt{1+t}} = 1 - \frac{1}{2}t + \frac{3}{8}t^2 \mp \dots$$

→ jen v krajním případě počítat derivace z výrazů

$$\left(\frac{1}{s}\right)' = \frac{(w-x)}{s^3}, \left(\frac{1}{s}\right)'' = \frac{3w^2 - 4xw + 2x^2 - 1}{s^5}$$

b)  $P_l(w)$  je polynom stupně  $l$  v proměnné  $w$ ,

c)  $P_l(\pm 1) = (\pm 1)^l$

d) jsou-li  $r$  a  $\vartheta$  sférické souřadnice (zkuste položit  $x = a/r$ ),

$$\Delta \frac{P_l(\cos \vartheta)}{r^{l+1}} = 0$$

Povšimněte si, že generující vzorec pro Legendreovy polynomy (1) souvisí s potenciálem náboje umístěného na ose  $z$  ve vzdálenosti  $a$  od počátku.

✓ Řešení:

### Příklad 3-2: (Pole axiálně symetrického zdroje)

**Zadání:** Ukažte, že elektrostatické pole axiálně symetrického zdroje lze na ose  $z > 0$  a daleko od zdrojů psát ve tvaru

$$\Phi(x = 0, y = 0, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{q_l}{z^{l+1}},$$

kde koeficienty  $q_l$  jsou dány vlastnostmi zdroje

$$q_l = \int_V \rho(\vec{x}') (r')^l P_l(\cos \vartheta') d^3x'$$

✓ Řešení:

### Příklad 3-3: (Obecný multipólový rozvoj)

**Zadání:** Ukažte, že za předpokladu, že pole daleko od zdrojů lze rozvinout do řady v  $1/r$  (to je důsledkem předpokladů obecného multipólového rozvoje, jaké platí i pro tento speciální případ), je pole buzené zdrojem popsáno multipólovým rozvojem

$$\Phi(r, \vartheta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} q_l \frac{P_l(\cos \vartheta)}{r^{l+1}}$$

Poznámka. Legendrovy polynomy jsou vzorovým příkladem ortogonální báze funkcí, na rozdíl od kulových funkcí je jejich normalizace a fáze volena vztahem  $P_l(1) = 1$  a tak relace ortogonality vypadá následovně

$$\int_{-1}^1 P_l(z)P_{l'}(z)dz = \int_{-1}^1 P_l(\cos \vartheta)P_{l'}(\cos \vartheta)d \cos \vartheta = \frac{2}{2l+1} \delta_{ll'}$$

a úplnost dokládá vzorec

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{2} P_l(\cos \vartheta)P_l(\cos \vartheta') = \delta(\cos \vartheta - \cos \vartheta') = \frac{1}{\sin \vartheta} \delta(\vartheta - \vartheta')$$

Zde je explicitně připomenut vztah  $\delta(f(x)) = 1/f' \delta(x - x_0)$ .

✓ Řešení:



### Příklad 3-4: (Rovnoměrně nabitá tyčka)

**Zadání:** Příklad. Jako prototyp netriviálního elektrostatického pole nám poslouží rovnoměrně nabitá tyčka (náboj  $Q$ , délka  $2a$ ):

$$4\pi\epsilon_0\Phi(\vec{r}) = \frac{Q}{2a} \ln \frac{z - a - \sqrt{\rho^2 + (z - a)^2}}{z + a - \sqrt{\rho^2 + (z + a)^2}}$$

Uvažujme hodnoty potenciálu na poloose  $z > 0$

$$4\pi\epsilon_0\Phi(z) = \frac{Q}{2a} \ln \frac{z + a + \sqrt{(z + a)^2}}{z - a + \sqrt{(z - a)^2}} = \frac{Q}{2a} \ln \frac{z + a}{z - a} = \frac{Q}{2a} \ln \frac{1 + \frac{a}{z}}{1 - \frac{a}{z}}$$

Při uvážení rozvoje  $\ln(1 + x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 + \dots$  dostaneme

$$4\pi\epsilon_0\Phi(z) = \frac{Q}{z} \left( 1 + \frac{1}{3} \left(\frac{a}{z}\right)^2 + \frac{1}{5} \left(\frac{a}{z}\right)^4 + \frac{1}{7} \left(\frac{a}{z}\right)^6 + \dots \right)$$

Protože platí, že  $P_l(\cos 0) = 1$ , musí  $Q, Qa^2/3, Qa^4/5$  atd. být koeficienty  $q_0, q_2, q_4$  atd. v multipólovém rozvoji. Ověříme, zda koeficienty souhlasí:

$$q_l = \int_{-a}^a \frac{Q}{2a} |z|^l P_l(\cos \vartheta) dz, \quad \cos \vartheta = \frac{z}{|z|} = \text{sgn } z$$

Pro lichá  $l$  je integrand lichá funkce (nebot  $P_{2k+1}(\pm 1) = \pm 1$ ) a tak nenulové zůstanou jen sudé koeficienty

$$q_{2n} = \frac{Q}{2n+1} a^{2n}$$

totožné s těmi, jaké jsme určili z rozvoje potenciálu podél osy  $z$ .

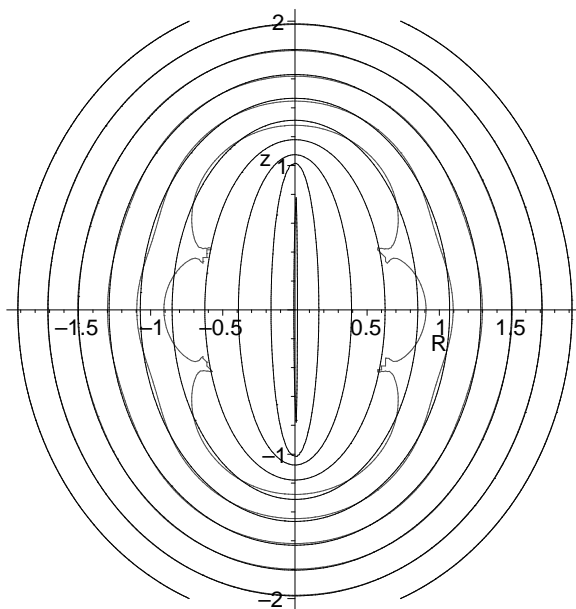


Figure 1: Srovnání ekvipotenciál pole nabitě úsečky a prvních třech nenulových členů multipólového rozvoje. Pověšměte si, jak se projevuje existence poloměru konvergence řady v  $1/r$ . Poloměr konvergence je 1.

✓ Řešení:

# 4 MAGNETOSTATIKA

## Cvičení z Klasické elektrodynamiky – stacionární a pole

### Ampérův zákon

- Nalezněte magnetické pole v koaxiálním vedení, kde ve vnitřním válcovém vodiči o poloměru  $a$  protéká rovnoměrně rozložená objemová proudová hustota odpovídající celkovému proudu  $I$  a na plášti válce s poloměrem  $b > a$  teče rovnoměrně rozložený plošný proud  $-I$ .

### Vektorový potenciál

- Nalezněte vektorový potenciál pro magnetické pole z minulé úlohy.
- Nalezněte vektorový potenciál pro homogenní magnetické pole a)  $B = B_0 \vec{e}_z$ , b)  $B = B_0 \vec{n}$ , kde  $\vec{n}$  je jednotkový směrový vektor. Spočítejte magnetický tok jako  $\int B \cdot d\vec{S}$  a jako  $\oint A \cdot d\vec{l}$ .

### Dipól

- Procvičte si manipulaci s  $\nabla$  spočtením polí elektrického a magnetického dipólu z příslušných potenciálů.

### Biot-Savart-Laplace

- Nalezněte  $\vec{B}$  kruhově smyčky. Není čas dokončit integraci až do podoby eliptických integrálů, takže je dobré aspoň nalézt pole na ose, a pokud to čas dovolí pak i to, že v první aproximaci je daleko pole dipólové. Ukázat, že hodnota magnetického dipólového momentu vyjde jakou součin plochy a proudu.

### Superpozice polí

- Magnetické pole placatého nekonečně dlouhého vodiče s homogenním proudem spočít jako superpozici polí přímkových vodičů. Nezapomenout na diskuzi nespojitostí magnetického pole v ploše vodiče.

### Indukčnost

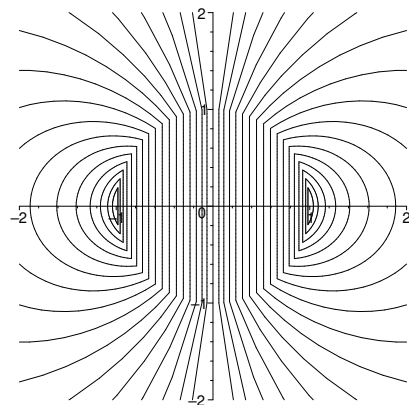
- Uvažujte (časem uvidíme, že kvůli skinefektu), že v koaxiálním vedení (poloměry  $a, b$ ) teče na obou vodičích rovnoměrně rozložená plošná proudová hustota odpovídající celkovému proudu  $I$  a  $-I$ . Nalezněte indukčnost úseku takového vedení. Ověřte, že indukčnost spočtená z magnetického toku resp. z energie magnetického pole souhlasí.

### Ampérův zákon pro vektorový potenciál

- Podle úlohy z Kvasnicovy učebnici (str. 362) nalezněte magnetické pole rotující nabité koule. Diskutujte pro potenciál  $\vec{A}$  vlastnosti vnitřního a vnějšího řešení a také jejich navazování jak pro rovnoměrně nabitou kouli tak i sféru. Ukažte / zdůraňte, že  $\Delta(f\vec{e}_\phi) \neq (\Delta f)\vec{e}_\phi$ .

### Magnetická pole v materiálu

- Nalezněte pole  $\vec{B}$  a  $\vec{H}$  jaká buď permanentní magnet ve tvaru koule vyrobený z dokonale magneticky tvrdého materiálu s konstantní magnetizací  $\vec{M}$  rovnoběžnou s osou  $z$ . Jde o stejné pole, jako výše, ale tentokrát jej hledejte jako navázání homogenního pole uvnitř a dipólového venku se zaměřením na podmínky na rozhraní. Ukažte, že všude na povrchu koule lze opravdu splnit podmínky  $\text{Div } \vec{B} = 0$ ,  $\text{Rot } \vec{H} = 0$ . Ukažte, že tyto podmínky dávají dipólový moment koule rovný součinu objemu koule a magnetizace a že uvnitř je  $\vec{H} = -\vec{M}/3$  a  $\vec{B} = +2\vec{M}/3$ .



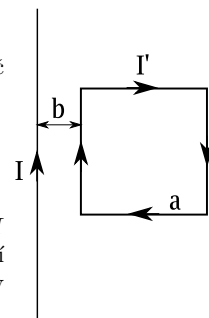
### Magnetické síly

- Nalezněte sílu, jíž na sebe působí čtvercová smyčka o straně  $a$  a přímý nekonečně dlouhý vodič ležící v rovině smyčky, protékají-li jimi proudy  $I$  a  $I'$  orientované dle obrázku.

- Sílu spočítejte z Lorentzovy síly na nosiče náboje ve čtvercové smyčce.
- Sílu určete na základě přiblížení  $a \ll b$ , kdy lze čtvercovou smyčku považovat za dipól.

### Elektromagnetická indukce

- Spočítejte jak velký proud  $I'$  se indukuje uvnitř čtvercové smyčky, mění-li se proud je-li proud  $I$  v závislosti na čase. Předpokládejte, že odpor kruhové smyčky je zanedbatelný, tedy že relaxační doba je mnohem delší, než (například) period proudu  $I$ . Vlastní indukčnost čtvercové smyčky  $L = f\mu_0 a$ , kde  $f$  je faktor, řekněme 3, závislý na tloušťce drátu smyčky atp.

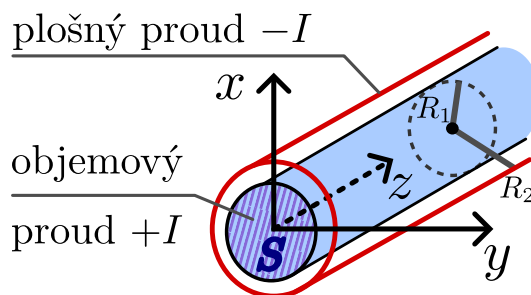


### Příklad 4-1: (Ampérův zákon)

**Zadání:** Mějme 2 nekonečně dlouhé koaxiální vodivé válce u místěné kolineárně s osou  $z$ , jak je vyobrazeno na obrázku.

Vnitřní válec má poloměr  $R_1$  a je vyplněn vodivým materiálem. Vnější válec je dutý a má poloměr  $R_2$ .

Vnějším válcem teče proud  $-I$  a vnitřním válcem protéká proud  $+I$ . Ve vnitřním válci je konstantní objemová proudová hustota  $\vec{j} = j \vec{e}_z$ . Na povrchu vnějšího válce je konstantní plošná hustota proudu  $\vec{j}_S = j \vec{e}_S$



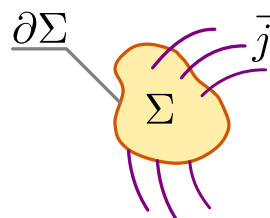
**Úkol:** Vypočítejte, jak vypadá magnetické pole  $\vec{B}$  v celém prostoru.

✓ **Řešení:**

Jsme v magnetostatice a tudíž:  $\Delta \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

**Postup:** Využijeme **Ampérova zákona**

$$\oint_{\partial\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \underbrace{\int_{\Sigma} \vec{j} \cdot d\vec{S}}_{I_{\Sigma}}$$



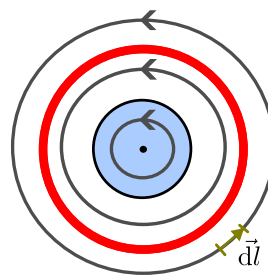
**Integrační oblast:**  $\partial\Sigma =$  kružnice se středem v  $0 = \partial K_R(0)$

$$\oint_{\partial K_R(0)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_{\partial K_R(0)} \vec{B} \cdot \vec{e}_{\varphi} dl = B_{\varphi} 2\pi R = [\text{Ampér. z.}] = \mu_0 I_{\Sigma} \Rightarrow \boxed{B_{\varphi} = \frac{\mu_0 I_{\Sigma}}{2\pi R}}$$

Nyní vypočítáme, čemu se rovná  $I_{\Sigma}$  pro 3 různé integrační oblasti (vizte obrázek)

- uvnitř vnitřního válce  $R < R_1$
- mezi válci  $R_1 < R < R_2$
- vně válců  $R_2 < R$

$$I_{\Sigma} = \begin{cases} R < R_1 & I_{\Sigma} = \frac{R^2}{R_1^2} I \\ R_1 < R < R_2 & I_{\Sigma} = I \\ R_2 < R & I_{\Sigma} = I + (-I) = 0 \quad (\text{uzavřený obvod}) \end{cases}$$



$$B_{\varphi} = \begin{cases} R < R_1 & \frac{\mu_0 I_{\Sigma}}{2\pi R} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{R}{R_1^2} \\ R_1 < R < R_2 & \frac{\mu_0 I_{\Sigma}}{2\pi R} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{R} \\ R_2 < R & \frac{\mu_0 I_{\Sigma}}{2\pi R} = 0 \end{cases}$$

**Alternativně** můžeme počítat s využitím  $j$  a  $j_S$ , a oba výsledky porovnat při znalosti:

$$j = |\vec{j}| = \frac{I}{\pi R_1^2}, \quad j_S = |\vec{j}_S| = \frac{I}{2\pi R_2}$$

$R < R_1$  :

$$\oint_{\partial\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\Sigma}$$

$$B_{\varphi} 2\pi R = \mu_0 \pi R^2 j \quad \Rightarrow \quad B_{\varphi} = \frac{\mu_0 j}{2} R$$

$R_1 < R < R_2$  :

$$\oint_{\partial S} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\Sigma}$$

$$B_{\varphi} 2\pi R = \mu_0 \pi R_1^2 j \quad \Rightarrow \quad B_{\varphi} = \frac{\mu_0 j}{2} \frac{R_1^2}{R}$$

$R_2 < R$  :

$$\oint_{\partial\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\Sigma}$$

$$B_{\varphi} 2\pi R = \mu_0 (\pi R_1^2 j - 2\pi R_2 j_S) \quad \Rightarrow \quad B_{\varphi} = \frac{\mu_0 (R_1^2 j - 2R_2 j_S)}{2R} = \mu_0 \left( j \frac{R_1^2}{2R} - j_S \frac{R_2}{R} \right)$$

$$\Downarrow$$

$$B_{\varphi} 2\pi R = \mu_0 (I - I) = 0$$

Ověříme hodnoty magnetického pole na rozhraní. Využijeme Maxwellovy rovnice a skokové podmínky magnetického pole.

$$B_{\varphi}(R_1^-) = \lim_{R \rightarrow R_1^-} B_{\varphi} = \lim_{R \rightarrow R_1^-} \frac{\mu_0 j}{2} R = \frac{\mu_0 j}{2} R_1$$

$$B_{\varphi}(R_1^+) = \lim_{R \rightarrow R_1^+} B_{\varphi} = \lim_{R \rightarrow R_1^+} \frac{\mu_0 j}{2} \frac{R_1^2}{R} = \frac{\mu_0 j}{2} R_1 \quad \checkmark$$

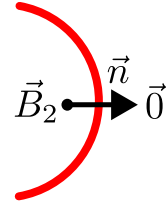
Na rozhraní  $R_1$  tedy nepozorujeme **žádný skok** v  $\vec{B}$ , neboť  $B_{\varphi}(R_1^+) - B_{\varphi}(R_1^-) = 0$

Na rozhraní  $R_2$  je situace odlišná:

$$B_\varphi(R_2^+) - B_\varphi(R_2^-) = \mu_0 \left( j \frac{R_1^2}{2R_2} - j_s \frac{R_2}{R_2} \right) - \frac{\mu_0 j}{2} \frac{R_1^2}{R_2} = -\mu_0 j_s$$

Tedy skok na rozhraní jest dán výrazem:

$$\vec{n} \times [\vec{B}]_n = \vec{n} \times [\vec{0} - \vec{B}_2] = -\mu_0 \vec{j}_s$$



#### Příklad 4-2: (Vektorový potenciál magnetického pole)

**Úkol:** Pro magnetické pole  $\vec{B}$  vypočítané v minulém příkladu ověřte jeho korektnost a odvoďte tvar jeho vektorového potenciálu  $\vec{A}$

V minulém příkladu nám vyšlo magnetické pole  $\vec{B}$  ve tvaru:

$$\vec{B} = kR^n \vec{e}_\varphi$$

- Ověříme, že nalezené pole splňuje „nejbezpečnější“ Maxwellovu rovnici:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

Rozepíšeme si v obecném tvaru a následně dosadíme:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial q_1} (h_2 h_3 B_1) + \frac{\partial}{\partial q_2} (h_1 h_3 B_2) + \frac{\partial}{\partial q_3} (h_1 h_2 B_3) \right]$$

$$\begin{aligned} \text{kde: } q_1 &= R, & q_2 &= \varphi, & q_3 &= z \\ h_1 &= h_R = 1, & h_2 &= h_\varphi = R, & h_3 &= h_z = 1 \\ \vec{B} &= B_1 \vec{e}_1 + B_2 \vec{e}_2 + B_3 \vec{e}_3 = 0 \vec{e}_R + kR^n \vec{e}_\varphi + 0 \vec{e}_z \end{aligned}$$

Tedy celkem dostaneme:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \frac{1}{1 \cdot R \cdot 1} \left[ \frac{\partial}{\partial R} (0) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (1 \cdot kR^n) + \frac{\partial}{\partial z} (R \cdot 0) \right] = 0 \quad \checkmark$$

- Podíváme se ještě na druhou Maxwellovu rovnici pro  $\vec{B}$  (pro stacionární proudy):

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

Poznámka: V Maxwellových rovnicích vystupuje vždy objemová hustota proudu, rovnice popisují 3D pole.

Bereme tedy  $\vec{B} = kR^n \vec{e}_\varphi$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{R} \begin{vmatrix} \vec{e}_R & R\vec{e}_\varphi & \vec{e}_z \\ \partial_R & \partial_\varphi & \partial_z \\ B_R & RB_\varphi & B_z \end{vmatrix} \rightarrow \text{když daná věc nezávisí na dané souřadnici, píšeme rovnou 0} \rightarrow$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{R} \begin{vmatrix} \vec{e}_R & R\vec{e}_\varphi & \vec{e}_z \\ \partial_R & 0 & 0 \\ 0 & RB_\varphi & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{R} \vec{e}_z \partial_R (kR^{n+1}) = \boxed{k(n+1)R^{n-1} \vec{e}_z}$$

Zkontrolujeme dosazením:

$R < R_1$	$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{R_1^2} (1+1) R^{1-1} \vec{e}_z = \mu_0 \frac{I}{\pi R_1^2} \vec{e}_z = \mu_0 j \vec{e}_z$ ✓
$R_1 < R < R_2$	$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} (-1+1) R^{-1-1} \vec{e}_z = \frac{\mu_0 I}{2\pi} 0 \vec{e}_z = \vec{0}$ ✓ ... těmito body prostoru neprochází žádný proud
$R_2 < R$	$\vec{B} = \vec{0} \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{0}$ ✓ ... těmito body prostoru neprochází žádný proud

- Jdeme odvodit vektorový potenciál  $\vec{A}$  z  $\vec{B}$  pro  $k = \frac{\mu_0 I}{2\pi R_1^2}$ :

$$\vec{B} = \begin{cases} R < R_1 & kR \vec{e}_\varphi \\ R_1 < R < R_2 & k \frac{R_1^2}{R} \vec{e}_\varphi \\ R_2 < R & 0 \end{cases}$$

Víme, že platí vzoreček:

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B}$$

Dále víme, že:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A} = \mu_0 \vec{j}$$

$$\Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}$$

$\vec{j} = j \vec{e}_z$ ;  $j$  je konstantní ve směru  $z$  (stacionární proudy),  $\Rightarrow \vec{e}_z$  je konstantní vektor

$$\Delta(A_z \vec{e}_z) = \vec{e}_z \Delta(A_z) = -\mu_0 j \vec{e}_z$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times (A_z \vec{e}_z) = \frac{1}{R} \begin{vmatrix} \vec{e}_R & R \vec{e}_\varphi & \vec{e}_z \\ \partial_R & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_z \end{vmatrix} = -\vec{e}_\varphi \partial_R A_z$$

Začneme s případem dosazení do levé strany rovnice  $\vec{B}$  pro  $R < R_1$

$$(\vec{B} =) kR \vec{e}_\varphi = -\vec{e}_\varphi \partial_R A_z$$

$$kR = -\frac{\partial A_z}{\partial R}$$

$$k \int R dR = -A_z$$

$$A_z = -\frac{k}{2} R^2 + C_1$$

Pokračujeme s případem dosazení do levé strany rovnice  $\vec{B}$  pro  $R_1 < R < R_2$

$$(\vec{B} =) k \frac{R_1^2}{R} \vec{e}_\varphi = -\vec{e}_\varphi \partial_R A_z$$

$$k \frac{R_1^2}{R} = -\frac{\partial A_z}{\partial R}$$

$$k R_1^2 \int \frac{1}{R} dR = -A_z$$

$$\boxed{A_z = -k R_1^2 \ln \left( \frac{R}{R_2} \right)} \quad \dots \text{kde jsme zvolili} \\ \text{integrační konstantu } C_2 = \ln(R_2)$$

$$A_z = \begin{cases} R < R_1 & -\frac{k}{2} R^2 + C_1 \\ R_1 < R < R_2 & -k R_1^2 \ln \left( \frac{R}{R_2} \right) \\ R_2 < R & 0 \end{cases} \left. \begin{array}{l} \text{spojité } A_z; \\ \text{spojité } A_z; \text{ nespojitá } \partial_R A_z \Rightarrow j_z \text{ plošné} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{spojitá } \partial_R A_z \\ \end{array}$$

#### Příklad 4-3: (Vektorový potenciál jiného pole)

**Zadání:** Mějme homogenní magnetické vektorové pole dané předpisem:

$$\vec{B}(\vec{x}) = \vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_z$$

**Úkol:** Spočítejte vektorový potenciál  $\vec{A}$  tohoto pole.

✓ **Řešení:**

$$\vec{B} = B_0 \vec{e}_z = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

$$0 = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \Rightarrow \partial_y A_z = \partial_z A_y = 0 \quad (\text{pozn. zkrácený zápis derivace})$$

$$0 = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \Rightarrow \partial_z A_x = \partial_x A_z = 0$$

$$B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = B_0$$

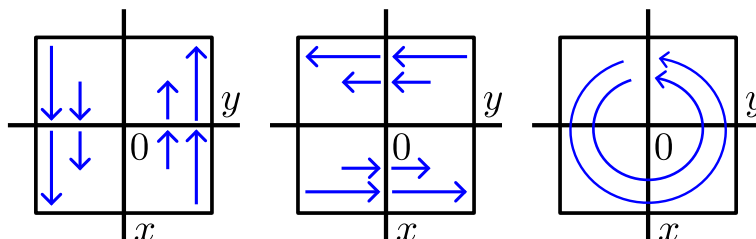
Tušíme, že vektorový potenciál  $\vec{A}$  není dán jednoznačně.

Zkusíme najít jeho různé varianty.

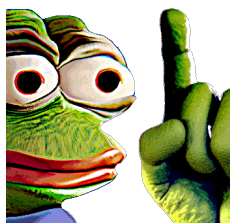
- Položíme druhou derivaci v  $B_z$  rovnou nule.
- Položíme první derivaci v  $B_z$  rovnou nule.
- Vezmeme aritmetický průměr těchto dvou řešení.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial A_y}{\partial x} = B_0 &\Rightarrow A_y = xB_0 + (C = 0) \\ -\frac{\partial A_x}{\partial y} = B_0 &\Rightarrow A_y = -yB_0 + (C = 0) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{\vec{A} = \frac{B_0}{2}(-y, x) = \frac{B_0}{2}R\vec{e}_\varphi}$$

Graficky pak tyto potenciály vypadají následovně:



**Ponaučení:** Nelze sestavit vektorový potenciál  $\vec{A}$  se stejnými symetriemi, jako má  $\vec{B}$ , derivate by nám ho vynulovaly, svině jedny!



Pro zajímavost si zkusíme vypočítat, co nám vyjde, pokud tato dvě pole od sebe odečteme:

$$\vec{P} = x\vec{e}_y$$

$$\vec{Q} = -y\vec{e}_x$$

$$\vec{P} - \vec{Q} = x\vec{e}_y + y\vec{e}_x = \vec{\nabla}(xy)$$

Pole má ale kalibrační volnost, přičteme-li gradient tohoto pole, nic se nezmění:

$$\vec{A} = \vec{A}(x) + \vec{\nabla}\chi$$

$$\chi = \alpha xy$$

$$\alpha : \rightarrow \vec{A}_{(y)}, \vec{A}_{(\varphi)}$$

$$\vec{A} = (-B_y + \alpha y, \alpha x, 0)$$

$$\vec{A}_{(y)} = (0, +Bx, 0)\alpha = B_0$$

$$\vec{A}_{(\varphi)} = \left(-\frac{By}{2}, +\frac{Bx}{2}, 0\right)\alpha = \frac{B_0}{2}$$

$$\vec{A}_{(\varphi)} = \left(-\frac{B(y-y_0)}{2}, \frac{B(x-x_0)}{2}, 0\right)$$

$$\left. \begin{aligned} \chi_{,x} &= \frac{By_0}{2} \\ \chi_{,y} &= -\frac{Bx_0}{2} \\ \chi_{,z} &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \chi = \frac{By_0}{2}x - \frac{Bx_0}{2}y$$

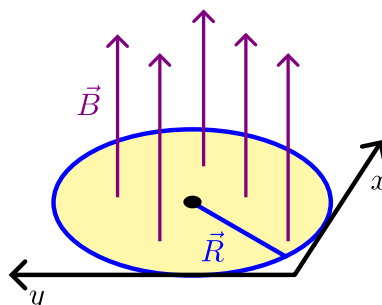


#### Příklad 4-4: (Stokesova věta)

**Zadání:** Mějme stejné pole, jako z předchozího příkladu, toť jest:

$$\vec{B}(\vec{x}) = \vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_z$$

Dále mějme plochu v rovině  $z = 0$ , na níž je toto pole kolmé. Plocha má tvar kruhu o poloměru  $R$ .



**Úkol:** Pomocí Stokesovy věty spočtete magnetický tok  $\Phi_B$  touto plochou.

#### ✓ Řešení:

Uvedeme si nejprve Stokesovu větu:

$$\oint_{\partial\Sigma} \vec{U} \cdot d\vec{l} = \int_{\Sigma} (\vec{\nabla} \times \vec{U}) \cdot d\vec{\Sigma}$$

Rotace sežere jednu dimenzi (dáme 2 vektory a vypadne jen 1)



Využijeme nyní, že:

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B}$$

Dostaneme:

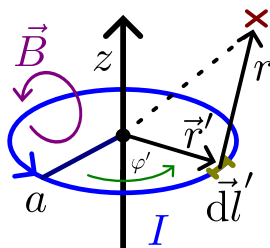
$$\oint_{\partial S} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

$$\text{PS: } \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_S B_0 \underbrace{\vec{e}_z \cdot \vec{e}_z}_{=1} dS = \int_0^{2\pi} \int_0^R B_0 |J| dr d\varphi = 2\pi B_0 \int_0^R r dr = B_0 \pi R^2$$

$$\text{LS: } \oint_{\partial S} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \left| \begin{array}{l} \vec{A} = \frac{B_0}{2} R \vec{e}_\varphi \\ \text{z minulého příkladu} \end{array} \right| = \oint_{dS} \frac{B_0}{2} R \underbrace{\vec{e}_\varphi \cdot \vec{e}_\varphi}_{\varphi=1} dl = \frac{B_0}{2} R 2\pi R = B_0 \pi R^2 \quad \checkmark$$

### Příklad 4-5: (Biot-Savartův zákon)

**Zadání:** Mějme smyčku ve tvaru kružnice, se středem na ose  $z$  v počátku, jíž prochází proud  $I$ , vizte obrázek.



**Úkol:** Určete  $\vec{B}(\vec{r})$ , kde  $\vec{r}$  ... bod zkoumání pole.

✓ **Řešení:**

Využijeme **Biot-Savartova zákona:**

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\overbrace{d\vec{J}}^{\equiv d\vec{J}}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

Parametrisujeme si body na kružnici:

$$\vec{r}' = \begin{cases} x'(\varphi') = a \cos(\varphi') \\ y'(\varphi') = a \sin(\varphi') \\ z'(\varphi') = z = 0 \dots \text{pokládáme} \end{cases} \dots \text{tady zkoumáme proud}$$

Dále platí:  $d\vec{J}' = I \cdot d\vec{l}'$

A ještě si parametrisujeme i orientovaný kružnicový element  $d\vec{l}'$ .

$$d\vec{l}' = \begin{cases} dx' = -a \sin(\varphi') d\varphi' \\ dy' = a \cos(\varphi') d\varphi' \\ dz' = 0 \end{cases} \text{ Z axiální symetrie pak volíme složky } \vec{r} \text{ jako:}$$

$$\vec{r} = \begin{cases} x = R \\ y = 0 \dots \text{pokládáme} \\ z = z \end{cases} \dots \text{tady zkoumáme magnetické pole}$$

$$\vec{r} - \vec{r}' = \begin{pmatrix} R - a \cos(\varphi') \\ 0 - a \sin(\varphi') \\ z - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R - a \cos(\varphi') \\ -a \sin(\varphi') \\ z \end{pmatrix}$$

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{R^2 - 2Ra \cos(\varphi') + \underbrace{a^2 \cos^2(\varphi') + a^2 \sin^2(\varphi')}_{=a^2} + z^2} = \sqrt{R^2 + a^2 + z^2 - 2R \cos(\varphi')}$$

$$d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}') = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ -a \sin(\varphi') & a \cos(\varphi') & 0 \\ R - a \cos(\varphi') & -a \sin(\varphi') & z \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} z a \cos(\varphi') \\ z a \sin(\varphi') \\ a^2 \sin^2(\varphi') - a \cos(\varphi') (R - a \cos(\varphi')) \end{pmatrix}$$

Celkem dostáváme:

$$B_x = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{z a \cos(\varphi')}{(R^2 + a^2 + z^2 - 2R \cos(\varphi'))^{\frac{3}{2}}} d\varphi'$$

$$B_y = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{z a \sin(\varphi')}{(R^2 + a^2 + z^2 - 2R \cos(\varphi'))^{\frac{3}{2}}} d\varphi' = 0 \dots \text{lichý integrand přes symetrické meze}$$

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a^2 - a R \cos(\varphi')}{(R^2 + a^2 + z^2 - 2R \cos(\varphi'))^{\frac{3}{2}}} d\varphi'$$

⇒ Dále bychom museli řešit pomocí eliptických integrálů.

Zajímá nás alespoň hodnota na ose  $z$  ( $R = 0$ ):

$$B_x(R = 0) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{z a \cos(\varphi')}{(a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} d\varphi' = 0 \dots (\text{vede na } k \sin(-\pi) = k \sin(\pi) = 0)$$

$$B_z(R = 0) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a^2}{(a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} d\varphi' = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{a^2}{(a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

### Příklad 4-6: (Magnetický dipól)

**Zadání:** Mějme magnetické pole smyčky na ose  $z$  ( $R = 0$ ) z předchozího příkladu zadané rovnicí:

$$\vec{B}_{\text{smyčka}}(R = 0) = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R_1^2}{(z^2 + R_1^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{e}_z$$

Dále mějme jeho přibližnou dipólovou aproximaci pro  $R \ll z$  (daleko)

$$\vec{B}_{\text{dip}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\vec{m} \cdot \vec{r})\vec{r} - \vec{m}r^2}{r^5}$$

**Úkol:** Porovnáním těchto výrazů pro  $z \rightarrow \infty$  odvoďte magnetický moment  $\vec{m}$ .

#### ✓ Řešení:

Spočteme limitu

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \vec{B}_{\text{smyčka}} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R_1^2}{(z^2 + R_1^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{e}_z \sim \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R_1^2}{|z|^3} \vec{e}_z$$

Zkoumáme chování magnetického pole pouze na ose  $z$ , tedy:  $\vec{m} = m_z \vec{e}_z$

$$\vec{r} = (0, 0, z) = z \vec{e}_z$$

$$|\vec{r}| = |z|$$

Upravíme výraz pro dipólový rozvoj dosazením těchto hodnot:

$$\vec{B}_{\text{dip}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3m_z z z \vec{e}_z - z^2 m_z \vec{e}_z}{|z|^5} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3m_z \vec{e}_z - m_z \vec{e}_z}{|z|^3} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{m_z}{|z|^3} \vec{e}_z$$

Odsud porovnáním obou vztahů ( $\vec{B}_{\text{smyčka}}$  a  $\vec{B}_{\text{dip}}$ ) dostáváme, čemu se musí rovnat  $m_z$ :

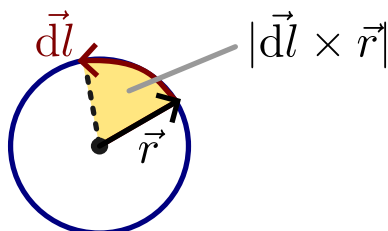
$$\frac{m_z}{\pi} = I R_1^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{m_z = I \pi R_1^2}$$

$$\text{Tedy: } \boxed{\vec{m} = m_z \vec{e}_z = I \pi R_1^2 \vec{e}_z}$$

**Ověření (alternativní metodou):**

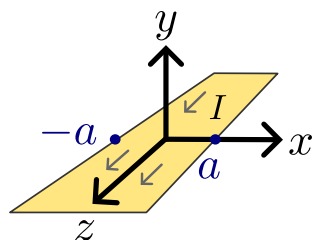
**Ledvinkovo moudro:** „Všechny momenty začínají na  $\vec{r} \times \dots$ ”

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \oint \vec{r} \times d\vec{J} = I \oint \frac{\vec{r} \times d\vec{l}}{2} = I \int_0^{2\pi} \int_0^{R_1} \frac{R_1 \vec{e}_r \times \vec{e}_\varphi}{2} dr d\varphi = I \frac{2\pi R_1^2}{2} \vec{e}_z = I \pi R_1^2 \vec{e}_z \quad \checkmark$$



### Příklad 4-7: (Superposice polí)

**Zadání:** Mějme placatý nekonečně dlouhý vodič, jímž teče homogenní proud  $I$  tak, jak je znázorněno na obrázku.



**Úkol:** Určete magnetické pole tohoto vodiče skrze superposici polí přímkových vodičů. Nezapomeňte na diskuzi nespojitostí magnetického pole v ploše vodiče.

### ✓ Řešení:

- V celém příkladu vzhledem ke geometrii problému nic nezávisí na  $z$ , můžeme tak volit  $z = 0$ .

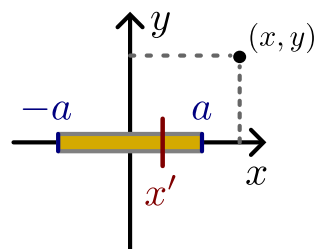
Využijeme **Biot-Savartova zákona**:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\overbrace{d\vec{J}'}^{\equiv d\vec{J}'}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \times (\vec{r} - \vec{r}')$$

$$I \mapsto d\vec{J}' = I d\vec{l}'$$

$$\vec{j}_S \mapsto \vec{j}_S dS = I$$

$$\vec{j}_S = \frac{I}{2a} \vec{e}_z$$



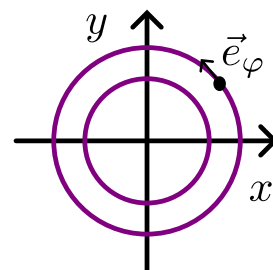
**Ledvinkovo moudro:** „Při posouvání se složky nemění, mění se pouze souřadnice.“

!!! **Důležité!** Budeme **sčítat vektory**, proto potřebujeme přejít do **kartézských souřadnic**. !!!

V cylindrických souřadnicích máme pro  $\vec{e}_\varphi$

$$\vec{e}_R = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_\varphi = \frac{1}{h_\varphi} \frac{\partial \vec{e}_R}{\partial \varphi} = \frac{1}{R} \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{R} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$$



Vyjádříme si magnetické pole vodiče v bodě  $(x, y)$  (využijeme **Ampérova zákona**):

$$\oint_{\partial\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \underbrace{\int_{\Sigma} \vec{j} \cdot d\vec{S}}_{I_\Sigma}$$

$$\vec{B}_0 = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \vec{e}_\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} (-y, x, 0)$$

Dále budeme počítat v bodě  $(x', y)$ , tedy provedeme:

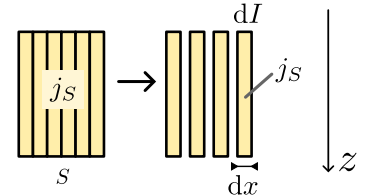
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x - x' \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Tedy vypočítáme magnetické pole vodiče v  $x'$ :

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi ((x - x')^2 + y^2)} (-y, x - x', 0)$$

Vyjádříme si integrační element:

$$dI = j_S dx' = \frac{I}{2a} dx'$$



$$\vec{B} = \int_{\Sigma} d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi 2a} \int_{-a}^a \frac{(-y, x - x', 0)}{(x - x')^2 + y^2} dx'$$

$$\begin{aligned} B_x &= \int_{-a}^a \frac{-y}{(x - x')^2 + y^2} dx' = \int_{-a}^a \frac{-y}{y^2 \left[ \underbrace{\left(\frac{x-x'}{y}\right)^2}_{u} + 1 \right]} dx' = \left| \begin{array}{l} \text{substitute} \\ u = \frac{x-x'}{y} \\ du = -\frac{1}{y} dx' \end{array} \right| = \int_{-a}^a \frac{-y}{y^2 [u^2 + 1]} (-y) du = \\ &= \int_{\frac{x+a}{y}}^{\frac{x-a}{y}} \frac{1}{u^2 + 1} du = \text{arctg} \left( \frac{x-a}{y} \right) - \text{arctg} \left( \frac{x+a}{y} \right) \end{aligned}$$

$$B_y = \frac{1}{2} \int_{-a}^a \frac{2(x - x')}{(x - x')^2 + y^2} dx' = \left| \begin{array}{l} \text{substitute} \\ s = (x - x')^2 + y^2 \\ ds = -2(x - x') dx' \end{array} \right| = -\frac{1}{2} \int_{(x+a)^2 + y^2}^{(x-a)^2 + y^2} \frac{ds}{s} = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{(x+a)^2 + y^2}{(x-a)^2 + y^2} \right)$$

Tedy celkově dostáváme:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \begin{pmatrix} \text{arctg} \left( \frac{x-a}{y} \right) - \text{arctg} \left( \frac{x+a}{y} \right) \\ \frac{1}{2} \ln \left( \frac{(x+a)^2 + y^2}{(x-a)^2 + y^2} \right) \\ 0 \end{pmatrix}$$

#### • Kontrola:

Pro  $a \rightarrow 0$  bychom měli dostat po aplikaci l'Hospitalova pravidla tvar pole pro nabitý drát:

$$\frac{d}{dx'} \left( \text{arctg} \left( \frac{x - x'}{y} \right) \right) = \frac{\frac{1}{y} \cdot (-1)}{1 + \left( \frac{x-x'}{y} \right)^2} = \frac{-y}{y^2 + (x - x')^2}$$

$$\frac{d}{dx'} \left( -\text{arctg} \left( \frac{x + x'}{y} \right) \right) = \frac{\frac{1}{y} \cdot (+1)}{1 + \left( \frac{x-x'}{y} \right)^2} = -\frac{y}{y^2 + (x - x')^2}$$

$$\lim_{a \rightarrow 0} B_x = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{(-2y)}{\left( x - \overset{0}{a} \right)^2 + y^2} \cdot \frac{\mu_0 I}{4\pi} = -\frac{y}{x^2 + y^2} \cdot \frac{\mu_0 I}{2\pi}$$

$$\lim_{a \rightarrow 0} B_y = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{2(x + a)}{(x + a)^2 + y^2} \cdot \frac{\mu_0 I}{4\pi} = \frac{x}{x^2 + y^2} \cdot \frac{\mu_0 I}{2\pi}$$

Pro  $a \rightarrow 0$  dostáváme:

$$\vec{B}(a = 0) = \mu_0 j \vec{e}_\varphi$$

- Prozkoumáme ještě nespojitost magnetického pole v ploše vodiče:

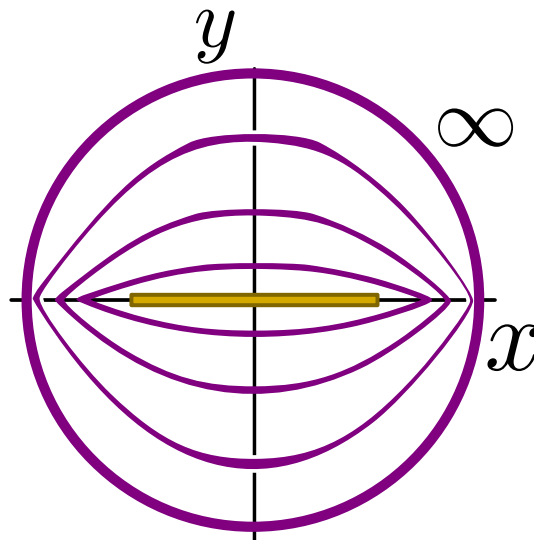
$$\lim_{y \rightarrow 0^+} B_x = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \left[ \left(-\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2} \right] = -\frac{\mu_0 I}{4a}$$

$$\lim_{y \rightarrow 0^-} B_x = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \left[ \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right] = \frac{\mu_0 I}{4a}$$

$$\vec{n} \times [\vec{B}] = \mu_0 \vec{j}_S$$

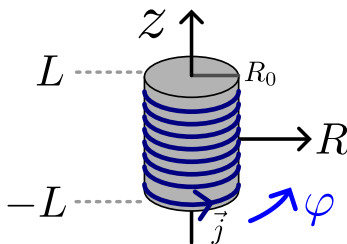
$$\vec{e}_y \times \left(-\frac{\mu_0 I}{2a}\right) \vec{e}_x = \mu_0 \frac{I}{2a} \vec{e}_z$$

Magnetické pole roviny pak vypadá následovně:



### Příklad 4-8: (Pole konečného solenoidu)

**Zadání:** Mějme konečný solenoid se středem v počátku souřadnic a výškou  $2L$ . Drátem protéká proudová hustota  $\vec{j}$ . Hustota vinutí je  $n = \frac{N}{l}$ , kde  $N$  je počet smyček a  $l$  jest délka solenoidu.



Předpokládejme, že cívka je hustě navinutá v kružnicích, můžeme tedy integrovat a zanedbat příspěvek  $j_z$ .

**Úkol:** Vypočítejte, jaké magnetické pole  $\vec{B}$  tento solenoid budí.

✓ **Řešení:**

**Vypočítáme pro nekonečný solenoid:**

Solenoidem protéká plošný proud:

$$\vec{j}_S = In \vec{e}_\varphi$$

**Postup:** Budeme sčítat řešení pro jednotlivé smyčky.

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln(R) \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{((z-z') \cos \varphi', (z-z') \sin \varphi', R - y \sin \varphi')}{(R^2 + y^2 - 2yR \sin \varphi' + (z-z')^2)^{\frac{3}{2}}} d\varphi' dz'$$

Prohodíme pořadí integrace:

$$\text{máme} \sim \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(z-z')}{(\alpha + (z-z')^2)^{3/2}}$$

Víme, že:

$$\int \frac{dx}{(\alpha^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{x}{\sqrt{\alpha^2 + x^2}} \cdot \frac{1}{\alpha^2}$$

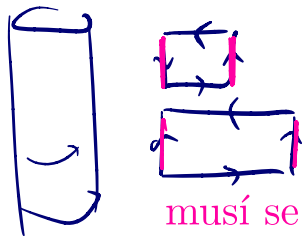
$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \ln(R) \int_0^{2\pi} \left[ \frac{1}{\sqrt{R^2 + y^2 - 2yR \sin \varphi' + (z-z')^2}} \left( \cos \varphi', \sin \varphi', \frac{(z-z')(R - y \sin \varphi')}{R^2 + y^2 - 2yR \sin \varphi'} \right) \right]_{-\infty}^{\infty} d\varphi'$$

**Pole má jen  $z$ -složku:**

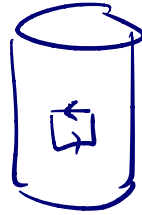
$$B_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \ln(R) \int_0^{2\pi} 2 \frac{R - y \sin(\varphi')}{R^2 + y^2 - 2yR \sin \varphi'} d\varphi'$$



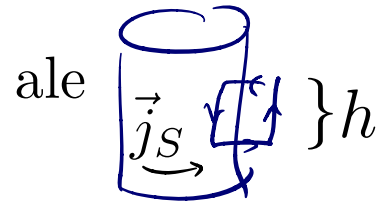
$B \neq B(r)$  ... tříček se Stokesovou větou:



musí se vyrušit



$$\vec{B}_{in} = B_{in} \vec{e}_z$$



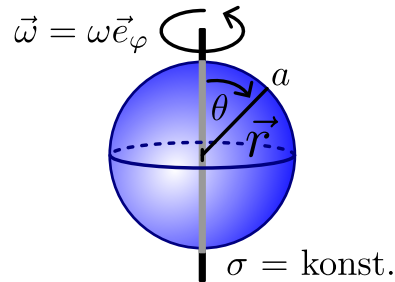
$$\begin{aligned} B_{in} h - \underbrace{B_{out}}_0 h &= -\mu_0 j_s h \\ h B_{in} &= -\mu_0 I n h \\ B_{in} &= -\mu_0 I n \end{aligned}$$

$$\vec{B}_{out} = B_{out} \vec{e}_z$$

řekneme si  $B_{out} = 0$

#### Příklad 4-9: (Pole rotující nabitě sféry)

**Zadání:** V rámci kvazistacionárního přiblížení budeme hledat pole, jaké vytváří otáčející se rovnoměrně nabitá sféra ( s konstantní hustotou plošného náboje  $\sigma$ ) o poloměru  $a$ . Střed sféry položíme do počátku souřadnic. Sféra rotuje okolo osy  $z$  s úhlovou rychlostí  $\omega$ .



Vzhledem k symetrii budeme používat obvyklé sférické souřadnice  $r, \theta, \varphi$ .

**Úkol:** Určete tvar polí  $\vec{B}$  a  $\vec{A}$ .

✓ **Řešení:**

**Ledvinkova rada:** „Vyloučíme Biot-Savarta, dostali bychom totiž  $\int \sqrt{\dots}$ .”

**Postup:**

(1.) Vzhledem ke geometrii problému volíme **sférické souřadnice**.

Velice užitečná vlastnost:  $r = \text{konst.} = a$  je zároveň i hranicí problému.



- (2.) Nábojová hustota  $\sigma = \frac{Q}{4\pi a^2}$  rovnoměrně rozložená na povrchu sféry samozřejmě budí sféricky symetrické elektrické pole

$$\vec{E}_0 = \begin{cases} 0 & r < a \\ \frac{\sigma}{\epsilon_0} \frac{a^2}{r^2} \vec{e}_r & r > a \end{cases}$$

Pro náš Příklad 1-je ale důležité, že pohybující se nábojová hustota vytváří plošnou nábojovou hustotu

$$\vec{j}_S = \sigma \vec{v} = \sigma (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \sigma \omega a \sin \theta \vec{e}_\varphi$$

kde  $a \sin \theta$  představuje vzdálenost bodu na sféře od osy rotace.

**Ledvinkovo moudro:** „Většina bázových vektorů v křivočarých souřadnicích není konstantní.“

### (3.) Dipólové přiblížení:

Začneme tím, že i kdybychom nedokázali najít pole blízko u sféry, u vzdáleného pole lokalizovaného proudu ve velkých vzdálenostech dominuje dipólové magnetické pole určené magnetickým momentem

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \int \vec{r} \times \vec{j}_s dS = \frac{1}{2} \int \vec{r} \times (\sigma \omega a \sin \theta \vec{e}_\varphi) dS = -\frac{1}{2} \sigma \omega a^2 \int \sin \theta \vec{e}_\theta dS.$$

Při výpočtu integrálu vektorové hustoty musíme přejít ke kartézským složkám, protože křivočarý bázový vektor (např.  $\vec{e}_\theta$ ) se mění z místa na místo. Nejsnáze to učiníme tak, že spočteme projekci  $\vec{m}$  do všech tří kartézských směrů, které, jako konstanty, lze převést přes integrační znaménko. Pro  $\vec{e}_x \cdot \vec{m}$  bude integrand úměrný  $\cos \varphi$  a integrace přes  $\varphi \in (0, 2\pi)$  vyjde 0. Protože  $\vec{e}_z \cdot \vec{e}_\theta = -\sin \theta$ , nevymizí ovšem složka  $m_z$ . Při jejím výpočtu ještě použijeme  $\int \sin^2 \theta d\Omega = 8\pi/3$ , což dá  $\int \sin \theta \vec{e}_\theta dS = -8\pi a^2/3 \vec{e}_z$  a následně

$$\vec{m} = \frac{1}{3} Q \omega a^2 \vec{e}_z.$$

Pro další postup je klíčové, že magnetický dipólový moment míří ve směru osy  $z$ , což vidíme i z toho, že proudové pole si lze představit jako mnoho na sebe naskládaných kruhových proudových smyček (rovnoběžek na sféře), každá očividně s dipólovým momentem ve směru  $\vec{e}_z$ . Vektorový potenciál dipólového pole je podle známého vzorečku

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m_z \sin \theta}{r^2} \vec{e}_\varphi$$

kde jsme použili daný směr  $\vec{m} = m_z \vec{e}_z$ .

### (4.) Poissonova rovnice:

V tento okamžik je tedy vidět, že máme naději postoupit dále než jen k dipólovému přiblížení. Rovnice, jejíž řešení hledáme je Ampérův zákon pro vektorový potenciál

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A} = \mu_0 \vec{j}$$

$$\boxed{\Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}}$$

*Odůvodnění:* Nulový člen  $\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A})$  neboť  $\vec{A} = A_\varphi(r, \theta) \vec{e}_\varphi$  a divergence má tvar:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial q_1} (h_2 h_3 A_1) + \frac{\partial}{\partial q_2} (h_1 h_3 A_2) + \frac{\partial}{\partial q_3} (h_1 h_2 A_3) \right]$$

$$\begin{aligned} \text{kde: } q_1 = r, & \quad q_2 = \theta, & \quad q_3 = \varphi \\ h_1 = h_r = 1, & \quad h_2 = h_\theta = r, & \quad h_3 = h_\varphi = r \sin \theta \end{aligned}$$

A jediná složka, která by mohla být nenulová se vynuluje derivací,  $A_\varphi$  nezávisí na  $\varphi$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} A_\varphi(r, \theta) \vec{e}_\varphi = 0$$

**(5.) Volba násady  $g(\theta)$ :**

Vidíme, že  $\vec{A}$  i  $\vec{j}$  mají stejné chování  $\sim \sin \theta \vec{e}_\varphi$ . Proto budeme hledat v celém prostoru vektorový potenciál ve tvaru:

$$\vec{A} = A_\varphi \vec{e}_\varphi = f(r)g(\theta) \vec{e}_\varphi = f(r) \sin(\theta) \vec{e}_\varphi$$

**(6.) Výpočet  $\vec{\nabla} \times \vec{A}$  a  $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A}$**

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{1}{|J|} \begin{vmatrix} \vec{e}_r & r\vec{e}_\theta & r \sin(\theta)\vec{e}_\varphi \\ \partial_r & \partial_\theta & \partial_\varphi \\ 0 & 0 & f(r) \sin(\theta) \cdot \underbrace{r \sin(\theta)}_{\text{Lamého koef.}} \end{vmatrix} = \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} [\vec{e}_r f(r) 2 \sin(\theta) \cos(\theta) r - r \vec{e}_\theta (rf(r))' \sin^2(\theta)]$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{2}{r} f \cos(\theta) \vec{e}_r - \frac{1}{r} (rf)' \sin(\theta) \vec{e}_\theta$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{1}{|J|} \begin{vmatrix} \vec{e}_r & r\vec{e}_\theta & r \sin(\theta)\vec{e}_\varphi \\ \partial_r & \partial_\theta & \partial_\varphi \\ \frac{2f}{r} \cos(\theta) \cdot 1 & -\frac{(rf)'}{r} \sin(\theta) \cdot r & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{|J|} \begin{vmatrix} \vec{e}_r & r\vec{e}_\theta & r \sin(\theta)\vec{e}_\varphi \\ \partial_r & \partial_\theta & 0 \\ \frac{2f}{r} \cos(\theta) & -(rf)' \sin(\theta) & 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \left[ -r \sin^2 \theta \vec{e}_\varphi (rf)'' + r \sin^2 \theta \frac{2f}{r} \vec{e}_\varphi \right] = \left[ -\frac{1}{r} (rf)'' + \frac{2}{r^2} f \right] \sin(\theta) \vec{e}_\varphi$$

Tedy pro vektorový potenciál  $\vec{A}$  platí:

$$\Delta \vec{A} = \Delta (f \sin(\theta) \vec{e}_\varphi) = -\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} = \left[ \frac{1}{r} (rf)'' - \frac{2}{r^2} f \right] \sin(\theta) \vec{e}_\varphi$$

*Komentář:* člen  $\frac{2}{r^2} f$  je tam navíc a ještě k tomu tlustej!

Všimněte si, že výraz v hranaté závorce není  $\Delta f(r)$ , protože  $\Delta (A_\varphi \vec{e}_\varphi) \neq (\Delta A_\varphi) \vec{e}_\varphi$ . Můžete se ptát, co je speciálního na výrazu  $\sin \vartheta \vec{e}_\varphi$ , že beze změny proleze laplaciánem. Tato vlastnost je společná tzv. vektorovým harmonickým funkcím. Polovinu lze zapsat ve tvaru  $\vec{Y}_{lm}^1 = \vec{r} \times \nabla Y_{lm}$ . Spočtěte  $\Delta f(r) \vec{Y}_{lm}^1$ .

**(7.) Pole mimo zdroje**

Mimo zdroje platí Laplaceova rovnice, tedy:  $\Delta \vec{A} = 0$

$$\frac{1}{r} (rf)'' - \frac{2}{r^2} f = 0$$

Řešíme tedy Eulerovu diferenciální rovnici:

$$\frac{(r \cdot r^n)''}{r} - \frac{2r^n}{r^2} = 0$$

Odsud:

$$(n+1)n r^{n-2} - 2r^{n-2} = 0$$

$$(n+1)n = 2 \Rightarrow n \in \{-2, 1\}$$

Obyčejné diferenciální rovnice Eulerova typu mají mocinná řešení, konkrétně zde  $f = \alpha r + \beta r^{-2}$ . Pohledem na rovnici  $\vec{A} = f(r) \sin(\theta) \vec{e}_\varphi$  vidíme, že odpovídají homogennímu a dipólovému magnetickému poli. (Podobně tomu bylo i v elektrostatiice.) Pro naše zadání budeme uvažovat homogenní pole uvnitř sféry a dipólové magnetické pole vně, jinak by v počátku resp. nekonečnu pole rostlo nade všechny meze.

$$A_\varphi = \sin(\theta) \cdot f = \begin{cases} P \sin(\theta) \cdot r & r < a & \dots \text{ homogenní pole (uvnitř)} \\ Q \sin(\theta) \cdot \frac{1}{r^2} & r > a & \dots \text{ dipólové pole (venku)} \end{cases}$$

Dosazením poloměru  $a$  dostaneme:

$$P \sin(\theta) a = Q \sin(\theta) \frac{1}{a^2} \Rightarrow P = \frac{Q}{a^3}$$

### (8.) Podmínky na rozhraní (skokové podmínky)

i.)  $Pa = \frac{Q}{a^2}$

ii.)  $\vec{n} \times [\vec{B}] = \mu_0 \vec{j}_S$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \text{vypočítáno výše} = \frac{2}{r} f \cos(\theta) \vec{e}_r - \frac{1}{r} (rf)' \sin(\theta) \vec{e}_\theta$$

Rozdělíme za  $f$  pro případ uvnitř a venku:

$$f = \begin{cases} Pr & r < a & \dots \text{ homogenní pole (uvnitř)} \\ \frac{Q}{r^2} & r > a & \dots \text{ dipólové pole (venku)} \end{cases}$$

$$\vec{B} = \begin{cases} \frac{2}{r} Pr \cos(\theta) \vec{e}_r - \frac{1}{r} (Pr^2)' \sin(\theta) \vec{e}_\theta = 2P \cos(\theta) \vec{e}_r - 2P \sin(\theta) \vec{e}_\theta & r < a \\ \frac{2}{r} \frac{Q}{r^2} \cos(\theta) \vec{e}_r - \frac{1}{r} \left( \frac{Qr}{r^2} \right)' \sin(\theta) \vec{e}_\theta = \frac{Q}{r^3} (2 \cos(\theta) \vec{e}_r + \sin(\theta) \vec{e}_\theta) & r > a \end{cases}$$

Konstantu  $P$  určuje hodnota skoku tečné složky:

$$\vec{n} \times [\vec{B}] = \mu_0 \vec{j}_S$$

Dosadíme

$$\vec{n} \times [B(r)|_{r \rightarrow a^+} - B(r)|_{r \rightarrow a^-}] = \vec{e}_r \times \left[ \underbrace{\frac{Q}{a^3} 2 \cos(\theta) \vec{e}_r - 2P \cos(\theta) \vec{e}_r + \frac{Q}{a^3} \sin(\theta) \vec{e}_\theta - (-2P \sin(\theta)) \vec{e}_\theta}_{\text{vynuluje vektorový součin}} \right] =$$

$$= \vec{e}_r \times \left( \frac{Q}{a^3} + 2P \right) \sin(\theta) \vec{e}_\theta = \vec{e}_r \times (P + 2P) \sin(\theta) \vec{e}_\theta = 3P \sin(\theta) \vec{e}_\varphi$$

Tedy dostáváme:

$$3P \sin(\theta) \vec{e}_\varphi = \mu_0 \vec{j}_S = \mu_0 \sigma \omega a \sin(\theta) \vec{e}_\varphi \Rightarrow P = \frac{1}{3} \mu_0 \sigma \omega a$$

### (9.) Ověření dipólové aproximace:

Pro  $r > a$  (vně) jsou  $\vec{A}$  i  $\vec{B}$  poli dipólu.

$$\vec{A}_{\text{dip}} = \frac{\mu_0 \vec{m} \times \vec{r}}{4\pi r^3} \quad \begin{array}{l} \vec{m} = m\vec{e}_z \\ \vec{r} = r\vec{e}_z \end{array}$$

$$\vec{A}_{\text{dip}} = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^2} \sin\theta \vec{e}_\varphi \quad \left| \phi_{\text{dip}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{P \cos\theta}{r^2} \right.$$

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \int \vec{r} \times d\vec{J} \quad \dots \text{ pro každý zdroj, když jsem daleko} \\ \text{bude takto vypadat pole}$$

Průvodič je kolmý na  $\vec{e}_\varphi$

**Ledvinkova rada:** Zkusme spočítat z-složku  $m_z$ .

$$m_z = m \cdot \vec{e}_z = \frac{1}{2} \int \vec{e}_z \cdot \left[ a\vec{e}_r \times (\sigma\omega a \sin(\theta) \vec{e}_\varphi) (a^2 \sin(\theta) 2\pi d\theta) \right]$$

$$\vec{e}_z \cdot \underbrace{[\vec{e}_r \times \vec{e}_\varphi]}_{\substack{\text{sférické souřadnice} \\ = \vec{e}_\theta}} = -\vec{e}_\theta \cdot \vec{e}_z = \sin(\theta)$$

$$\vec{e}_z = \nabla z = \nabla(r \cos(\theta))$$

$$\int_0^\pi \sin(\theta) (1 - \cos^2(\theta)) d\theta = \int_{-1}^1 (1 - z^2) dz = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

$$\downarrow \\ m_z = \frac{1}{2} a^4 \sigma^2 \omega 2\pi \int_0^\pi \sin^3(\theta) d\theta = \frac{4}{3} \pi a^4 \sigma \omega$$

Ledvinkův frk: „Rozumíte, já sice píšu strašně, ale píšu strašně po svym.“

### (10.) Finální výpočet:

Dosadíme:

$$\vec{A}_{\text{dip}} = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^2} \sin(\theta) \vec{e}_\varphi = \frac{\mu_0}{4\pi r^2} \cdot \frac{4}{3} \pi a^4 \sigma \omega \sin(\theta) \vec{e}_\varphi = \frac{\mu_0 a^4}{3 r^2} \sigma \omega \sin(\theta) \vec{e}_\varphi$$

Již znám, jak vypadá  $f(r)$  vně koule (dipólové pole):

$$f(r)|_{r>a} = \frac{Q}{r^2} = \frac{Pa^3}{r^2} = \frac{1}{r^2} a^3 \frac{1}{3} \mu_0 \sigma \omega a = \frac{\mu_0 a^4}{3 r^2} \sigma \omega$$

Dopočteme  $\vec{A}$

$$\boxed{\vec{A} = f(r) \sin(\theta) \vec{e}_\varphi = \frac{\mu_0 a^4}{3 r^2} \sigma \omega \sin(\theta) \vec{e}_\varphi}$$

Na sféře můžeme navázat homogenní pole uvnitř s dipólovým polem venku.



$$\vec{B}_1 = B_1 (\cos(\theta)\vec{e}_r - \sin(\theta)\vec{e}_\theta)$$

$$\vec{n} \cdot [\vec{B}] = \left( \frac{\mu_0 m}{4\pi a^3} 2 - B_1 \right) \cos(\theta) = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 m}{2\pi a^3} (\cos(\theta)\vec{e}_r - \sin(\theta)\vec{e}_\theta)}$$

$$\boxed{\vec{H}_2 = \frac{\vec{B}_2}{\mu_0}}$$

$$\vec{n} \times [\vec{H}] = \sin(\theta)\vec{e}_\varphi \left( \frac{m}{4\pi a^3} + H_1 \right) = 0$$

$$H_1, B_1 = ? \rightarrow \text{Chceme, aby platilo: } \vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$$

$$H_1 = \frac{B_1}{\mu_0} - M \Rightarrow \boxed{\frac{m}{4\pi a^3} = \frac{-B_1}{\mu_0} + M}$$

$$M\mu_0 - \frac{m\mu_0}{4\pi a^3} = \frac{\mu_0 m 2}{4\pi a^3}$$

$$M\mu_0 = \frac{3\mu_0 m}{4\pi a^3}$$

Velikost magnetického dipólového momentu nám vychází:

$$\boxed{\vec{m} = \frac{4}{3}\pi a^3 \vec{M}}$$

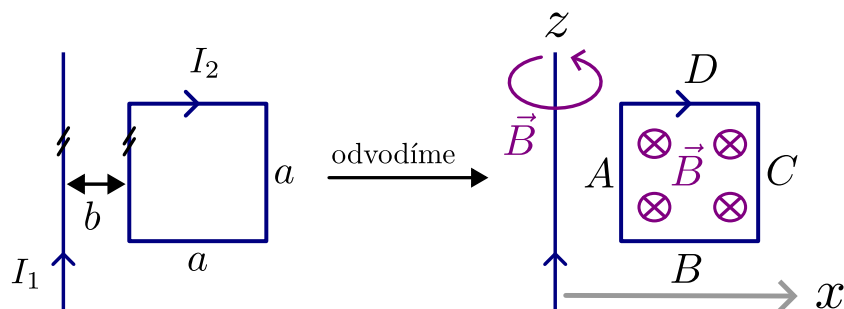
Celkem tedy dostáváme, že:

$$\boxed{H_1 = -\frac{4\pi a^3}{3 \cdot 4\pi a^3} M = -\frac{1}{3}M}$$

$$\boxed{B_1 = \mu_0 \left( -\frac{1}{3} + 1 \right) M = \frac{2}{3}\mu_0 M}$$

### Příklad 4-11: (Magnetická síla mezi 2 dráty)

**Zadání:** Mějme rovný drát, jímž prochází proud  $I_1$  a drát ve tvaru čtverce o straně  $a$ , jímž prochází proud  $I_2$ . Čtvercový drát je ve vzdálenosti  $b$  od rovného drátu.



**Úkol:** Spočítejte sílu  $\vec{F}$ , kterou na sebe tyto dva dráty působí.

✓ **Řešení:**

**Ledvinkova rada:** *Nepoužijeme vzoreček pro sílu mezi 2 smyčkami (museli bychom počítat 2 integrály, když můžeme počítat jen jeden.*

Využijeme toho, že víme, jak vypadá magnetické pole přímého vodiče.

$$\vec{e}_\varphi = \frac{-y}{R} \vec{e}_x + \frac{x}{R} \vec{e}_y \quad \rightarrow \quad (y=0) \quad \Rightarrow \quad \vec{e}_\varphi = \frac{x}{R} \vec{e}_y$$

$$\downarrow$$

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \vec{e}_\varphi \stackrel{(y=0)}{=} \frac{\mu_0 I_1 x}{2\pi R^2} \vec{e}_y \stackrel{(y=0)}{=} \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x} \vec{e}_y$$

V Lorentzově síle máme člen:  $q(\vec{v} \times \vec{B})$ , potřebujeme nějak nahradit neznámou rychlost  $\vec{v}$

$$\vec{F}_2 = \int I_2 d\vec{l}_2 \times \vec{B}_1$$

Víme též, že

$$d\vec{J} = \vec{j} dV = I d\vec{l}$$

$$F_2 = F_{2A} + \dots + F_{2D}$$

$$F_{2A} = \int_0^a I_2 dz \vec{e}_z \times \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x} \vec{e}_y = -\vec{e}_x \left( \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi b} \right) \int_0^a dz = -\frac{\mu_0 I_1 I_2 a}{2\pi b} \vec{e}_x$$

$$F_{2C} = \vec{e}_x \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \frac{a}{a+b}$$

$F_{2B} + F_{2D} = 0 \dots$  nepřispívají, lakomci hnusný!

$$\boxed{\vec{F} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{a+b} \right) \vec{e}_x}$$



## Elektromagnetická indukce

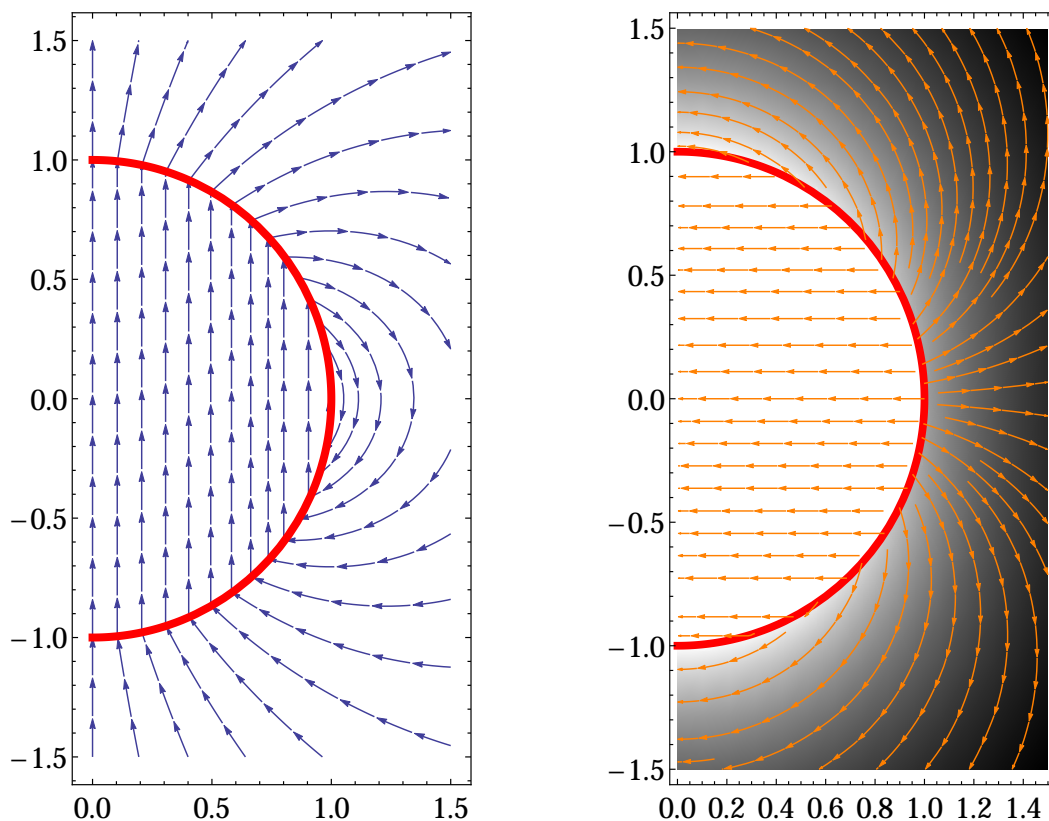
Protože kvazistacionární aproximace připouští i dostatečně pomalu se měnící proudy, je možné v jejím rámci popsat, co se bude dít, když ke sféře přiděláme kliku a mechanickým působením budeme měnit rychlost jejího otáčení. Budeme předpokládat, že náboje jsou ke sféře přilepené a při takovém procesu musejí respektovat, jak kouli otáčíme. Moment síly působící na tyto náboje se tedy přenesou na kliku stejně jako mechanický výkon. Za těchto předpokladů máme model konzervativního systému, (v opačném případě by se část naší práce mohla přeměnit na teplo) a můžeme sledovat, jak se naše práce ukládá do magnetického pole. V kvazistacionárním přiblížení je hustota energie elektrického pole zanedbatelná.

Původní elektrostatické pole  $\vec{E}_0 = -\nabla\Phi_0$  nyní doplní ještě elektrické pole  $\vec{E}_1$ , které se objeví v důsledku změny magnetického pole. To jsme vlastně již spočetli, protože známe vektorový potenciál a tedy  $\vec{E}_1 = -\partial_t\vec{A}$ .

Alternativně lze vyjít ze základního zákona elektromagnetické indukce

$$\oint_{\partial\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{S}. \quad (15)$$

V tomto “obvyklém”, ale pracnějším postupu k určení elektrického pole z Faradayova indukčního zákona potřebujeme tytéž předpoklady (konstantní  $\Phi_1$  v důsledku symetrie úlohy) jako výše. Symetrie úlohy říká, že indukované elektrické pole  $\vec{E}_1$



Obrázek 1: Vlevo: siločáry magnetického pole (13) vzniklé rotací nabitě sférické slupky. Jasně vidíme kombinaci homogenního pole uvnitř a dipólového venku. Vpravo: Poyntingův vektor (21) při roztáčení sféry, kdy se mění magnetické pole a indukované pole elektrické spolu s magnetickým polem dá právě  $\vec{S}_1$ . Proudové čáry tohoto vektorového pole ukazují, jak  $\vec{S}_1$  doplňuje energii magnetického pole, která při roztáčení koule roste. Hustota energie magnetického pole je znázorněna stupni šedi – homogenní magnetické pole uvnitř sféry odpovídá bílé, vně sféry je pole slabší.

bude mít siločáry v podobě kružnic. Ty volíme za hranice  $\partial\Sigma$ , každá taková kružnice je určena  $\vartheta$  a  $r$ . Plochu, která má tuto kružnici za hranici pak ale zvolíme tak, aby se nám dobře počítal příslušný plošný integrál – tedy sférický vrchlík s vrcholovým poloúhlem  $\vartheta$  a poloměrem  $r \sin \vartheta$ . Při této volbě je  $\vec{dS} = \vec{e}_r r^2 \sin \theta d\vartheta d\varphi$  a celá integrace probíhá na konstantním  $r$ , tedy buď pouze uvnitř nebo pouze vně sféry. Podle (8) je  $\vec{B} \cdot \vec{dS} = (2/r)f \cos \vartheta r^2 \sin \theta d\vartheta d\varphi$ . Vztah (15) tak má podobu

$$\oint_{\partial\Sigma} \vec{E} \cdot \vec{dl} = 2\pi r \sin \vartheta E_\varphi = -\frac{d}{dt} \int_\Sigma \vec{B} \cdot \vec{dS} = -\frac{d}{dt} (fr2\pi \sin^2 \vartheta). \quad (16)$$

Po vydělení tedy

$$E_\varphi = -\dot{f} \sin \vartheta. \quad (17)$$

I indukované elektrické pole tedy je

$$\vec{E}_1 = -\partial_t \vec{A} = -\frac{1}{3} \mu_0 \sigma \dot{\omega} a \sin \vartheta \vec{e}_\varphi \begin{cases} r & r < a \\ \frac{a^3}{r^2} & r > a \end{cases}. \quad (18)$$

V kvazistacionárním přiblížení je toto indukované elektrické pole určeno okamžitou hodnotou  $\dot{\omega}$  a to i daleko od sféry.

## Zachování energie – diferenciální pohled

V kvazistacionárním přiblížení ve vakuu má zákon zachování energie podobu

$$-\vec{j} \cdot \vec{E} = \partial_t w_M + \nabla \cdot \vec{S}. \quad (19)$$

Podívejme se, jak v našem konkrétním případě dochází k “vzniku” Poyntingova toku  $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$  v místech “pracujících” proudů, a jak tento tok pak v prostoru “doplňuje” energii magnetického pole  $w_M = |\vec{B}|^2 / (2\mu_0)$ . Především zdrojem výkonu je v našem případě pouze nabitá sféra, ve zbytku prostoru jde o obyčejnou rovnici kontinuity. To zjednoduší interpretaci, protože magnetická energie energie na jednom místě vzniká, jinde se jen ukládá. U zdroje s konečným objemem bychom toto v objemu zdroje na první pohled neodlišili.

Poyntingův vektor spočteme snadno, pro další diskusi jej ale rozdělíme na  $\vec{S} = \vec{S}_0 + \vec{S}_1$ , kde  $\vec{S}_0 = \vec{E}_0 \times \vec{H}$  a  $\vec{S}_1 = \vec{E}_1 \times \vec{H}$ . Poté

$$\vec{S}_0 = \frac{\sigma B_0}{2\mu_0 \epsilon_0} \begin{cases} 0 & r < a \\ \frac{a^5}{r^5} \sin \vartheta \vec{e}_\varphi & r > a \end{cases}, \quad (20)$$

$$\vec{S}_1 = \frac{\sigma a \dot{\omega} B_0}{3} \begin{cases} -R \vec{e}_R = -r \sin \vartheta (\sin \vartheta \vec{e}_r + \cos \vartheta \vec{e}_\vartheta) & r < a \\ \frac{a^6}{r^5} \left( \frac{1}{2} \sin \vartheta \vec{e}_r - \cos \vartheta \vec{e}_\vartheta \right) \sin \vartheta & r > a \end{cases}. \quad (21)$$

Význam  $\vec{S}_0$  si ukážeme později, vzhledem ke axiální symetrii úlohy je  $\nabla \cdot \vec{S}_0 = 0$  a tedy  $\vec{S}_1$  se nijak neprojeví v ZZE. Pole  $\vec{S}_1$  míří uvnitř sféry přímo k ose  $z$  (nikoli k počátku), vně sféry míří také k ose, ale oklikou, viz obrázek. V našem případě pole  $\vec{S}_1$  podél produčar slábne, jak se  $\nabla \cdot \vec{S}_1$  spotřebává na změnu magnetického pole.

Nespojitosti magnetického pole nás nutí v místě sféry počítat v ZZE s plošnými divergencemi

$$-\vec{j}_s \cdot \vec{E} = \vec{n} \cdot [\vec{S}]. \quad (22)$$

Lze snadno ověřit, že výraz levé straně, tj součin (2) a (18) souhlasí se skokem

$$[S_r] = \frac{\sigma a^2 \dot{\omega} B_0}{2} \sin^2 \vartheta. \quad (23)$$

Tato rovnost znamená, že výkon, kterým táhneme za kousíček sféry je stejný, jako výkon, který tento kousíček sféry dští v podobě Poyntingova vektoru do svého okolí.

## Zachování energie – integrální pohled

Opět poznamenejme, že v kvazistacionárním přiblížení je práce potřebná pouze na vytvoření magnetického pole. Nejprve spočteme výkon potřebný k otáčení klikou. Plošná hustota síly působící na náboj na sféře je

$$\vec{f}_s = \sigma(\{\vec{E}_0\} + \vec{E}_1). \quad (24)$$

Hustota momentu síly je

$$d\vec{M} = \sigma\vec{r} \times (\{\vec{E}_0\} + \vec{E}_1)dS. \quad (25)$$

Symbol  $\{\vec{E}_0\}$  představuje průměr hodnot na obou stranách sféry, ale protože  $\vec{E}_0$  vzhledem ke svému směru otáčení nebrání ( $\vec{e}_r \times \vec{e}_r = 0$ ), potřebujeme k výpočtu momentu síly pouze hodnotu indukovaného elektrického pole  $\vec{E}_1$ . Celkový moment síly je tedy

$$\vec{M} = \int \sigma\vec{r} \times \vec{E}_1 dS = -\sigma a \frac{1}{3} \mu_0 \sigma \omega a \int \sin \vartheta \vec{e}_r \times \vec{e}_\varphi dS. \quad (26)$$

Použijeme stejný postup jako při výpočtu (4) a najedeme

$$\vec{M} = -\frac{8\pi}{9} \mu_0 \sigma^2 a^4 \dot{\vec{\omega}}, \quad (27)$$

vytvářené magnetické pole vzdoruje roztáčení  $\dot{\vec{\omega}}$  stejně jako setrvačnick, u kterého by platilo  $\vec{M} = -J\dot{\vec{\omega}}$ .

Energii magnetického pole spočteme objemovou integrací  $|\vec{B}|^2/(2\mu_0)$ , kde podle (13) je

$$|\vec{B}|^2 = B_0^2 \begin{cases} 1 & r < a \\ \frac{a^6}{r^6} (\cos^2 \vartheta + \frac{1}{4} \sin^2 \vartheta) & r > a \end{cases}, \quad (28)$$

což po vyintegrování dá energii magnetického pole v celém objemu

$$W_M = \frac{\pi a^3}{\mu_0} B_0^2, \quad (29)$$

pro zajímavost: uvnitř je dvakrát více energie než venku, proto jsou také v podobném poměru (opačně mířící) radiální složky pole (21) nad a pod povrchem sféry.

Nyní je otázkou delšího násobení ověřit, že mechanický výkon se spotřebuje na změnu magnetického pole

$$\dot{W}_M = -\omega \cdot \vec{M}. \quad (30)$$

Z hlediska pracovníka u kliky se kvazistacionární rovnice redukuje na prostou variantu setrvačnosti – energie se chová podle  $W_M = J\omega^2/2$ , kde

$$J = \frac{\mu_0}{18\pi} Q^2 a^3. \quad (31)$$

Je taková představa konzistentní? Kam se poděl moment hybnosti  $\vec{L} = \int \vec{M} dt$ ?

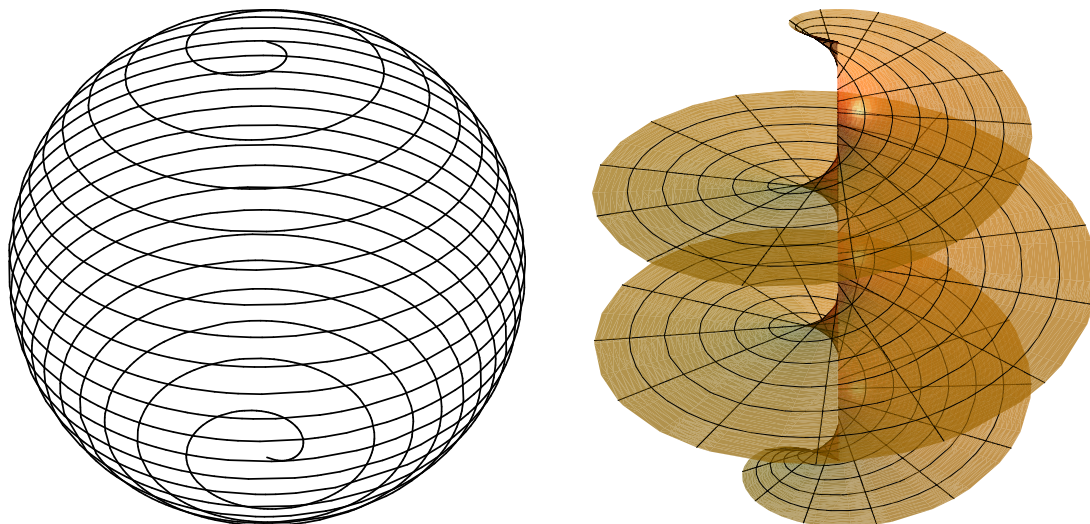
V Maxwellově teorii je elektromagnetickému poli přisouzena i hybnost s hustotou  $\vec{g} = \vec{S}/c^2$ . Je to právě doposud „zbytečná“ složka  $\vec{S}_0$ , která dá (s použitím předcházejících zkušeností a vztahu  $\mu_0 \epsilon_0 c^2 = 1$ ) lehce spočitatelný integrál

$$\vec{L} = \int \vec{r} \times \vec{g} dV = J \vec{\omega}. \quad (32)$$

Je zajímavé, že tento moment hybnosti je uložen pouze vně sféry,  $\vec{E}_0$  a tedy i  $\vec{S}_0$  uvnitř sféry kvůli symetrii vymizí.

## Zachování energie – elektrický obvod

Magnetické pole obvykle nevytváříme klikou. V našem případě lze otáčející plošný náboj nahradit vodičem navinutým na povrch sféry. Abychom vinutím aproximovali plošnou proudovou hustotu (2), musíme závity na povrch sféry navinout tak, aby počet závitů na jednotku délky poledníku byl úměrný  $\sin \vartheta$ .



Obrázek 2: Vlevo: Ukázka, jak navinout vinutí u kterého počet závitů na jednotku délky poledníku je úměrný  $\sin \vartheta$ . Vpravo: Plocha vystupující ve Faradayově indukčním zákoně. Napětí indukované v cívce je dáno změnou magnetického toku skrze tuto plochu. Pro názornost jsou uvažovány jen 3 závity.

V tomto případě by ve vztazích bylo potřeba nahradit proud  $\int (j_s)_\varphi a d\vartheta = 2\sigma\omega a^2$  po povrchu vodiče součinem  $NI$ , kde  $N$  je počet závitů a  $I$  je proud v navinutém vodiči. Pro energii magnetického pole pak dostaneme alternativu vztahu (29) ve tvaru  $W_M = LI^2/2$ , podobně dynamickou rovnici (27) nahradí vztah pro indukované napětí  $U_i = -L\dot{I}$ , zachování energie pak ilustruje  $\dot{W}_M = -IU_i$ . Pokud byste chtěli místo energie, která představuje objemový integrál, počítat indukčnost cívky  $L$  jako magnetický tok vinutím cívky při jednotkovém proudu, je třeba magnetický tok počítat přes plochu ohraničenou závity navinutého vodiče, jak je vidět na obrázku.

Protože v této situaci není zdrojem magnetického pole nábojová hustota, není moment hybnosti pole přímo svázán se zdrojem magnetického pole – v závislosti na situaci může a nemusí celkový moment hybnosti  $\vec{L}$  vymizet. Na rozdíl od kliky ale nejsou přívody k cívce určeny k přenosu momentu síly.

## Závěr

Kvazistacionární přiblížení již obsahuje velkou paletu dějů. Okamžitá souvislost polí a zdrojů ale umožňuje vystačit s jednoduchou mechanickou analogií. Je zajímavé, že jev elektromagnetické indukce je podobný tomu, jak při roztáčení setrvačnicku potřebujeme překonávat jeho setrvačnost.

Vysoká symetrie úlohy umožňuje řešit i kompletní Maxwellovy rovnice. Bohužel toto řešení již není natolik přehledné, aby snadno popsalo, jak přesně při otáčení klikou vzniká elektromagnetické vlnění.

## 5 ELEKTROMAGNETICKÉ VLNY

---

### Klasická elektrodynamika – Náměty na cvičení IV

#### Retardované řešení vlnové rovnice

Příklad X.1 v Kvasnicově učebnici: Ukažte, že

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(r', t - \frac{|r-r'|}{c})}{|r-r'|} d^3r' = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(r, t)$$

#### TE vlna jako superpozice rovinných vlny

Uvažujte šíření elektromagnetické vlny v prostoru mezi dvěma rovnoběžnými vodivými rovinami  $x = 0$  a  $x = a$ . Uvažujte dvě rovinné vlny s  $\vec{k}_{\pm} = k_z \vec{e}_z \pm k_x \vec{e}_x = k(\cos \alpha \vec{e}_z \pm \sin \alpha \vec{e}_x)$ . Obě vlny budou mít stejnou amplitudu a polarizaci ve směru  $E_{\pm} = E \vec{e}_y$ . Ukažte, že pro vhodné hodnoty  $k_x$  (dále uvažujte nejnižší řešení) splňuje vlna vzniklá superpozicí

$$\vec{E} = \frac{\vec{E}_+ - \vec{E}_-}{2i}, \quad \vec{B} = \frac{\vec{B}_+ - \vec{B}_-}{2i}$$

hraniční podmínky pokud na hranici předpokládáme plošné proudy a náboje. Ukažte, že lze oblast mezi oběma rovinami zúžit na obdélníkový vlnovod libovolné výšky.

Pakliže označíme výšku vlnovodu  $b$ , a používáme *efektivní* intenzity a proudové hustoty, můžeme spočítat výkon procházející vlnovodem

$$P = \frac{ab}{2} \frac{E^2}{c\mu_0} \cos \alpha$$

a také útlum

$$\frac{1}{P} \frac{dP}{dz} = \frac{\rho_2}{c\mu_0} \frac{2a \cos^2 \alpha + 4b \sin^2 \alpha}{ab \cos \alpha}$$

kde se předpokládá plošný Ohmův zákon ve tvaru  $\vec{E} = \rho_2 \vec{j}_2$ , kde  $\rho_2 = \rho/\delta$  (na uvažovaných frekvencích je velmi malá hloubka vniku, takže plošné proudy jsou dobrým přiblížením). Jouleovy ztráty na jednotku délky vlnovodu jsou pak dány integrálem podél obvodu obdélníku  $\oint \rho_2 |\vec{j}_2|^2 dl$ .

Zajímavé je, že bezrozměrný faktor

$$\frac{\rho_2}{c\mu_0} \sim \frac{\delta}{\lambda}$$

takže útlum vlnovodu je zhruba dán poměrem geometrických veličin: obvodu, plochy, vlnové délky a hloubky vniku.