MATEMATICKÁ ANALÝZA 3, ZIMNÍ SEMESTR 2025–2026
ZADÁNÍ PÍSEMNÉ ČÁSTI ZKOUŠKY - VARIANTA B

LUBOŠ PICK

Příklad B1 Nalezněte všechna maximální řešení diferenciální rovnice

$$y' = \frac{\sqrt{1-y^2}\arccos y}{1+x^2}$$

splňující podmínku $y(1) = \cos(\pi e^{-\frac{\pi}{4}})$ a jejich definiční obory. **(10 bodů)**

Příklad B2 Nechť x a y jsou diferencovatelné funkce proměnné $t \in \mathbb{R}$. Nalezněte všechna maximální řešení soustavy diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= x - y \\ y' &= x + y + e^t \sin t. \end{aligned}$$

(10 bodů)

Příklad B3 Dokažte, že vztahy

$$\begin{aligned} \log(x+y) + \cos(u+v) &= 0 \\ x^2 + y + u &= 1 + \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

definují na jistém okolí bodu $[x,y] = [1,0]$ diferencovatelné funkce $u(x,y)$, $v(x,y)$ takové, že $u(1,0) = \frac{\pi}{2}$ a $v(1,0) = 0$. Rozhodněte, zda existuje okolí bodu $[1,0]$, na kterém je zobrazení

$$\Phi\colon [x,y] \mapsto [u(x,y), v(x,y)]$$

difeomorfismus. **(10 bodů)**

Příklad B4 Rozhodněte, zda má funkce

$$f(x,y,z) = \operatorname{arctg}(x^2)(y^2 + yz + z^2)$$

body globálního maxima a globálního minima na množině

$$M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 \colon x \in [-1,1],\ y^2 + z^2 = 4\},$$

a pokud ano, určete je. **(10 bodů)**

Příklad B5 Uvažujte množinu $P = \mathbb{N} \setminus \{1\}$, funkci $\varrho\colon P \times P \to [0,\infty]$ definovanou předpisem

$$\varrho(m,n) = \left| \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \right|$$

a funkci $F\colon P \to P$ definovanou předpisem $F(n) = n^2$.

(a) Dokažte, že (P,ϱ) je metrický prostor.
(b) Rozhodněte, zda je F kontrakce na (P,ϱ).
(c) Rozhodněte, zda F má na (P,ϱ) pevný bod.
(d) Rozhodněte, zda je (P,ϱ) omezený.
(e) Rozhodněte, zda je (P,ϱ) úplný.
(f) Rozhodněte, zda je (P,ϱ) separabilní.
(g) Rozhodněte, zda je (P,ϱ) kompaktní.

Tvrzení dokažte. **(10 bodů)**

2025-2026-ZS-B1

$\boxed{B1}$ Nalezněte všechna maximální řešení rovnice

(B1-1)
$$y' = \frac{\sqrt{1-y^2}\cdot \arccos y}{1+x^2}.$$

splňující počáteční podmínku $y(1) = \cos(\pi e^{-\pi/4})$

a jejich definiční obory.

Řešení. Položme
$$h(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Potom $H(x) = \int h(x)\,dx \overset{c}{=} \operatorname{arctg} x, \quad x \in \mathbb{R}.$

Označme $I = \mathbb{R}$. Dále položme
$$g(y) = \sqrt{1-y^2}\cdot \arccos y, \quad y \in [-1,1].$$

Singulární řešení rovnice (B1-1) jsou tedy tvaru
$$y(x) = -1, \; x \in I \quad \text{a} \quad y(x) = 1, \; x \in I.$$

Označme $J = (-1,1)$. Potom $h: I \to \mathbb{R}$ je spojitá, $g: J \to \mathbb{R}$ je spojitá a nenulová. Hledáme řešení rovnice (B1-1) definovaná někde v I s hodnotami v J.

Tato řešení budou splňovat

(B1-2)
$$\frac{y'}{\sqrt{1-y^2}\cdot \arccos y} = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{pro vhodná } x.$$

Označme
$$G(y) = -\log(\arccos y), \; y \in J,$$

potom $G' = \frac{1}{g}$ na J. Platí $G(J) = (-\log \pi, \infty)$.

Hledáme tedy řešení y_c rovnice (B1-1) splňující

$$(B1\text{-}3) \qquad -\log\left(\arccos y_C(x)\right) = \operatorname{arctg} x + C,$$

kde $C \in \mathbb{R}$. Definiční obory y_C jsou maximální otevřené intervaly I_C v množině

$$\{x \in \mathbb{R} : \operatorname{arctg} x + C \in (-\log \pi, \infty)\}.$$

Z počáteční podmínky vypočítáme C. Do (B1-3) dosadíme $x = 1$, $y_C(x) = \cos(\pi e^{-\pi/4})$. Dostaneme

$$-\log\left(\pi e^{-\pi/4}\right) = \frac{\pi}{4} + C,$$

tedy $-\log \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + C$, takže $C = -\log \pi$.

Jest

$$\{x \in \mathbb{R},\ \operatorname{arctg} x - \log \pi > -\log \pi\}$$
$$= \{x \in \mathbb{R},\ \operatorname{arctg} x > 0\} = (0, \infty).$$

Tedy definičním oborem hledaného řešení je $(0, \infty)$.

Na tomto intervalu platí

$$y(x) = \cos\left(e^{-\operatorname{arctg} x + \log \pi}\right)$$
$$= \cos\left(\pi e^{-\operatorname{arctg} x}\right), \quad x \in (0, \infty).$$

Protože $\lim\limits_{x \to 0+} y(x) = \cos \pi = -1$,

lze v bodě $x = 0$ slepit partikulární řešení se stacionárním.

Závěr: Jediné maximální řešení y splňující počáteční podmínku je tvaru

$$y(x) = \begin{cases} -1, & x \in (-\infty, 0] \\ \cos\left(\pi e^{-\operatorname{arctg} x}\right), & x \in (0, \infty). \end{cases}$$

Jednoznačnost plyne z teorie, maximalita je zřejmá.

HODNOCENÍ

sing. řešení	1
vztah y a x	2
interval I_c	3
výpočet C	2
lepení	1
závěr	1

$\boxed{B2}$ Nechť x, y jsou diferencovatelné funkce proměnné $t \in \mathbb{R}$. Nalezněte všechna maximální řešení soustavy

$$(B2\text{-}1) \quad \begin{cases} x' = x - y \\ y' = x + y + e^t \sin t . \end{cases}$$

Řešení. Sestrojíme λ-zápis soustavy do matice

$$\left(\begin{array}{cc|c} \lambda - 1 & 1 & 0 \\ -1 & \lambda - 1 & e^t \sin t \end{array}\right).$$

Provedeme úpravu (2. řádek) $-(\lambda-1) \times$ (1. řádek), pak

$$\left(\begin{array}{cc|c} \lambda - 1 & 1 & 0 \\ -1 & \lambda - 1 & e^t \sin t \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} \lambda - 1 & 1 & 0 \\ -\lambda^2 + 2\lambda - 2 & 0 & e^t \sin t \end{array}\right).$$

Z 2. řádku máme rovnici

$$(B2\text{-}2) \quad -x'' + 2x' - 2x = e^t \sin t .$$

Charakteristický polynom $P(\lambda) = -\lambda^2 + 2\lambda - 2$ má kořeny

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{-2} = 1 \pm i .$$

Reálný FS homogenní rovnice

$$(B2\text{-}3) \quad -x'' + 2x' - 2x = 0$$

je tedy $\{e^t \cos t, e^t \sin t\}$. Řešení (B2-3) jsou tedy tvaru

$$y_h(t) = \alpha e^t \cos t + \beta e^t \sin t, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \ t \in \mathbb{R}.$$

Protože rovnice (B2-2) má speciální pravou stranu

$$e^t \sin t = e^{1\cdot t}(0.\cos t + 1.\sin t)$$

a $\mu = 1+i$ je kořenem polynomu P, hledáme partikulární řešení nehomogenní rovnice (B2-2) ve tvaru

$$x_p = te^t(c_1\cos t + c_2 \sin t) = e^t\cos t\,(c_2 t) + e^t \sin t\,(c_1 t).$$

Tedy

$$x_p' = e^t(c_1\cos t + c_2 \sin t) + te^t(c_1\cos t + c_2 \sin t)$$

$$+\, te^t(-c_1 \sin t + c_2 \cos t)$$

$$= e^t \cos t\,(c_1 + c_1 t + c_2 t) + e^t \sin t\,(c_2 + c_2 t - c_1 t),$$

$$x_p'' = e^t \cos t\,(c_1 + c_1 t + c_2 t) - e^t \sin t\,(c_1 + c_1 t + c_2 t) +$$

$$+\, e^t \cos t\,(c_1 + c_2) + e^t \sin t\,(c_1 + c_1 t - c_2 t)$$

$$+\, e^t \cos t\,(c_2 + c_2 t - c_1 t) + e^t \sin t\,(c_2 - c_1)$$

$$= e^t \cos t\,(2c_2 + 2c_2 t + 2c_1) + e^t \sin t\,(2c_2 - 2c_1 - 2c_1 t).$$

Tudíž

$$-x_p'' + 2x_p' - 2x_p = e^t \cos t\,(-2c_2 - 2c_2 t - 2c_1 + 2c_1 + 2c_1 t + 2c_2 t - 2c_1 t)$$

$$+\, e^t \sin t\,(-2c_2 + 2c_1 + 2c_1 t + 2c_2 + 2c_2 t - 2c_1 t - 2c_2 t)$$

$$= e^t \cos t\,(-2c_2) + e^t \sin t \cdot 2c_1 = e^t \sin t,$$

takže $c_1 = \frac{1}{2}$, $c_2 = 0$. Tedy obecné řešení rovnice (B2-2) je tvaru

$$x(t) = x_p(t) + x_h(t) =$$

$$= \frac{1}{2} t e^t \cos t + \alpha e^t \cos t + \beta e^t \sin t$$

$$= e^t \cos t \left(\frac{1}{2}t + \alpha\right) + \beta e^t \sin t, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Z prvního řádku dostaneme

$$y = -x' + x =$$

$$= -e^t \cos t \left(\frac{1}{2}t + \alpha\right) - e^t \cos t \cdot \frac{1}{2} + e^t \sin t \left(\frac{1}{2}t + \alpha\right)$$

$$- \beta e^t \sin t - \beta e^t \cos t + e^t \cos t \left(\frac{1}{2}t + \alpha\right) + \beta e^t \sin t$$

$$= e^t \cos t \left(-\frac{1}{2} - \beta\right) + e^t \sin t \left(\frac{1}{2}t + \alpha\right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Obecné řešení soustavy je tedy tvaru

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \cos t \left(\frac{1}{2}t + \alpha\right) + \beta e^t \sin t \\ e^t \cos t \left(-\frac{1}{2} - \beta\right) + e^t \sin t \left(\frac{1}{2}t + \alpha\right) \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

HODNOCENÍ

	λ - matice, úpravy	2
	FS hom. rovnice pro x	2
	obecné řešení x	4
	řešení soustavy	2

$\boxed{B3}$ Dokažte, že vztahy

$$\log(x+y) + \cos(u+v) = 0$$

$$x^2 + y + u = 1 + \frac{\pi}{2}$$

definují na jistém okolí bodu $[x,y] = [1,0]$ dif. fce u,v prom. x,y takové, že $u(1,0) = \frac{\pi}{2}$ a $v(1,0) = 0$. Rozhodněte, zda existuje okolí bodu $[1,0]$, na kterém je zobrazení

$$\underline{\Phi}(x,y) = \big(u(x,y),\, v(x,y)\big)$$

difeomorfismus.

Řešení. Definujme funkce

$$F(x,y,u,v) = \log(x+y) + \cos(u+v),$$

$$G(x,y,u,v) = x^2 + y + u - 1 - \frac{\pi}{2}$$

a množinu $\Omega = \{[x,y,u,v] \in \mathbb{R}^4 : x+y > 0\}$.

Potom platí

- $F, G \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$,
- $[1,0,\frac{\pi}{2},0] \in \Omega$,
- $F(1,0,\frac{\pi}{2},0) = G(1,0,\frac{\pi}{2},0) = 0$

a navíc

- $$\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}(x,y,u,v) = \begin{vmatrix} -\sin(u+v) & -\sin(u+v) \\ 1 & 0 \end{vmatrix},$$

takže

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}(1,0,\tfrac{\pi}{2},0) = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Tedy dle VOIF existují okolí U bodu $[1,0]$ a okolí V bodu $[\frac{\pi}{2},0]$ taková, že

- $U \times V \subset \Omega$
- $\forall\, [x,y] \in U\ \exists!\ [u,v] \in V$ splňující

$$F(x,y,u,v) = G(x,y,u,v) = 0.$$

Označíme-li tyto body $u(x,y)$, $v(x,y)$, pak $u,v \in C^{\infty}(U)$.

Dále platí

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}(x,y,u,v) = \begin{vmatrix} \frac{1}{x+y} & -\sin(u+v) \\ 2x & 0 \end{vmatrix},$$

takže

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}(1,0,\tfrac{\pi}{2},0) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2,$$

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}(x,y,u,v) = \begin{vmatrix} \frac{1}{x+y} & -\sin(u+v) \\ 1 & 0 \end{vmatrix},$$

takže

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}(1,0,\tfrac{\pi}{2},0) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1,$$

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}(x,y,u,v) = \begin{vmatrix} -\sin(u+v) & \frac{1}{x+y} \\ 1 & 2x \end{vmatrix},$$

takže

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}\left(1,0,\frac{\pi}{2},0\right) = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3,$$

a konečně

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}(x,y,u,v) = \begin{vmatrix} -\sin(u+v) & \frac{1}{x+y} \\ 1 & 1 \end{vmatrix},$$

takže

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}\left(1,0,\frac{\pi}{2},0\right) = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2.$$

Tedy

$$\frac{\partial u}{\partial x}(1,0) = -2, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(1,0) = -1, \quad \frac{\partial v}{\partial x}(1,0) = 3, \quad \frac{\partial v}{\partial y}(1,0) = 2.$$

Funkce $\Phi : U \to \mathbb{R}^2$ je třídy $C^\infty(U)$ a platí

$$J_\Phi(1,0) = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Podle VOLD existuje okolí $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^2$ bodu $[1,0]$ takové, že $\Phi|_{\tilde{U}}$ je difeomorfismus.

HODNOCENÍ

	předpoklady VOIF	2
	závěr VOIF	1
	výpočet derivací	4
	J_Φ	2
	difeomorfismus	1

$\boxed{B4}$ Rozhodněte, zda má funkce

$$f(x,y,z) = \operatorname{arctg}(x^2)(y^2 + yz + z^2)$$

globální extrémy na množině

$$M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : x \in [-1,1],\ y^2 + z^2 = 4\},$$

a pokud ano, určete je.

Řešení: Protože

$$M \subset [-1,1] \times [-2,2] \times [-2,2],$$

je M omezená. Položme

$$g(x,y,z) = y^2 + z^2 - 4$$

a

$$M_1 = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 = 4\}.$$

Potom $M_1 = g^{-1}(\{0\})$, $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ je spojitá, $\{0\}$ je uzavřená v $\mathbb{R}$, a tedy M_1 je uzavřená v $\mathbb{R}^3$. Množina

$$M_2 = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3,\ x \in [-1,1]\}$$

je z obdobných důvodů uzavřená v $\mathbb{R}^3$. Tedy $M = M_1 \cap M_2$ je uzavřená. Tedy M je kompakt v $\mathbb{R}^3$. Funkce $f : M \to \mathbb{R}$ je spojitá, a tedy nabývá na M glob. extrémů.

Protože $\operatorname{Int} M = \emptyset$ a

$$y^2+yz+z^2 = \frac{(y+z)^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2} > 0,$$

platí $\forall x \in (-1,1) \setminus \{0\}$

$$f(0,y,z) < f(x,y,z) < f(\pm 1, y, z),$$

takže minima nabývá funkce na

$$M \cap \{x=0\}$$

a maxima na množině

$$M \cap \{x = \pm 1\}.$$

Protože $f(0,y,z) = 0 \quad \forall y,z,\ y^2+z^2=4,$

jsou všechny body $[0,y,z],\ y^2+z^2=4$

body glob. minima f na M.

Položme $\quad h(y,z) = y^2+yz+z^2,$

$$H = \{[y,z] \in \mathbb{R}^2,\ y^2+z^2=4\}$$

a

$$g(y,z) = y^2+z^2-4.$$

Potom

$$Dg(y,z) = (2y, 2z),$$

a tedy $Dg = \theta \iff [y,z] = \theta$. Protože $\theta \notin H$, nepřipadá tento bod v úvahu. Jest

$$Dh(y,z) = (2y+z,\ 2z+y).$$

Dle VOLM kandidáti na extrém splňují

$$(1)\quad 2y+z = 2\lambda y$$

$$(2)\quad y+2z = 2\lambda z$$

$$(3)\quad y^2+z^2 = 4.$$

Sečtením (1) a (2) máme

$$3y+3z = 2\lambda(y+z) \Rightarrow \begin{cases} y+z = 0 \\ \lambda = \frac{3}{2}. \end{cases}$$

Je-li $y+z=0$, pak dle (3) máme kandidáty

$$[\sqrt{2}, -\sqrt{2}],\quad [-\sqrt{2}, \sqrt{2}].$$

Je-li $\lambda = \frac{3}{2}$, pak dle (1) je $2y+z = 3y \Leftrightarrow y = z$, takže dle (3) máme kandidáty

$$[-\sqrt{2}, -\sqrt{2}],\quad [\sqrt{2}, \sqrt{2}].$$

Jest

$$h(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = h(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = 4-2 = 2,$$

$$h(\sqrt{2}, \sqrt{2}) = h(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = 4+2 = 6.$$

Tedy h na H nabývá maxima v bodech

$$[\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{2}],$$

hodnota maxima je 6.

Funkce f nabývá na M globálního

maxima v bodech

$[\mp 1, \mp\sqrt{2}, \mp\sqrt{2}]$, $[\mp 1, \pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{2}]$

a toto maximum má hodnotu $\frac{3}{2}\pi$.

HODNOCENÍ existence extrémů 2

glob. minimum 3

glob. maximum 5

$\boxed{B5}$ Uvažujte množinu $P = \mathbb{N} \setminus \{1\}$, funkci

$$\varrho : P \times P \to \mathbb{R}, \quad \varrho(m,n) = \left| \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \right|$$

a funkci $F : P \to P$, $F(n) = n^2$.

(a) Dokažte, že (P, ϱ) je metrický prostor.

(b) Rozhodněte, zda je F kontrakce na P.

(c) Rozhodněte, zda má F na P pevný bod.

(d) Rozhodněte, zda je P omezený.

(e) Rozhodněte, zda je P úplný.

(f) Rozhodněte, zda je P separabilní.

(g) Rozhodněte, zda je P kompaktní.

Řešení. (a) zřejmě $\varrho(m,n) \geq 0 \quad \forall m, n \in P$.

Jestliže $m = n$, pak $\varrho(m,n) = 0$.

Jestliže $m \neq n$, pak $\frac{1}{m} \neq \frac{1}{n}$, a tedy $\varrho(m,n) > 0$.

Zřejmě $\forall m, n \in P : \varrho(m,n) = \varrho(n,m)$.

Pro $m, n, k \in P$ platí

$$\varrho(m,n) = \left| \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \right| = \left| \frac{1}{m} - \frac{1}{k} + \frac{1}{k} - \frac{1}{n} \right|$$

$$\leq \left| \frac{1}{m} - \frac{1}{k} \right| + \left| \frac{1}{k} - \frac{1}{n} \right| = \varrho(m,k) + \varrho(k,n).$$

Tedy (P, ϱ) je metrický prostor.

(b) Zvolme $m, n \in \mathbb{N}$, $m \neq n$. Potom

$$\varrho(F(m), F(n)) = \varrho(m^2, n^2) = \left| \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right|$$

$$= \left|\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right| \cdot \left|\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right|$$

$$\leq \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right) \cdot \varrho(m,n) = \frac{5}{6} \cdot \varrho(m,n).$$

Tedy F je kontrakce na P.

(c) Pro každé $n \in P$ platí $F(n) = n^2 > n$, takže F nemá pevný bod na P.

(d) Zvolme $m, n \in \mathbb{N}$, potom

$$\varrho(m,n) = \left|\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right| \leq 1,$$

takže P je omezený!

(e) Z (b), (c) a Banachovy věty plyne, že P není úplný. JINÝ DŮKAZ: Uvažme posloupnost $\{x_n\}_{n=2}^{\infty}$ definovanou předpisem $x_n = n$, $n \geq 2$.
Tato posloupnost je cauchyovská, neboť pro dané $\varepsilon > 0$ nalezneme $n_0 \in P$ splňující

$\frac{1}{n_0} < \varepsilon$, a pak $\forall m, n \in P$, $m, n \geq n_0$, platí

$$\varrho(x_m, x_n) = \left|\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right| \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon.$$

Zvolme $k \in P$. Potom pro každé $n \geq 2k$ platí

$$\varrho(k, x_n) = \left|\frac{1}{k}-\frac{1}{n}\right| \geq \frac{1}{k}-\frac{1}{2k} = \frac{1}{2k},$$

a tedy k není limitou $\{x_n\}$. Tedy $\{x_n\}$ není konvergentní, takže P není úplný.

(f) P je spočetný, a tedy separabilní.

(g) Z (e) plyne, že P není kompaktní.

JINÝ DŮKAZ Uvažme posloupnost $\{x_n\}_{n=2}^{\infty}$, $x_n = n$, a z ní vybranou $\{x_{n_k}\}$, kde $\{n_k\}$ je rostoucí. Zvolme $m \in P$. Nalezneme $k_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\forall k \geq k_0 : x_{n_k} \geq 2m$. Potom

$$\varrho(m, x_{n_k}) = \frac{1}{m} - \frac{1}{n_k} \geq \frac{1}{m} - \frac{1}{2m} = \frac{1}{2m}.$$

Tedy m není limitou $\{x_{n_k}\}$. Posloupnost $\{x_n\}$ tedy nemá konvergentní podposloupnost. Tedy P není kompaktní.

HODNOCENÍ

(a)	1
(b)	2
(c)	1
(d)	1
(e)	2
(f)	1
(g)	2