

I. MECHANIKA

9. Mechanika tekutin



Obsah

- Tekutina – kapalina a plyn
- Hydrostatika, rovnováha tekutin
- Pascalův zákon. Hydraulika
- Hydrostatický tlak. Hydrostatické paradoxon
- Archimédův zákon
- Hydrodynamika. Proudění ideální tekutiny
- Rovnice kontinuity
- Eulerova hydrodynamická rovnice
- Bernoulliova rovnice. Hydrodynamické paradoxon
- Proudění viskózní kapaliny. Navierova-Stokesova rovnice
- Newtonovská tekutina. Druhá viskozita
- Parabolický zákon rozdělení rychlostí. Hagenův-Poiseuillův zákon
- Laminární a turbulentní proudění
- Reynoldsovo číslo. Strouhalovo číslo

Tekutina – kapalina a plyn

tekutina

- struktura odlišná od pevných látek (chybí uspořádání na dlouhou vzdálenost)
- molekuly nejsou vázány na pevné rovnovážné polohy, nýbrž se mohou volně posouvat – nejsou tvarově stálé

dokonalá (ideální) tekutina (dokonalá kapalina i dokonalý plyn)

- homogenní – všude stejné vlastnosti
- napětí $\sigma_{ij} = -\delta_{ij} p$
- nenulová jen normálová napětí – tlak
- nulová smyková napětí – neexistuje vnitřní tření
- $\sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$ při nenulové deformaci \Rightarrow nulový modul pružnosti ve smyku

Tekutina – kapalina a plyn

dokonalá (ideální) kapalina

- hustota konstantní $\rho = \text{konst.}$
- \Rightarrow dokonalá kapalina má stálý objem – vytváří volnou hladinu
- \Rightarrow dokonalá kapalina nestlačitelná
- \Rightarrow první invariant tenzoru deformace $e_1 = 0$
- \Rightarrow modul objemové pružnosti K nekonečný (protože platí $p = Ke_1$)
- idealizace – skutečná stlačitelnost kapalin větší než u pevných látek, zde ale výrazný kontrast mezi stlačitelností a malým odporem vůči tvarovým změnám

dokonalý plyn

- rozpínavý – vyplní celý uzavřený prostor – nevytváří volnou hladinu
- libovolně stlačitelný

barotropní plyn

- hustota je jen funkcí tlaku (reálný plyn - přibližně splněno jen pro malé změny)

Mechanika tekutin

základním úkolem mechaniky tekutin je určit

- tlak
- hustotu
- rychlost proudění

jako funkci polohy případně času

Hydrostatika. Rovnováha tekutin

dosazením do rovnice rovnováhy za tlak

$$\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + G_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial(-\delta_{ji}p)}{\partial x_j} + G_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial p}{\partial x_i} = G_i \quad \text{též} \quad \text{grad } p = \vec{G}$$

- rovnice hydrostatické rovnováhy (RHR)
- \Rightarrow interpretace: tlak roste ve směru objemové síly
 - tlak má charakter potenciálu objemové síly
 - rozložení tlaku odpovídající RHR se může ustavit, jen pokud objemová síla je konzervativní (tj. lze ji vyjádřit jako gradient nějakého potenciálu)
- hustota objemové síly v tekutině úměrná hustotě tekutiny
- v homogenním tíhovém poli platí $\vec{G} = \rho \vec{g}$
- v (dokonalé) kapalině pravá strana rovnice rovnováhy $\text{grad } p = \rho \vec{g}$ parametrem řešení, lze ji stanovit předem
- v plynu $\rho = \rho(p) \Rightarrow$ užije se intenzita objemové síly $\vec{I} = \frac{\vec{G}}{\rho} \Rightarrow \frac{1}{\rho} \text{grad } p = \vec{I}$
- nezávislá formulace rovnice hydrostatické rovnováhy (RHR)

Pascalův zákon

- dokonalá kapalina ($\rho = \text{konst.}$) \Rightarrow **grad $p = \text{konst.}$** \Rightarrow derivace $\frac{\partial p}{\partial x_i}$ nezávisí na tlaku
- řešením RHR získáme rozložení tlaku až na aditivní konstantu (je-li fce $p_1 = p_1(x_i)$ řešením RHR, pak $p_2(x_i) = p_1(x_i) + k$ je také řešením)
- aditivní konstanty se určují z okrajových podmínek (pro určení jediné konstanty k stačí znalost tlaku v jediném libovolném bodě kapaliny)
- změna tlaku $p \rightarrow p + \Delta p$ v jednom bodě vede na změnu konstanty $k \rightarrow k + \Delta p$ a tím také na změnu tlaku $p \rightarrow p + \Delta p$ v každém bodě kapaliny

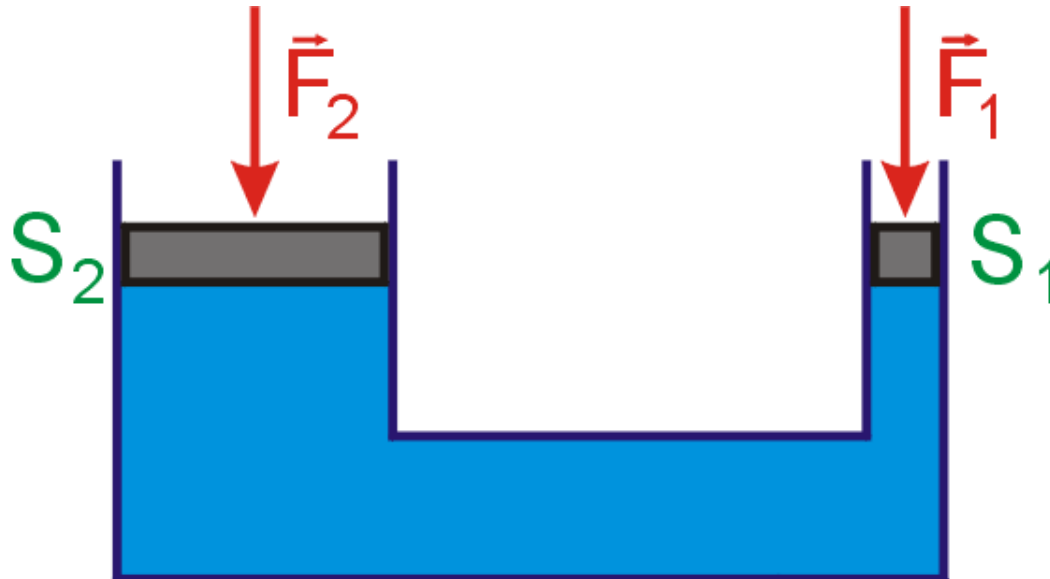
Pascalův zákon o všestranném šíření tlaku: Změna tlaku v jednom místě kapaliny způsobí stejnou změnu tlaku v celém objemu kapaliny.

- Elementární formulace Pascalova zákona: $\vec{G} = 0 \Rightarrow \text{grad } p = 0 \Rightarrow p(\vec{r}) = \text{konst.}$

Pokud na tekutinu nepůsobí objemové síly, tlak v tekutině je všude stejný.

Pascalův zákon. Hydraulika

- hydraulická zařízení – brzdy, lisy, zvedáky i točivá zařízení
- velké tlaky – možno zanedbat objemové síly
- přenos síly, převod síly
- $\frac{F_2}{F_1} = \frac{S_2}{S_1}$ (vykonané práce stejné $F_1 \Delta s_1 = F_2 \Delta s_2$)



Hydrostatický tlak

- řešení RHR pro dokonalou kapalinu ($\rho = \text{konst.}$) v homogenním tíhovém poli
- první osa souřadnicového systému orientována dolů, počátek na volné hladině kapaliny, budeme značit $h \equiv x_1$
- na volnou hladinu působí barometrický tlak b

- $\text{grad } p = \rho \vec{g}$ a $\vec{g} = (g, 0, 0) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial p}{\partial h} = \rho g \Rightarrow p = \rho g h + C \\ \frac{\partial p}{\partial x_2} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial x_3} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow p = p(h)$

- okrajová podmínka $p(h=0) = b = \rho g \cdot 0 + C \Rightarrow C = b \Rightarrow p = \rho g h + b$
- rovnice pro **hydrostatický tlak** v kapalině
- často nás zajímá rozdíl tlaků na úrovni hladiny a ve hloubce h : $\Delta p = p - b = \rho g h$

Barometrická rovnice

- řešení RHR pro ideální plyn ($pV = nRT$) v homogenním tíhovém poli
- závislost hustoty ideálního plynu na tlaku p , teplotě T a molární hmotnosti M_m

$$n = \frac{m}{M_m} = \frac{\rho V}{M_m} \rightarrow pV = \frac{\rho V}{M_m} RT \rightarrow \rho = \frac{pM_m}{RT}$$

- první osa souřadnicového systému orientována nahoru, budeme značit $h \equiv x_1$

$$\bullet \text{ grad } p = \rho \vec{g} \text{ a } \vec{g} = (-g, 0, 0) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial p}{\partial h} = -\rho g = -\frac{pM_m g}{RT} \\ \frac{\partial p}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial x_3} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow p = p(h) \left\{ \frac{dp}{p} = -\frac{M_m g}{RT} dh \right.$$

$$\rightarrow \text{integrace } \int \frac{dp}{p} = -\frac{M_m g}{RT} \int dh \rightarrow \ln p = -\frac{M_m g}{RT} h + C \rightarrow p = \exp\left(-\frac{M_m g}{RT} h + C\right)$$

- okrajová podmínka $p(h=0) = p_0 = e^C \Rightarrow p = p_0 \exp\left(-\frac{M_m g}{RT} h\right)$

- rovnice pro barometrický tlak v izotermické atmosféře ($T = \text{konst.}$)

Kapalina v rotující nádobě

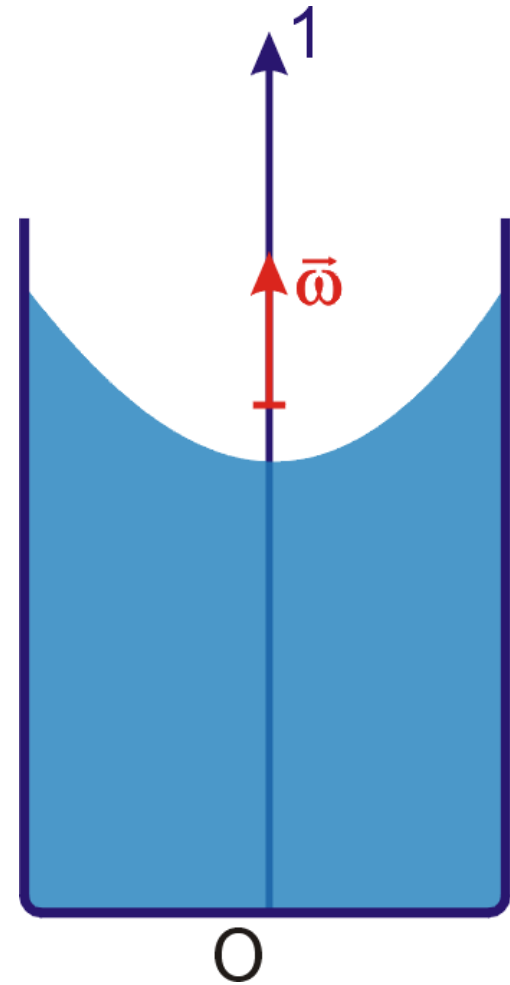
objemová síla

- tíhová síla
- odstředivá síla

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x_1} &= \rho g \\ \frac{\partial p}{\partial x_2} &= \rho \omega^2 x_2 \\ \frac{\partial p}{\partial x_3} &= \rho \omega^2 x_3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow p = \rho g x_1 + \frac{1}{2} \rho \omega^2 (x_2^2 + x_3^2) + k$$

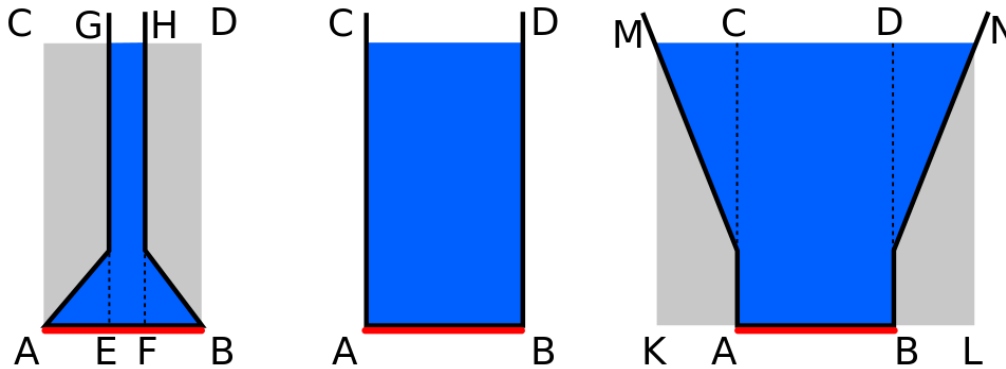
plocha konstantního tlaku $p = K$

$$x_1 = \frac{-\omega^2}{g} (x_2^2 + x_3^2) + \frac{K - k}{\rho g}$$



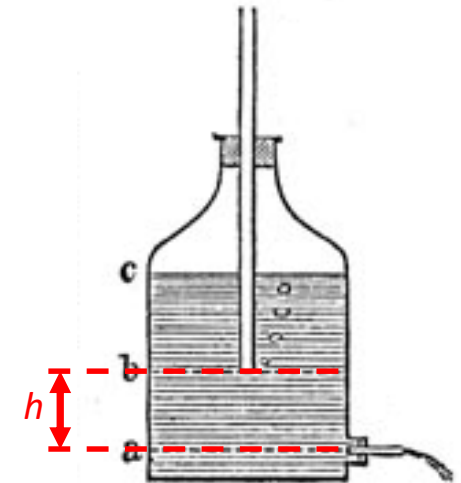
Hydrostatické paradoxon. Mariottova láhev

- tlak nezávisí na množství kapaliny nad plochou, kde se měří hydrostatický tlak



- Mariottova láhev**

- Edme Mariotte (Francouz, 1620-1684)
- tlak na výstupu nezávisí na množství kapaliny v nádobě
- hydrostatický tlak určen výškovou odlehlostí h výstupní trubice a konce zavzdušňovací trubice



Archimédův zákon

- myšlenkově vymezíme libovolný objem v kontinuu
- v rovnováze se výslednice objemových a plošných rovná nule
- objemové síly působící na vymezený objem
- objemovou sílu tvoří jen tíhová síla (první osa orientována směrem dolů)
- okolí působí na vymezený objem na jeho hranici plošnou silou
- z rovnováhy plyne, že okolí působí na hranici myšleného objemu směrem vzhůru plošnou silou

$$F_i^V + F_i^P = 0$$

$$F_i^V = \int_V G_i dV$$

$$\begin{cases} F_1^V = g \int_V \rho dV \\ F_2^V = F_3^V = 0 \end{cases}$$

$$F_i^P = \int_S T_i dS$$

$$\begin{cases} F_1^P = -g \int_V \rho dV \\ F_2^P = F_3^P = 0 \end{cases}$$

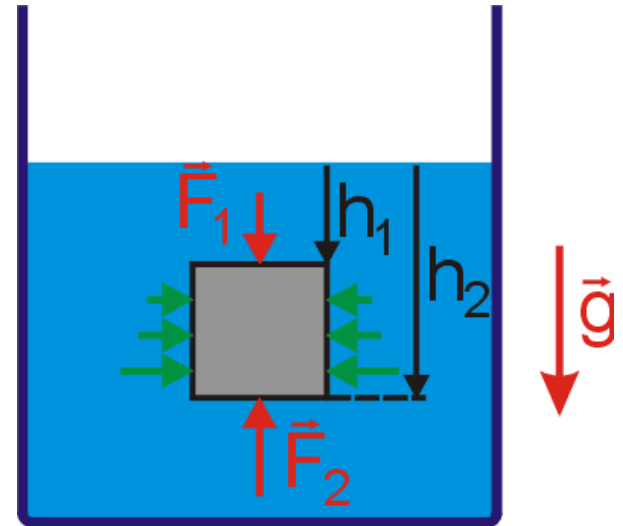
- když bude objem V vyplněn pevným tělesem, budou na hranici působit stejné plošné síly, jako kdyby byl vyplněn kontinuem – bude tedy na něj směrem vzhůru působit síla velikosti $g \int_V \rho dV$, což představuje tíhu stejného objemu kontinua, jako je objem ponořeného tělesa

- Archimédův zákon: Těleso ponořené do tekutiny je nadlehčováno silou, která je rovna tíze tekutiny tělesem vytlačené.

Archimédův zákon

Elementární důkaz:

- založen na speciální volbě tvaru tělesa
 - válec výšky $h = h_2 - h_1$ s podstavami plochy S
 - síly působící na boční stěny jsou díky symetrii vzájemně kompenzovány
 - mezi horní a dolní podstavou rozdíl hydrostatického tlaku ρgh
 - rozdíl tlakových sil $F_2 - F_1 = \rho ghS$ působí směrem vzhůru a je roven tíze kapaliny vytlačené válcem.
-
- Archimédův zákon platí pro všechny tekutiny včetně plynů.
 - podle poměru hustot kapaliny a ponořeného tělesa
 - těleso plave (část tělesa se zvedá nad hladinu, tím se vztlaková síla zmenšuje, dokud se nevytvoří rovnováha mezi vztlakovou a tíhovou silou)
 - těleso se vznáší
 - těleso klesá ke dnu



Proudění tekutin. Vliv smykového napětí

tekutina v rovnováze

- bez pohybu neexistují smyková napětí (platí i pro viskózní tekutiny), všechna napětí normálová
- libovolná změna tvaru tekutiny → pohyb (proudění) tekutiny
- v případě viskózní tekutiny existují smyková napětí , ale nikdy nejsou takového charakteru, aby se trvale udržela – jen brzdí pohyb tekutiny

proudění tekutiny

- smyková napětí – pouze při pohybu viskózní tekutiny
- při vyšších rychlostech způsobují smyková napětí vznik chaotického proudění a promíchávání tekutiny, vytváření vírů

Klasifikace proudění tekutin

laminární proudění

- rychlost se od místa k místu mění „hladce“, nedochází k mísení tekutiny
- lze zapsat $\vec{v} = f(x_i, t)$, tj. rychlost tekutiny lze popsat vektorovým polem
- rychlosti lze dobře zobrazit pomocí proudnic

stacionární proudění (ustálené proudění)

- v každém bodě prostoru platí, že rychlost tekutiny se nemění s časem, tj. $\left. \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right|_{x_i} = 0$
- vektorové pole rychlosti nezávisí na čase, tj. $\vec{v} = f(x_i)$
- proudnice splývají s trajektoriemi částic

turbulentní proudění

- existuje nad určitou kritickou rychlostí reálné kapaliny
- smyková napětí → chaotické proudění a promíchávání tekutiny, vytváří se víry
- rychlosti částic se nepravidelně mění v prostoru i v čase
- proudnice se buď nepravidelně mění anebo je nelze zobrazit
- vždy **nestacionární**

Vířivé a potenciálové proudění

vírové proudění (vířivé proudění)

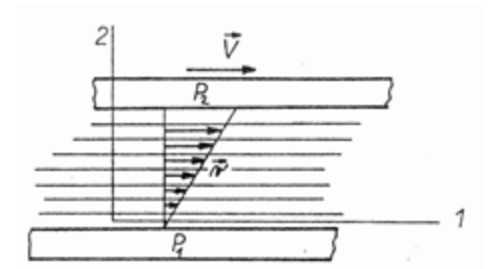
- pohyb částic tekutiny po obecné kruhové dráze ($\text{rot } \vec{v} \neq 0$)
- rychlost se lokálně mění

nevírové proudění (potenciálové proudění)

- $\text{rot } \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = \text{grad } \varphi$ ($\text{rot grad } \varphi = 0$)
- znalost rychlostního potenciálu $\varphi(x_i, t)$ stačí pro stanovení $\vec{v}(x_i, t)$ a určení proudnic

Povšimněme si, že podmínka $\text{rot } \vec{v} = 0$ je hodně přísná:

- např. v Couettově proudění je nenulová derivace $\frac{\partial v_1}{\partial x_2}$
- \Rightarrow Couettovo proudění je vírové (rychlostní potenciál neexistuje)



Hydrodynamika. Laminární proudění

proudnice (proudočáry)

- zobrazení vektorového pole rychlostí
- tečny k proudnicím mají směr rychlosti částic – proudnice se neprotínají
- každým bodem kontinua prochází v daném čase právě jedna proudnice

zobrazení proudnic v daném čase

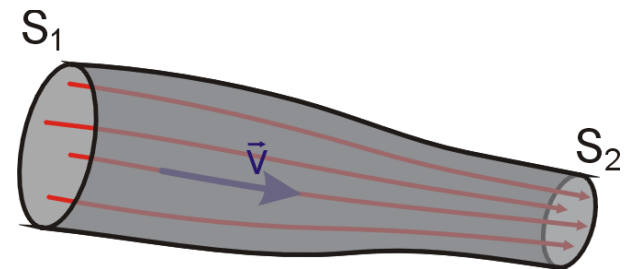
- rychlost různých částic v určitém okamžiku
 - stacionární proudění – proudnice se nemění v čase
 - nestacionární proudění – proudnice se mění s časem
- hustota proudnic – úměrná rychlosti proudění

proudová trubice – plášť tvořen proudnicemi (plochou neprotéká žádný tok)

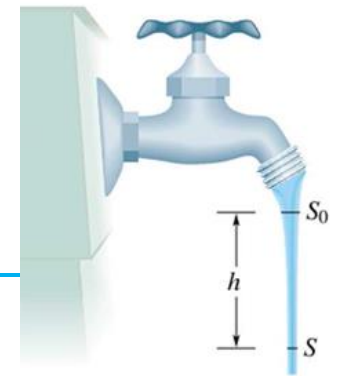
proudové vlákno – hmotný vnitřek proudové trubice

trajektorie

- dráha 1 určité částice
- pouze při ustáleném proudění splývají trajektorie s proudnicemi



Rovnice kontinuity



Elementární odvození

- stacionární proudění
- trubice – reálná, myšlená proudová trubice
- průřezem S_1 kolmým ke směru rychlosti v_1 za čas Δt vteče $\Delta m_1 = S_1 v_1 \rho_1 \Delta t$
- průřezem S_2 kolmým ke směru rychlosti v_2 za čas Δt vyteče $\Delta m_2 = S_2 v_2 \rho_2 \Delta t$
- hodnoty rychlosti v_1 a v_2 a hustoty ρ_1 a ρ_2 jsou průměrné veličiny v místech průřezů S_1 a S_2 ; v ustáleném proudění jde o konstantní hodnoty
- hustota v určitém místě trubice se také s časem nemění
- pak celková hmotnost tekutiny v trubici zůstává konstantní \Rightarrow

$$\Delta m_1 = \Delta m_2 \Rightarrow$$

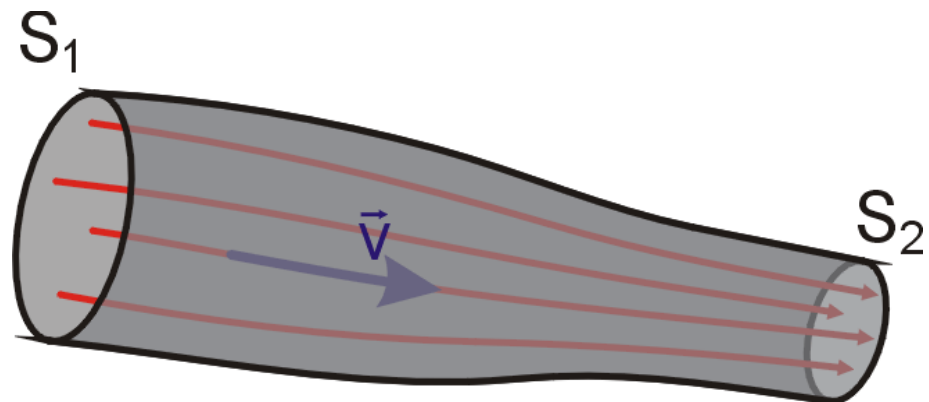
- rovnice kontinuity pro stacionární proudění tekutiny v trubici

$$S_1 v_1 \rho_1 = S_2 v_2 \rho_2$$

- pro kapalinu navíc

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho = \text{konst.} \Rightarrow$$

- rovnice kontinuity pro stacionární proudění kapaliny v trubici $S_1 v_1 = S_2 v_2$ vzhledem k nestlačitelnosti platí i pro nestacionární proudění

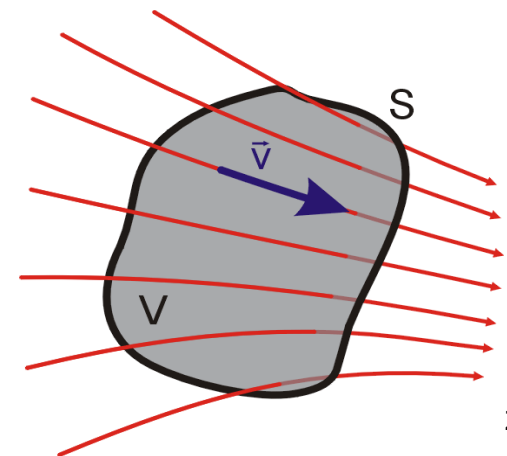


Obecný tvar rovnice kontinuity

- zavedeme veličinu hmotnostní tok $q_m = \frac{dm_s}{dt}$ jako hmotnost tekutiny, která za jednotku času vyteče z objemu vymezeného uzavřenou plochou S
- analogie s tokem vektorového pole zavedeným v souvislosti s gravitačním polem
- za dobu dt proteče ploškou velikosti dS , jejíž směr normály označíme \vec{n} , objem tekutiny $dV_m = \vec{v} \cdot \vec{n} dS dt$
- elementární hmotnostní tok dq_m ploškou dS
- hmotnostní tok celou plochou S ohraničující objem V
- v případě uzavřené plochy vektor \vec{n} označuje její vnější normálu, v souladu s tím kladná hodnota toku q_m znamená, že hmotnost uvnitř plochy se zmenšuje

$$dq_m = \rho \underbrace{\vec{v} \cdot \vec{n} dS}_{\frac{dV_m}{dt}}$$

$$q_m = \oiint_S \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS$$



Obecný tvar rovnice kontinuity

- časová změna hmotnosti uzavřeného objemu V
- tekutina buď odteče nebo zůstane, hmotnost se zachová
- dosazením integrální tvar rovnice kontinuity
- připomeňme Gaussovu větu
- dosazením do levé strany
- hranice objemu nezávisí na čase
- převédeme na jednu stranu rovnice
- objem V zvolen libovolně \Rightarrow v každém bodě musí platit
- obecná formulace rovnice kontinuity proudění (stlačitelné) tekutiny
- RK musí být splněna v každém bodě prostoru vyplněného kontinuem

$$\frac{dm_V}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho dV$$

$$\frac{\partial m_s}{\partial t} + \frac{\partial m_V}{\partial t} = 0$$

$$\oiint_S \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS = -\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho dV$$

$$\oiint_S \vec{A} \cdot \vec{n} dS = \iiint_V \operatorname{div} \vec{A} dV$$

$$\iiint_V \operatorname{div} \rho \vec{v} dV = -\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho dV$$

$$\iiint_V \operatorname{div} \rho \vec{v} dV = -\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$

$$\iiint_V \left(\operatorname{div} \rho \vec{v} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) dV = 0$$

$$\operatorname{div} \rho \vec{v} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Rovnice kontinuity pro kapalinu

- obecný tvar RK

$$\operatorname{div} \rho \vec{v} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

RK pro kapalinu

- nestlačitelná tekutina

$$\rho = \text{konst.}$$

- RK pro kapalinu

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0$$

Co vyjadřuje operátor divergence?

- uvažujme jediný elementární objem $dx_1 dx_2 dx_3$ protékaný elementem tekutiny
- tekutina vtéká rychlostí \vec{v} při hustotě ρ a vytéká rychlostí $\vec{v} + d\vec{v}$ při hustotě $\rho + d\rho$
- změna hustoty $d\rho$ a rychlosti $d\vec{v}$ je důsledkem změny polohy elementu tekutiny
- ploškou $dx_1 dx_2$ za čas Δt vteče tekutina hmotnosti $\Delta m_{in12} = dx_1 dx_2 v_3 \rho \Delta t$ a protilehlou ploškou vyteče tekutina hmotnosti $\Delta m_{out12} = dx_1 dx_2 (v_3 + dv_3)(\rho + d\rho) \Delta t$
- zkoumáme časovou změnu hustoty, tj. rozdíl vstupující a vystupující hmotnosti děleno objemem

$$-\Delta\rho = \frac{m_{out} - m_{in}}{dx_1 dx_2 dx_3} = \frac{dx_1 dx_2 [(v_3 + dv_3)(\rho + d\rho) - v_3 \rho]}{dx_1 dx_2 dx_3} \Delta t +$$

- vyjádříme změnu hustoty

$$\frac{dx_2 dx_3 [(v_1 + dv_1)(\rho + d\rho) - v_1 \rho]}{dx_1 dx_2 dx_3} \Delta t +$$

$$\frac{dx_1 dx_3 [(v_2 + dv_2)(\rho + d\rho) - v_2 \rho]}{dx_1 dx_2 dx_3} \Delta t$$

- pro znaménko změny hustoty musí platit $m_{out} > m_{in} \Rightarrow \Delta\rho < 0$
- víme $(v + dv)(\rho + d\rho) = v\rho + vd\rho + \rho dv + dvd\rho = v\rho + d(v\rho)$

- proto platí $-\Delta\rho = \frac{v_3 \rho + d(v_3 \rho) - v_3 \rho}{dx_3} \Delta t + \frac{v_1 \rho + d(v_1 \rho) - v_1 \rho}{dx_1} \Delta t + \frac{v_2 \rho + d(v_2 \rho) - v_2 \rho}{dx_2} \Delta t$

Co vyjadřuje operátor divergence?

- upravujeme rovnici $-\Delta\rho = \frac{v_3\rho + d(v_3\rho) - v_3\rho}{dx_3} \Delta t + \frac{v_1\rho + d(v_1\rho) - v_1\rho}{dx_1} \Delta t + \frac{v_2\rho + d(v_2\rho) - v_2\rho}{dx_2} \Delta t$
- připomeňme definici $\operatorname{div} \vec{A} = \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3}$
- proto $-\Delta\rho = \left[\frac{d(v_1\rho)}{dx_1} + \frac{d(v_2\rho)}{dx_2} + \frac{d(v_3\rho)}{dx_3} \right] \Delta t = \operatorname{div}(\vec{v}\rho)\Delta t$
- rovnici $-\Delta\rho = \operatorname{div}(\vec{v}\rho)\Delta t$ přepíšme do tvaru $\frac{\Delta\rho}{\Delta t} = -\operatorname{div}(\vec{v}\rho)$
- protože zlomek na levé straně vyjadřuje časovou změnu hustoty kapaliny $\rho = \rho(x_i, t)$ v pevném bodě prostoru, můžeme ho v limitním přechodu $\Delta t \rightarrow 0$ nahradit parciální derivací $\frac{\Delta\rho}{\Delta t} \rightarrow \frac{\partial\rho}{\partial t}$
- výsledkem je rovnice kontinuity (RK) pro tekutinu $\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\vec{v}\rho) = 0$

Rovnice kontinuity pro element v pohybu

sledujeme element tekutiny v průběhu pohybu

- hustota tekutiny je funkcí souřadnic a času
- funkce $x_i = x_i(t)$ popisují pohyb elementu kontinua \Rightarrow
- časová změna hustoty pohybujícího se elementu

$$\rho = \rho(x_i, t)$$

$$\rho = \rho(x_i(t), t) = \rho(t)$$

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \underbrace{\frac{dx_i}{dt}}_{v_i} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial x_i} v_i + \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

rovnice kontinuity pro pohybující se element

- vyjdeme z obecného tvaru RK
- zapišme divergenci pomocí derivací
- derivujeme jako součin
- přerovnáme členy

$$\operatorname{div} \rho \vec{v} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \rho v_i + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial x_i} v_i + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} + \underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial x_i} v_i + \frac{\partial \rho}{\partial t}}_{\frac{d\rho}{dt}} = 0$$

- RK pro pohybující se element stlačitelné tekutiny

$$\rho \operatorname{div} \vec{v} + \frac{d\rho}{dt} = 0$$

Eulerova hydrodynamická rovnice

- obecná pohybová rovnice kontinua
- napětí v ideální tekutině vyjádříme pomocí tlaku
- zrychlení elementu jako totální derivaci rychlosti
- hustota objemové síly pomocí intenzity
- pohybová rovnice elementu tekutiny
- upraveno
- rychlost elementu tekutiny je funkcí souřadnic a času
- funkce $x_i = x_i(t)$ popisují pohyb elementu kontinua \Rightarrow
- časová změna rychlosti pohybujícího se elementu
- dosazením Eulerova hydrodynamická rovnice

$$\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + G_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}$$

$$\sigma_{ji} = -\delta_{ji} p$$

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \rightarrow \frac{dv_i}{dt}$$

$$G_i = \rho I_i$$

$$-\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho I_i = \rho \frac{dv_i}{dt}$$

$$\frac{dv_i}{dt} = I_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i}$$

$$v_i = v_i(x_i, t)$$

$$v_i = v_i(x_i(t), t) = v_i(t)$$

$$\frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j + \frac{\partial v_i}{\partial t}$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = I_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i}$$

Eulerova hydrodynamická rovnice

- Eulerova hydrodynamická rovnice

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = I_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i}$$

- EHR představuje pohybovou rovnici pro element ideální tekutiny ve tvaru $a = \frac{F}{m}$
 - na levé straně je celkové zrychlení, tj. změna rychlosti zahrnující časovou změnu rychlosti a změnu rychlosti odvozenou od pohybu elementu
 - na pravé straně je intenzita síly působící na element

výpočet pohybu elementu tekutiny

- EHR + RK + $\rho = \rho(p)$ - 5 rovnic pro 5 funkcí v_i , p a ρ
- principiálně možné, obecně velmi obtížné
- v případě kapaliny se zjednoduší na 4 rovnice pro 4 funkce

Odvození Bernoulliovy rovnice

Zjednodušující předpoklad:

- stacionární proudění \Rightarrow proudnice se s časem nemění \Rightarrow $\frac{\partial v_i}{\partial t} = 0$
 \Rightarrow proudnice splývají s trajektoriemi elementů tekutiny

- EHR (3 složky) přejde do tvaru
$$v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = I_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i}$$

Připomeňme:

- EHR je vektorová rovnice pro intenzitu síly
- pokud vektory na obou stranách vynásobíme skalárně elementárním posunutím dx_i elementu ve směru proudnice, získáme rovnici, jejíž levá strana vyjadřuje elementární změnu kinetické energie a pravá strana změnu energie potenciální

(přepočteno na jednotkovou hmotnost elementu)

$$v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx_i = I_i dx_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} dx_i$$

Bernoulliova rovnice pro tekutinu

- vzniklé součiny (skaláry) na obou stranách rovnice budeme integrovat podél proudnice

$$\int v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx_i = \int I_i dx_i - \int \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} dx_i$$

- upravíme integrand na levé straně

$$v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx_i = \frac{dx_j}{dt} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx_i = dx_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{dx_i}{dt} = v_i \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx_j = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{v^2}{2} \right) dx_j = d \left(\frac{v^2}{2} \right)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial (v_i v_i)}{\partial x_j}$$

- pole objemových sil předpokládáme konzervativní \Rightarrow

$$\vec{I} = -\text{grad } \varphi$$

- vyjádříme složky gradientu potenciálu φ

$$I_i = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$$

- z rovnosti integrálů podél proudnice

$$\int d \left(\frac{v^2}{2} \right) = - \underbrace{\int \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx_i}_{d\varphi} - \underbrace{\int \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} dx_i}_{dp}$$

- získáme Bernoulliovu rovnici pro tekutinu (stlačitelnou)

$$\frac{v^2}{2} + \varphi + \int \frac{dp}{\rho} = \text{konst.}$$

Bernoulliova rovnice pro kapalinu

- Daniel Bernoulli (Švýcar, 1700-1782) - fyzik a matematik

- BR pro kapalinu ($\rho = \text{konst.}$)
$$\frac{v^2}{2} + \varphi + \frac{p}{\rho} = \text{konst.}$$

- jiný tvar BR
$$\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho\varphi + p = \text{konst.}$$

- součet kinetické energie elementu, jeho potenciální energie a tlaku se zachovává podél proudnice (odlišné proudnice mají obecně různé konstanty) → ZZE

- potenciál v tíhovém poli
$$\varphi = \frac{E_p}{m} = gh$$

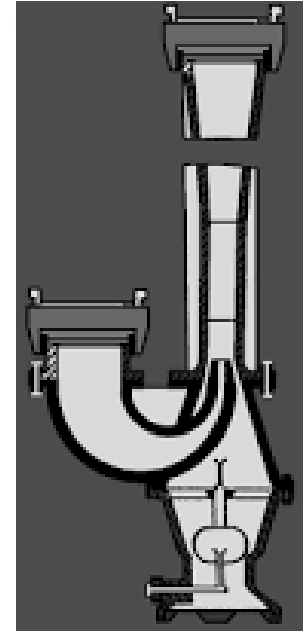
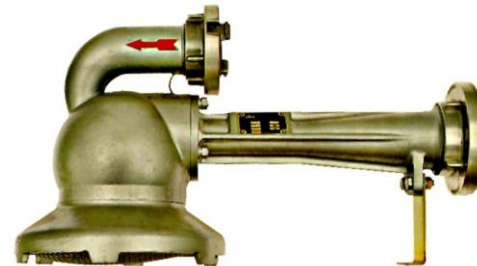
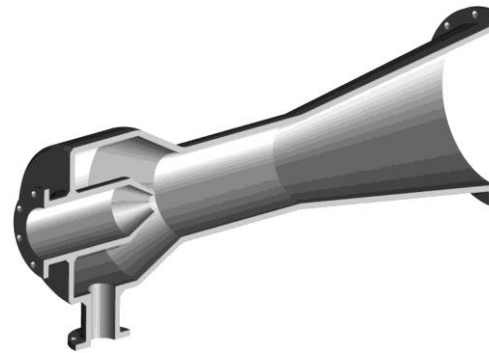
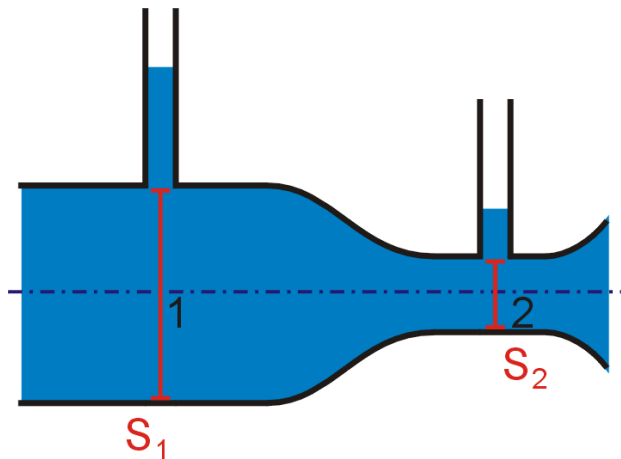
- BR pro kapalinu v tíhovém poli
$$\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gh + p = \text{konst.}$$

- v nevírovém proudění ($\text{rot } \vec{v} = 0$) platí BR se společnou konstantou pro celý prostor, v němž kapalina proudí

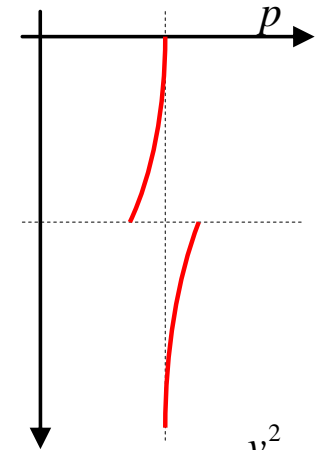
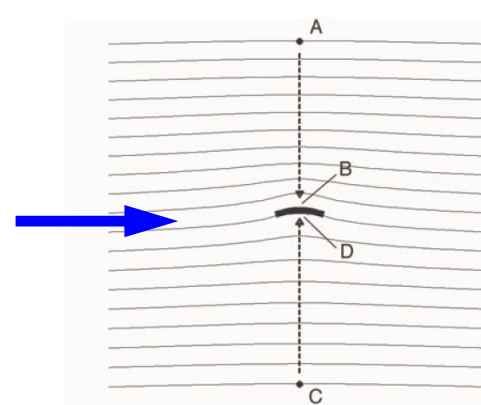
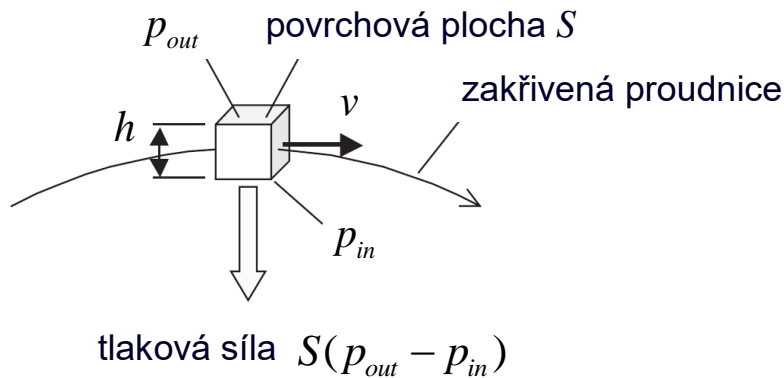
Hydrodynamické paradoxon

důsledky BR:

- proudění v zúžené vodorovné trubici BR + RK
- $S_1 v_1 = S_2 v_2$, $S_1 > S_2 \Rightarrow v_1 < v_2$
- $\frac{1}{2} \rho v_1^2 + p_1 = \frac{1}{2} \rho v_2^2 + p_2 \Rightarrow p_1 > p_2$
- v zúženém místě proudí kapalina pod sníženým tlakem – **hydrodynamické paradoxon (aerodynamické paradoxon)**
- aplikace: vývěvy, čerpadla, karburátory a rozprašovače



Příčina aerodynamického vztlaku



- na element tekutiny pohybující se po zakřivené trajektorii působí dostředivá síla
- hmotnost elementu vyjádříme pomocí rozměrů a hustoty
- dostředivá síla dána rozdílem tlaků působících na vnější a vnitřní plochu
- rozdíl tlaků určíme z hodnoty gradientu tlaku kolmého ke směru pohybu
- porovnáním obou vyjádření dostředivé síly
- tlak stoupá s rostoucí vzdáleností od středu rotace

$$F = m \frac{v^2}{R}$$

$$m = Sh\rho$$

$$F = S(p_{out} - p_{in}) = S dp$$

$$dp = h \text{grad } p$$

$$Sh \text{grad } p = Sh\rho \frac{v^2}{R}$$

$$\text{grad } p = \rho \frac{v^2}{R}$$

Aerodynamický vztlak při obtékání křídla

- udržení vztlaku ovlivňují také síly tření, které zabezpečí přilnutí proudnic ke křídlu
- do výpočtů nutno zahrnout co nejpřesnější popis chování tekutiny \Rightarrow v praxi je nezbytné experimentální ověření

Často se vztlak zjednodušeně vysvětluje pomocí Bernoulliovy rovnice pro proudnice těsně nad a pod křídlem (horní hrana křídla je delší, a proto tam částice proudí rychleji při nižším tlaku); ukažme si některá jeho úskalí:

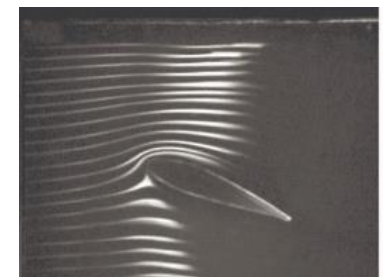
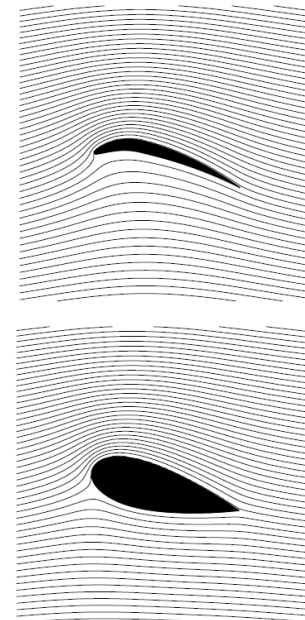
- BR představuje zákon zachování pro jednotlivou proudnici; experimenty s dýmem ukazují, že proudnice nad a pod křídlem se za křídlem nespojí, takže nelze jednoduše porovnávat odpovídající tlaky
- vysvětlení pomocí BR je založeno na tom, že proudnice pod křídlem je kratší (křídlo letadla), takže vyvolává otázku, jak vzniká vztlak na křídle s tenkým profilem (ptačí křídlo)
- silové působení vyvolává i obtékání jednoho povrchu

Přesto BR může posloužit při rozboru experimentů s dýmem:

- rozumný smysl má porovnávat chování sousedních proudnic blížících se ke křídlu shora a zdola – nad křídlem pozorují zrychlení a pod křídlem zpomalení pohybu částic, což podle BR vede na očekávané změny tlaku v okolí křídla



experiment s dýmem:
nad křídlem proudí vzduch rychleji než pod ním \Rightarrow
proudnice se za křídlem nespojí



Holger Babinsky: „How do wings work?“, 2003 *Phys. Educ.* **38** 497
(http://iopscience.iop.org/0031-9120/38/6/001/pdf/0031-9120_38_6_001.pdf)

Proudění viskózní tekutiny

- pohyb reálné kapaliny – vnitřní tření (projevuje se jen za pohybu) - viskózní tekutiny
- představa – při laminárním proudění mezi vrstvami smyková napětí
- smyková napětí nevrací částice do rovnovážných poloh, jen brzdí
- mezní vrstva přiléhající ke stěně se nehýbe (lne k povrchu)
- gradient rychlosti kolmo na směr pohybu

experiment:

- paralelní desky ve vzdálenosti d
- horní deska
 - rychlost \vec{V}
 - plocha S
 - síla F

- zákonitost $\frac{F}{S} = \eta \frac{V}{d}$

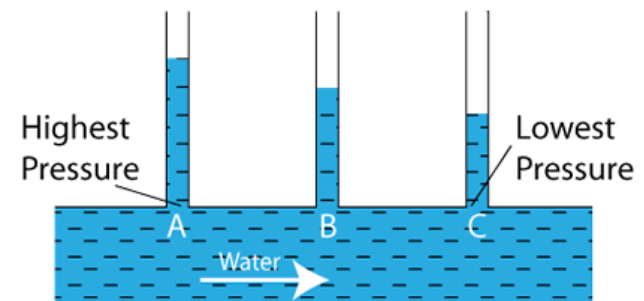
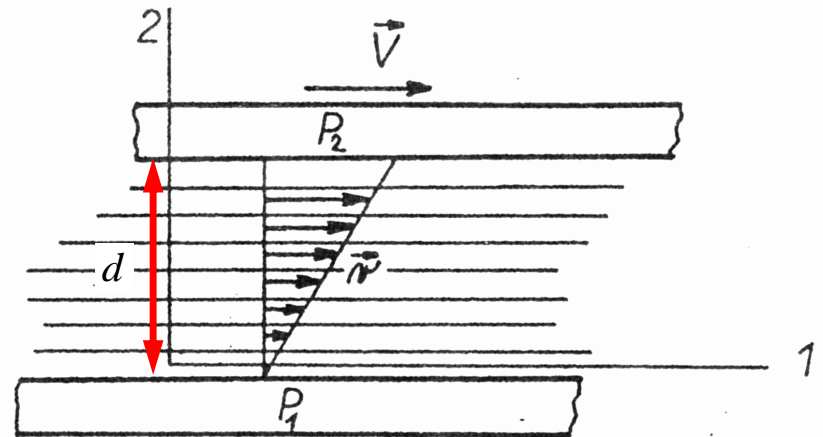
- vyhovuje (aspoň přibližně) pro většinu tekutin

zobecnění $\sigma_{21} = \eta \frac{\partial v_1}{\partial x_2}$ – newtonovská tekutina

- konstanta úměrnosti – **dynamická viskozita** η

- (kinematická viskozita $\nu = \frac{\eta}{\rho}$)

- vnitřní tření způsobuje ztrátu tlaku



Tenzor napětí ve viskózní tekutině.

Newtonovská kapalina

- hledá se modifikace tenzoru napětí tekutiny
- do tenzoru napětí doplněna část σ'_{ij} vyvolaná prouděním $\sigma_{ij} = -\delta_{ij} p + \sigma'_{ij}^{(i)} + \sigma'_{ij}^{(d)}$
- analogicky k Hookeovu zákonu předpokládáme úměrnost odpovídajícím částem tenzoru rychlosti deformace $\sigma'_{ij}^{(i)} = 2\zeta D_{ij}^{(i)} \wedge \sigma'_{ij}^{(d)} = 2\eta D_{ij}^{(d)}$

aby po dosazení za tenzor rychlosti deformace byl výsledek v souladu s

$$\sigma_{21} = \eta \frac{\partial v_1}{\partial x_2}$$

Newtonovská kapalina

- 1.invariant tenzoru rychlosti deformace nulový (\Leftarrow RK) $D_I = \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \text{div } \vec{v} = 0$
- proto také $D_{ij}^{(i)} = \frac{1}{3} D_I \delta_{ij} = 0$
- zároveň pak platí $D_{ij}^{(d)} = D_{ij} - \frac{1}{3} D_I \delta_{ij} = D_{ij}$
- napětí v newtonovské kapalině vyjádřeno přímo pomocí tenzoru rychlosti deformace

$$\sigma_{ij} = -\delta_{ij} p + 2\eta D_{ij}$$

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$

Newtonovská tekutina. Druhá viskozita

- pohybová rovnice kontinua (upravena analogicky k EHR)
$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = I_i + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j}$$
- dosadíme za tenzor napětí
$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = I_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{2\eta}{\rho} \frac{\partial D_{ij}}{\partial x_j}$$
- dalšími úpravami → Navierova-Stokesova rovnice
$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = I_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j}$$

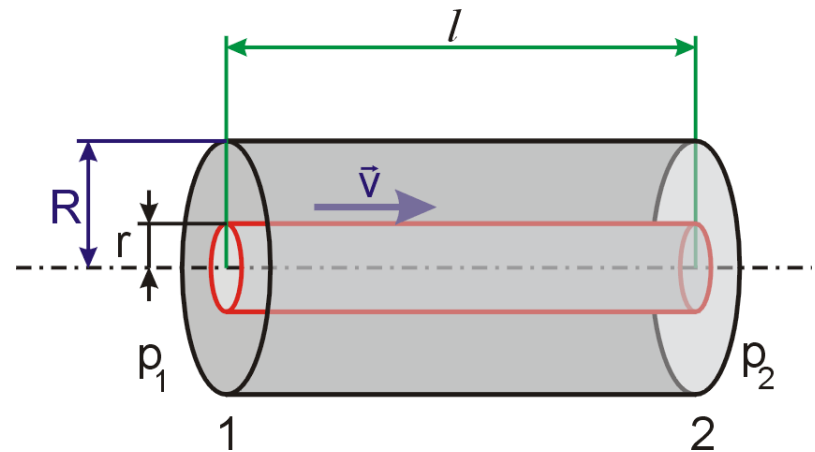
výpočet pohybu elementu nestlačitelné kapaliny

- NSR + RK - 4 rovnice pro 4 funkce v_i a p
- nelinearita rovnic \Rightarrow nepatrné fluktuace mohou zcela změnit vývoj systému (efekt motýlích křídel)

Newtonovská tekutina

- obecně stlačitelná
- $\Rightarrow D_I \neq 0 \Rightarrow$ izotropní část tenzoru rychlosti deformace nenulová $\Rightarrow \sigma_{ij}^{(i)} = 2\zeta D_{ij}^{(i)}$
- konstanta úměrnosti ζ – tzv. **druhá viskozita** (odpor proti objemovým změnám)

Parabolický zákon rozdělení rychlostí



- laminární proudění viskózní newtonovské kapaliny
- válcová trubice poloměru
- vrstvy kapaliny – souosé trubice poloměru
- rychlost kapaliny
- smykové napětí na plochách mezi vrstvami
- uvažujeme posouvání celého objemu válce poloměru r
- na jeho vnější stěně třecí síla proti pohybu
- na podstavu působí tlaky p_1 a $p_2 > p_1$, hnací rozdíl tlakových sil
- ustálený stav \Rightarrow výsledná síla na každou proudovou trubici nulová

$$R$$

$$r$$

$$v = v(r)$$

$$\tau = \eta \left| \frac{dv}{dr} \right|$$

$$F_\tau = 2\pi r l \tau$$

$$F_p = (p_2 - p_1) \pi r^2$$

$$F_p = F_\tau$$

Parabolický zákon rozdělení rychlostí

- dosazením

$$(p_2 - p_1)r = 2l\eta \left| \frac{dv}{dr} \right|$$

jaké znaménko derivace rychlosti ?

- na vnitřní stěně trubice rychlost shodná s rychlostí trubice \Rightarrow

$$v = 0 \text{ pro } r = R$$

- uvnitř trubice rychlost kladná $\Rightarrow \frac{dv}{dr} < 0 \Rightarrow$

$$\frac{dv}{dr} = - \left| \frac{dv}{dr} \right|$$

- dosazením

$$(p_2 - p_1)r = -2l\eta \frac{dv}{dr}$$

- separace proměnných

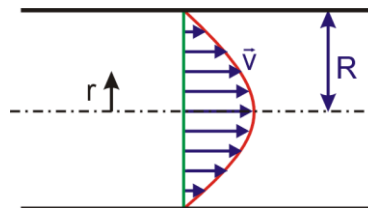
$$dv = - \frac{(p_2 - p_1)}{2l\eta} r dr$$

- integrály v odpovídajících mezích

$$\int_v^0 dv = - \frac{(p_2 - p_1)}{2l\eta} \int_r^R r' dr'$$

- integrací získáme parabolický zákon rozdělení rychlosti

$$v = \frac{(p_2 - p_1)}{4l\eta} (R^2 - r^2)$$



Hagenův-Poiseuillův zákon

- Jean L. M. Poiseuille ([pwazœj] 1797-1869; Francie)
- Gotthilf H. L. Hagen (1797 – 1884; Německo)

- objem kapaliny Q , který proteče trubicí za jednotku času

$$Q = \int_S v dS$$

- převedeme na integraci v polárních souřadnicích

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_0^R v r dr d\varphi$$

- integrací přes úhlovou souřadnici (na úhlu φ nic nezávisí)

$$Q = 2\pi \int_0^R v r dr$$

- dosazením za rychlost

$$Q = 2\pi \frac{(p_2 - p_1)}{4l\eta} \int_0^R (R^2 - r^2) r dr$$

- int. přes poloměr $Q = \pi \frac{p_2 - p_1}{2l\eta} \left[R^2 \int_0^R r dr - \int_0^R r^3 dr \right] = \pi \frac{p_2 - p_1}{2l\eta} \left[\frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4} \right] = \pi \frac{p_2 - p_1}{8l\eta} R^4$

- objem V newtonovské viskózní kapaliny o viskozitě η proteklý za čas t trubicí poloměru R a délky l , mezi jejímiž konce je rozdíl tlaku $p_2 - p_1$ (Hagenův-Poiseuillův zákon)

$$V = \pi \frac{p_2 - p_1}{8l\eta} R^4 t$$

Laminární a turbulentní proudění

v reálné tekutině vznikají víry vždy

nicméně pro konkrétní tekutinu

- existuje oblast rychlosti proudění, kde
 - jednotlivé vrstvy proudící tekutiny kolmé ke směru proudění mají stálou rychlost ve směru vrstvy
 - vrstvy se nemísí
 - **laminární proudění**
- nad určitou mezní rychlostí
 - se vrstvy díky smykovým napětím začnou promíchávat
 - rychlost kolísá s časem
 - poruší se spojitě rozložení vrstev
 - vznikají víry
 - **turbulentní proudění**
- mezi těmito dvěma oblastmi rychlostí
 - **přechodové proudění**

Reynoldsovo číslo

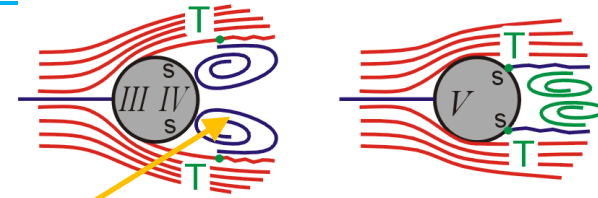
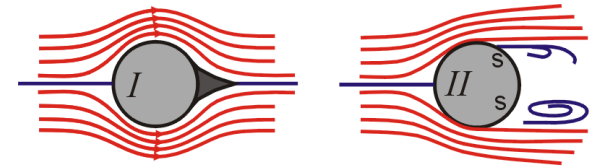
chování různých tekutin se porovnává pomocí tzv. podobnostních čísel

- charakterizující veličiny v bezrozměrném vztahu
- odráží strukturu příslušných pohybových rovnic
- je to jednoduché, většinou to funguje
- často nic lepšího nemáme
- není to přesné, široká oblast neurčitosti

Reynoldsovo číslo $Re = \frac{\bar{v}l}{\nu}$

- rozlišení laminárního ($Re < Re_K$) a turbulentního proudění ($Re > Re_K$)
- charakter se porovnává na základě
 - průměrné rychlosti proudění \bar{v}
 - typického rozměru l
 - kinematické viskozity $\nu = \frac{\eta}{\rho}$
- pro různá geometrická uspořádání je nutno hodnotu Re_K stanovit experimentálně

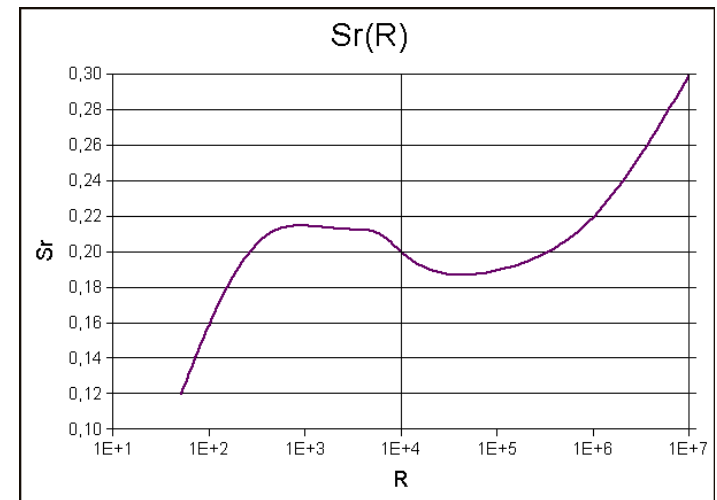
Strouhalovo číslo



Strouhalovo číslo $Sr = \frac{f l}{\bar{v}}$

Vincenc Strouhal (1850 – 1922) český experimentální fyzik, 1903–1904 rektor UK

- pro střední rozsah Reynoldsova čísla má přibližně konstantní hodnotu
- umožní přibližně určit frekvenci vírů v úplavu za pohybující se překážkou
- počítá se na základě
 - průměrné rychlosti proudění \bar{v}
 - typického rozměru l
 - frekvence vírů za překážkou f
- hodnoty pro konkrétní geometrické uspořádání se určí opět experimentálně



závislost Strouhalova čísla na Reynoldsově čísle pro válec