

# Cvičení 11 – Podgrupy, Lagrangeova věta

16. prosince 2025

**Příklad 1.** Rozhodněte, zda je  $H$  podgrupa  $G$  a pokud ano, určete index  $[G : H]$  a všechny levé rozkladové třídy  $G$  podle  $H$ , jestliže:

- a)  $G = \mathbb{Z}_{12}$  a  $H = \{0, 3, 6, 9\}$ ,
- b)  $G = \mathbb{Z}_{10}$  a  $H = \{0, 3, 6, 9\}$ ,
- c)  $G = S_3$  a  $H = \{\text{id}, (12), (23)\}$ ,
- d)  $G = S_3$  a  $H = \{\text{id}, (12)\}$ ,
- e)  $G = D_{10}$  a  $H = \{\text{id}, \text{libovolná reflexe}\}$ ,
- f)  $G = D_{10}$  a  $H = \{\text{id}, \text{všechny reflexe}\}$ ,

**Příklad 2.** Rozhodněte zda platí:

- a) v grupě  $\mathbb{Z}_{30}$  podgrupy řádu 4, 5, 6,
- b) v grupě  $S_{17}$  prvky řádu 71, 72, 80.

**Příklad 3.** Najděte nejmenší podgrupu grupy  $S_5$ , která obsahuje prvek  $\pi = (1\ 2\ 3\ 4\ 5)$ . Jakého je řádu a jakého indexu?

**Příklad 4.** Buď  $G$  grupa řádu 60,  $H \leq G$  řádu 5 a  $K \leq G$  indexu 5. Je  $H \cap K$  komutativní? Změní se odpověď, pokud řád  $H$  bude 10?

**Příklad 5.** Uvažme grupu  $(\mathbb{Q}, +)$ . Ukažte, že:

- a) v ní mají každé dvě netriviální podgrupy netriviální průnik,
- b) ji nelze generovat jedním prvkem (dokonce ani žádnou konečnou podmnožinou).

**Příklad 6.** Určete, ve kterých z následujících grup tvoří sudá čísla podgrupu:  $\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_{15}, \mathbb{Z}_{16}, \mathbb{Z}_{15}^*, \mathbb{Z}_{16}^*$ .

**Příklad 7.** Rozhodněte, zda:

- a)  $\{\pi \in A_4 : \pi^2 = \text{id}\} \leq A_4$ ,
- b)  $\{\pi \in A_4 : \pi^3 = \text{id}\} \leq A_4$ ,
- c)  $\{\pi \in S_4 : \pi^2 = \text{id}\} \leq S_4$ ,
- d)  $\{\pi \in S_4 : \pi^3 = \text{id}\} \leq S_4$ .

**Příklad 8.** Ukažte, že platí:

- a)  $\langle 1 \rangle_{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z} = \langle 1 \rangle_{\mathbb{Q}}$ ,
- b)  $\langle (1, 0), (0, 1) \rangle = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ,
- c)  $\langle a, b \rangle = \langle \text{NSD}(a, b) \rangle = \text{NSD}(a, b)\mathbb{Z}$ ,
- d)  $S_n = \langle (12), (13), \dots, (1n) \rangle$ ,
- e)  $A_n = \langle (123), (124), \dots, (12n) \rangle$ .
- f)  $D_{2n} = \langle \rho, \sigma \rangle$ , kde  $\rho$  je rotace o  $\frac{2\pi}{n}$  a  $\sigma$  je libovolná reflexe.

**Příklad 9.** Mějme konečnou grupu  $G$  a dvě disjunktní podmnožiny  $A, B$  uzavřené na násobení 3 prvků (tj. pro  $a, b, c \in A$  platí  $abc \in A$ ), takové, že  $G = A \cup B$ . Ukažte, že jedna z množin  $A, B$  je podgrupa  $G$ .