Řešení 1. zápočtového testu z Diskrétní matematiky

Příklad 1. (3b) Napište definici prosté (injektivní) funkce.

Definice 1. Funkci $f : X \to Y$ nazýváme prostou, platí-li $\forall x_1, x_2 \in X$:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Příklad 2. (4b) Matematickou indukcí dokažte, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ je výraz $6n^2 + 2n$ dělitelný čtyřmi.

Důkaz: Tvrzení dokážeme pro $n = 1$. Následně dokážeme implikaci $T(i) \Rightarrow T(i+1)$, kde $T(i)$ je výrok *"uvedená rovnost platí pro $n = i$"*.

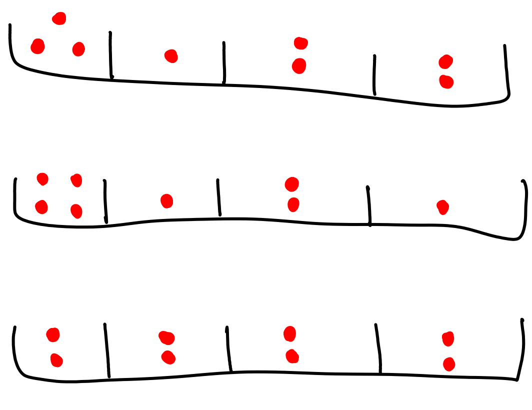
- $n = 1$: $6 + 2 = 8$, což je dělitelné čtyřmi.
- $n = i + 1$ (předpokládáme $T(i)$, tedy že $6i^2 + 2i$ je dělitelné čtyřmi):

  $$6(i+1)^2+2(i+1) = 6(i^2+2i+1)+2i+2 = 6i^2+12i+6+2i+2 = (6i^2+2i)+(12i+8).$$

  Přitom první závorka je dělitelná čtyřkou z indukce, z druhé závorky je možné vytknout čtyřku při zachování celočíselnosti.

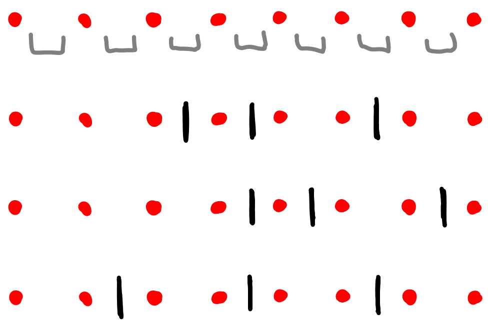
$\square$

Příklad 3. (4b) Kolika různými způsoby je možné rozdělit n nerozlišitelných kuliček do k přihrádek tak, aby žádná přihrádka nebyla prázdná. Na následujícím obrázku je příklad několika takových rozdělení pro $n = 8, k = 4$:



Důkaz: Předvedeme si dvě řešení, nejprve úlohu vyřešíme přímo, poté ji převedeme na počítání něčeho, co známe ze cvičení.

Jak zakódovat všechna uvažovaná rozdělení kuliček? Kuličky jsou nerozlišitelné, takže je prostě nějak fixně seřadíme do řady. To lze provést právě jedním způsobem (jiná seřazení jsou nerozlišitelná). Těchto n kuliček chceme rozdělit na k neprázdných hromádek, což můžeme



provést tak, že na $k-1$ pozic mezi kuličkami umístíme oddělovače. Toto je ilustrováno na dalším obrázku, kde jsou zakódovány tři výše uvedená rozdělení kuliček.

Docházíme k tomu, že počet rozdělení bude $\binom{n-1}{k-1}$, protože z množiny $n-1$ pozic chceme vybrat $k-1$ pro umístění oddělovačů. Vzhledem k tomu, že vybíráme $k-1$ prvkové podmnožiny, budou vybrané oddělovače rozdělovat kuličky do k skupin. Žádná z nich nebude prázdná, protože pozice dvou vybraných odělovačů se vždy liší alespoň o 1. Nakonec každé rozdělení bude započítáno právě jednou.

Druhé řešení využívá úlohu udělanou na cvičení. Odvodili jsme, že pokud chceme rozdělit n' kuliček do k' přihrádek (z nichž některé mohou být prázdné) lze to udělat $\binom{n'+k'-1}{k'-1}$ způsoby. Můžeme se tedy podívat na naše přihrádky a do každé na začátku umístit jednu kuličku. To lze provést jediným rozlišitelným způsobem a zbytek $(n-k)$ kuliček pak můžeme rozdělit jako v příkladu z cvičení – platnost podmínky neprázdnosti přihrádek jsme již vynutili. Dosazením $n' = n-k$ a $k' = k$ do předchozího vzorce dostáváme:

$$\binom{n-k+k-1}{k-1} = \binom{n-1}{k-1}.$$

□

Příklad 4. (4b) Nechť R a S jsou nějaké ekvivalence na množině $\{1 \dots n\}$ pro $n \in \mathbb{N}, n \geq 10$. Které z následujících relací jsou nutně ekvivalence? (Buď ukažte, že daná relace musí být ekvivalencí, nebo nalezněte protipříklad – tzn. takové ekvivalence R, S, že uvedená relace ekvivalencí není.)

- $R \cup S$
- $R \cap S$
- $R \setminus S$
- $R \circ S$

Důkaz: Řešení je následující:

- $R \cup S$ – **obecně není ekvivalence**

  Příklad, kdy $R \cup S$ je ekvivalence: R je nějaká ekvivalence a jako S zvolíme stejnou ekvivalenci (nebo třeba identitu či například ekvivalenci, která je zjemněním R). Potom $R \cup S = R$, tedy opět ekvivalence.

  Příklad, kdy $R \cup S$ není ekvivalence: Jako R vezmeme ekvivalenci na $\{1, \ldots, 10\}$, která má dvě třídy ekvivalence: $\{1, \ldots, 5\}$ a $\{6, \ldots 10\}$. Jako S vezmeme ekvivalenci se třídami $\{1, \ldots, 4\}$ a $\{5, \ldots, 10\}$. Platí $1(R \cup S)5$ a $5(R \cup S)10$. Neplatí ale $1(R \cup S)10$, sjednocení tedy porušuje transitivitu.

- $R \cap S$ – **je vždy ekvivalence**

  $R \cap S$ je určitě reflexivní, to průnik dvou reflexivních relací. $R \cap S$ bude také symetrická. Jak R, tak S jsou obě symetrické. Obě obsahují nějakou dvojici (x, y) právě tehdy, když obsahují tu opačnou, (y, x). I průnik tedy bude obsahovat (x, y) právě tehdy, když bude obsahovat (y, x).

  Nechť průnik $R \cap S$ obsahuje (x, y) a zároveň (y, z). Chceme ukázat, že obsahuje i (x, z), tedy že relace je transitivní. Pokud ale první dvě uvedené dvojice jsou obsaženy v průniku, jsou obsaženy jak v R, tak v S. Ty jsou obě transitivní, takže R i s S musí obsahovat (x, z). Pokud je (x, z) obsažená v obou množinách, je obsažená i v průniku.

- $R \setminus S$ – **není v netriviálních případech nikdy ekvivalence.**

  Pro $n > 0$ výsledná relace není ani reflexivní.

- $R \circ S$ – **obecně není ekvivalence**

  Ukážeme, že není nutné symetrická. Vezmeme jako R ekvivalenci na $\{1, 2, 3\}$ s rozkladem na třídy ekvivalence $\{\{1, 2\}, \{3\}\}$. Za S vezmeme ekvivalenci s rozkladem na třídy ekvivalence $\{\{1\}, \{2, 3\}\}$. Platí $1(R \circ S)3$, protože $1R2 \wedge 2S3$. Neplatí ale $3(R \circ S)1$, neboť 3 je v relaci R jen sama se sebou a z trojky se v S dostaneme jen do prvků $2, 3$.

  Mezi případy, kdy $R \circ S$ naopak je ekvivalencí, patří (jsou nějaké další?):

  - R libovolná ekvivalence, S identita (nebo naopak),
  - R libovolná ekvivalence, $S = R$.

$\square$

Příklad 5. (5b – bonusový příklad) Kolik existuje různých 10-ciferných čísel obsahujících čtyři číslice 4, tři číslice 3, dvě číslice 2 a jednu 1? Mezi započítávaná čísla tedy patří např.: 4444333221, 4343434212, 24132433444, ...

Důkaz: Všech 10 číslic, které máme k dispozici, dokážeme seřadit 10! různými způsoby. Některá z těchto seřazení ale budou představovat stejná čísla. Pokud například vezmeme číslo 4343344221, můžeme čtyři číslice 4 proházet 4! způsoby a pokaždé to povede ke stejnému číslu. Stejně tak můžeme popřeházet výskyty trojek – pokud na nějaké místo umístíme místo první trojky její druhou kopii, nic to na čísle nezmění. Uvedeným postupem tedy vygenerujeme každé číslo $4! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 1!$ způsoby.

Výsledek tedy bude:

$$\frac{10!}{4! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 1!}, \text{ což je multinomický koeficient } \binom{10}{4,3,2,1}$$

$\square$

Odhady

Minule jsme si ukázali následující nerovnosti:

$$\binom{n}{k} \leq 2^n \leq n^n$$

$$\frac{1}{n+1} 2^n \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} \leq 2^n$$

Platí tedy:

$$\binom{2m}{m} \leq 2^{2m}$$

Existuje i těsnější odhad (přednáška):

$$\frac{2^{2m}}{2\sqrt{m}} \leq \binom{2m}{m} \leq \frac{2^{2m}}{\sqrt{2m}}$$

Příklady

Příklad 6. Nalezněte pro každé n posloupnost různých reálných čísel, která nemá monotónní podposloupnost délky $n+1$.

Příklad 7. Nechť $X = \{1,2,3\}^2$. Definujeme relaci $\preceq$ na X následovně:

$$(a_1, a_2) \preceq (b_1, b_2) \Leftrightarrow a_1 < b_1 \vee (a_1 = b_1 \wedge a_2 < b_2).$$

Je $\preceq$ uspořádání? Co když definici $\preceq$ změníme takto (viz konec řádku):

$$(a_1, a_2) \preceq (b_1, b_2) \Leftrightarrow a_1 < b_1 \vee (a_1 = b_1 \wedge a_2 > b_2).$$