

Jméno:

1	2	3	4	Σ

Zkoušková písemka z Matematické analýzy I
22. 5. 2024

Čas: 90 minut.

- *Nezapomeňte podepsat všechny papíry, které chcete odevzdat. Nemusíte odevzdávat papíry s pomocnými výpočty.*
- *Můžete psát i na papír se zadáním. Papír se zadáním je nutno podepsat a odevzdat, i když jste na něj nic nenapsali.*
- *Není povoleno používat kalkulačky a jinou elektroniku ani přinesené písemné materiály.*
- *Své odpovědi musíte zdůvodnit.*
- *Tvrzení z přednášky můžete používat bez důkazů, pokud není uvedeno jinak, je však nutno uvést, které tvrzení používáte.*

1. Uvažujme funkci $f(x) = |x|(x+2)^3$ definovanou na $\mathbb{R}$.
 - (a) [3 b.] Má tato funkce derivaci v bodě $x = 0$?
 - (b) [4 b.] Najděte všechny lokální a globální extrémy této funkce.
 - (c) [3 b.] Najděte maximální intervaly, na nichž je tato funkce monotónní (tj. nerostoucí nebo neklesající), a maximální intervaly, na nichž je ryze monotónní (tj. rostoucí nebo klesající).
2.
 - (a) [3 b.] Definujte, co je *limes superior* posloupnosti čísel.
 - (b) [3 b.] Najděte příklad posloupnosti čísel $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, pro niž platí $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$, ale neplatí $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$. Nezapomeňte zdůvodnit, proč má váš příklad uvedené vlastnosti.
 - (c) [4 b.] Mějme dvě posloupnosti čísel $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ a $(b_n)_{n=1}^{\infty}$. Předpokládejme, že platí

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = 10 \text{ a } \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n = 20.$$

Lze z těchto informací určit, čemu se rovná limes superior posloupnosti $a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, \dots$?

3.
 - (a) [3 b.] Nechť I je libovolný interval. Napište, co to znamená, že funkce $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ je *stejněměrně spojitá* na I .
 - (b) [3 b.] Uveďte příklad funkce $f: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, která je spojitá v každém bodě $x \in (-1, 1)$, ale není stejněměrně spojitá na intervalu $(-1, 1)$.
 - (c) [4 b.] Nechť $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je funkce, která pro každé dva různé body $x, y \in \mathbb{R}$ splňuje $|f(x) - f(y)| \leq 10|x - y|$. Dokažte, že f je stejněměrně spojitá na $\mathbb{R}$.
4.
 - (a) [3 b.] Napište, jak je definován *Newtonův integrál* funkce f na nějakém intervalu (A, B) .
 - (b) [3 b.] Existuje funkce, která je spojitá na intervalu $(-1, 1)$, ale není na intervalu $(-1, 1)$ newtonovsky integrovatelná?
 - (c) [4 b.] Rozhodněte, zda existuje následující integrál, a pokud ano, určete jeho hodnotu:

$$(N) \int_{-1}^2 x^2 \operatorname{sgn}(x) dx,$$

kde funkce $\operatorname{sgn}(x)$ je definována obvyklým způsobem: $\operatorname{sgn}(x) = -1$ pro $x < 0$, $\operatorname{sgn}(0) = 0$ a $\operatorname{sgn}(x) = 1$ pro $x > 0$.