

Jméno:

1	2	3	4	Σ

Zkouška z Kombinatoriky a grafů I — písemná část, 10. 2. 2025

Čas: 90 minut

- *Nezapomeňte podepsat všechny papíry, které chcete odevzdat.*
- *Můžete psát i na papír se zadáním. Papír se zadáním je nutno podepsat a odevzdat, i když jste na něj nic nenapsali.*
- *Během písemné části zkoušky nemůžete odcházet ze zkouškové místnosti. Můžete ovšem písemnou část ukončit před časovým limitem.*
- *Nejsou povoleny kalkulačky, hodinky či jiná elektronika, ani přinesené písemné materiály.*
- *Všechny odpovědi je nutno zdůvodnit, pokud není řečeno jinak.*
- *Číselné výsledky (např. typu $\binom{126}{18} \cdot 23! - 17^6$) není nutno dále upravovat a dopočítávat.*
- *Tvrzení z přednášky můžete používat bez důkazů, pokud není uvedeno jinak, nicméně je nutné uvést, které tvrzení používáte.*

-
1. Nechtě $(a_n)_{n=0}^\infty$ je posloupnost s vytvořující funkcí

$$A(x) = \frac{1 + 9x}{1 - 2x - 3x^2}.$$

Najděte explicitní vzorec pro a_n . (Zde nestačí jen vyjádřit a_n pomocí derivací funkce $A(x)$, nebo pomocí soustavy rekurencí, je třeba opravdu uvést výraz vyjadřující a_n jako funkci indexu n pomocí základních aritmetických operací.) [5 bodů]

2. Napište, jak je definováno *párování* v grafu. Zformulujte a dokažte Hallovu větu ve verzi, která mluví o párováních v bipartitních grafech. Definujte případné symboly a značení, které ve své formulaci Hallovy věty používáte. [10 bodů]
3. Napište, jak je definován *řez* v tokové síti a jak je definována *nenasycená cesta* a *zlepšující cesta* pro nějaký tok v tokové síti. Zformulujte větu z přednášky, která dává do souvislosti maximalitu toku v dané síti se zlepšujícími cestami a s řezy. Nemusíte tu větu dokazovat. [5 bodů]
4. Zformulujte a dokažte Spernerovu větu, která mluví o antiřetězcích v uspořádání množin pomocí inkluze. [10 bodů]