Početní postupy - Matematika pro fysiky II

SEPSAL: Iosephus Kučeravý

Obsah

1 Fourierovy řady

Početní postup

Zadání: Mějme funkci $f(x)$, kterou máme rozvinout ve Fourierovu řadu na intervalu $[a, b]$

1. Nejprve si zadanou funkci $f(x)$ nakreslíme

2. Pokud máme v zadané funkci parametr (např. p), vypíšeme si jednotlivé případy v závislosti na jeho volbě (např. $p > 0$, $p = 0$, $p < 0$)

3. Prozkoumáme délku intervalu, na který je funkce ze zadání zúžená

   a) Obecná perioda délky $L = b - a$

Fourierova řada pro periodu délky L

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{2\pi kx}{L}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\left(\frac{2\pi kx}{L}\right)$$

$$a_k = \frac{2}{L}\int_{-L/2}^{L/2} f(x)\cos\left(\frac{2\pi kx}{L}\right) \mathrm{d}x \qquad k \in \mathbb{N}_0$$

$$b_k = \frac{2}{L}\int_{-L/2}^{L/2} f(x)\sin\left(\frac{2\pi kx}{L}\right) \mathrm{d}x \qquad k \in \mathbb{N}$$

   b) Perioda délky $L = 2\pi$

Fourierova řada pro periodu délky L

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx)$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\, \mathrm{d}x \qquad k \in \mathbb{N}_0$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\, \mathrm{d}x \qquad k \in \mathbb{N}$$

4. Zkoumáme sudost/lichost funkce:

   - Pokud je $f(x)$ na zúženém intervalu **lichá** $\Rightarrow$ sinový rozvoj $\Rightarrow$ $\boxed{\forall a_k = 0}$
   - Pokud je $f(x)$ na zúženém intervalu **sudá** $\Rightarrow$ cosinový rozvoj $\Rightarrow$ $\boxed{\forall b_k = 0}$

5. Pokud nemáme lichou funkci, tedy $a_k \neq 0$ nejprve začneme s výpočtem a_0

$$a_0 = \frac{2}{L}\int_{-L/2}^{L/2} f(x)\, \mathrm{d}x\,, \qquad \text{resp. } a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, \mathrm{d}x$$

6. Dále spočítáme (pokud nejsou rovny 0) a_k a b_k

7. Nakonec koeficienty a_0, a_k a b_k dosadíme do vzorce pro Fourierovu řadu:

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{2\pi kx}{L}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\left(\frac{2\pi kx}{L}\right)$$

respektive

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx)$$

Dodatečné úkoly

Vyšetřování konvergence

Dirichlet-Jordanovo kritérium

- V bodech, kde je f **spojitá** $\rightarrow$ FŘ konverguje a platí rovnost $f(x) = \sum$
- V bodech nespojitosti funkce f je **součet** $\sum$ FŘ $= \frac{1}{2}\Big(\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) + \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) \Big)$

Věta o konvergenci Fourierovy řady

Nechť existuje derivace funkce f až na konečně mnoho bodů a f i f' jsou po částech spojité.

Pak je **součet** Fourierovy řady dán výrazem: $\dfrac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$ což ve spojitém bodě dává hodnotu funkce $f(x)$

Jest-li navíc f spojitá, je konvergence Fourierovy řady dokonce **stejnoměrná**.

A Pokud je zadaná funkce f kombinací **spojitých funkcí** na jejím zúžení (intervalu (a, b)) z věty o konvergenci FŘ platí, že konvergence FŘ jest zde **lokálně stejnoměrná**.

✗ Pokud by funkce f uvnitř intevalu nebyla spojitá, konvergovala by pouze bodově (za předpokladu, že by v každém bodě nespojitosti alespoň existovaly vlastní limity zleva a zprava).

B Zbývá nám tedy prozkoumat, jak se funkce chová v krajních bodech a a b

- Pokud v krajních bodech existují vlastní limity a rovnají se $\Rightarrow$ řada **konverguje stejnoměrně** na $[a, b]$
- V opačném případě konverguje řada pouze **lokálně stejnoměrně** na (a, b), pokud je splněn bod **A**

Vyšetřování konvergence pro formálně zderivovanou řadu

O derivaci

Jest-li $n \in \mathbb{N}_0$ takové, že $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^n \left(|a_k| + |b_k|\right) < \infty$,

pak **trigonometrická řada** s koeficienty a_k, b_k **konverguje stejnoměrně** na $\mathbb{R}$, **součet** jest 2π-periodická funkce třídy C^n a řadu lze až n-krát **derivovat** člen po členu, s tím, že platí rovnosti mezi derivacemi součtu a součty derivací.

A V obecném případě známe podobu Fourierovy řady, u níž zderivujeme obě strany:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x) \sim \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{2\pi k x}{L}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\left(\frac{2\pi k x}{L}\right) \right]$$

B Vyjde nám nová funkce $g(x) = f'(x)$ s novou FŘ, pro niž opět ověříme její konvergenci jako výše

Aplikace Parsevalovy rovnosti

$$\boxed{\frac{2}{L}\left|\left|f\right|\right|^2_{L^2(0,L)} = \frac{2}{L}\int_0^L (f(x))^2 = \frac{a_0^2}{2} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 + b_k^2\right)}$$ Parsevalova rovnost (L)

$$\boxed{\frac{1}{\pi}\left|\left|f\right|\right|^2_{L^2(0,2\pi)} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} (f(x))^2 = \frac{a_0^2}{2} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 + b_k^2\right)}$$ Parsevalova rovnost (2π)

A Zintegrujeme f^2 přes inverval délky periody (0 až L resp. 0 až 2π)

B Vynásobíme normovacím prefaktorem $\frac{2}{L}$ resp. $\frac{1}{\pi}$

C Do levé strany rovnosti dosadíme koeficienty a_0, a_k a b_k

2 Příklad na residuovou větu

Typy integrálů

Při výpočtu residuí rozdělujeme integrály do následujících typů dle způsobu řešení a použitých integračních kontur:

A) Přímý výpočet

B) Integrály typu $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$

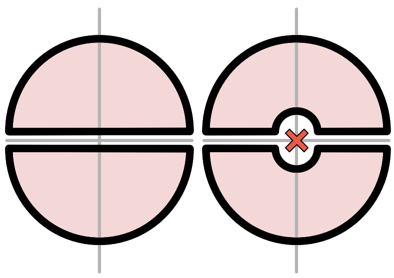
C) Integrály typu $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{i\alpha x} R(x)\,\mathrm{d}x$ a $\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)\,\mathrm{d}x$ alias „ sin a cos”

D) Integrály typu $\int_0^{\infty} x^{\alpha-1} f(x)\,\mathrm{d}x$ a $\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{-\alpha} f(x)\,\mathrm{d}x$ alias „pacman a čínka”

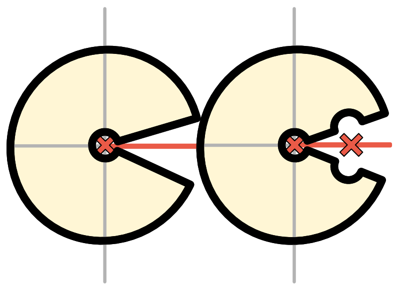
E) Integrály typu $\int_0^{\infty} f(x)\log(x)\,\mathrm{d}x$ alias „logaritmus”

F) Integrály obsahující exponenciálu alias „žiletka”

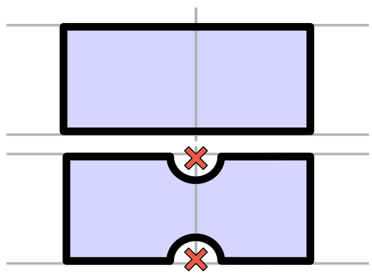
Příklady základních integračních kontur



půlkružnice

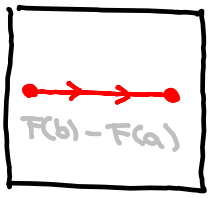


„pacman”



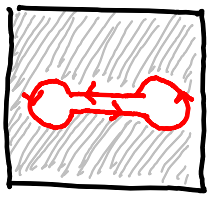
„žiletka”

Dominik Beck - Typologie příkladů



$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x+x^2)^2}$$

$$\int_1^\infty \frac{x^2-1}{x^4+1}\,dx$$



$$\int_0^1 \sqrt{x}\sqrt{1-x}\,dx$$

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{4+x^2}\,\frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x)^2(1+x)}}$$

$$\int_0^1 \ln^2\left(\frac{x}{1-x}\right)\frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$$

$$\int_{-1}^1 \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x)^2(1+x)}}$$

$$\int_0^1 \frac{2x-1}{1-x+x^2}\ln\left(\frac{x}{1-x}\right)dx$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{(1+x+x^2)^2}$$

$$\int_0^1 \ln^2\left(\frac{x}{1-x}\right)dx$$

$$\int_0^1 \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\frac{dx}{x}$$

$$\int_0^1 \ln^3\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\frac{dx}{x}$$

$$\int_{-1}^1 \left(\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)-2x\right)\frac{dx}{x^3}$$

$$\int_0^1 \ln^3\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\frac{dx}{x^3}$$

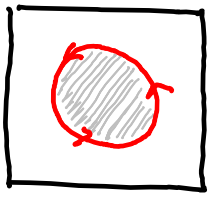
$$\int_0^1 \frac{\ln x\,dx}{\sqrt{x(1-x)}}dx$$

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}}\,\ln x\,dx$$

$$\int_0^1 \frac{\ln^2 x\,dx}{\sqrt{x(1-x)}}dx$$

$$\int_0^1 \ln^2\frac{x}{1-x}\arccos\sqrt{x}\,dx$$

$$\int_0^1 \ln\frac{x}{1-x}\ln x\arccos\sqrt{x}\,dx$$



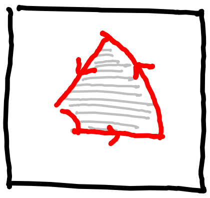
$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 x}{1+\sin^2 x}\,dx$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 x\,dx}{(1+4\sin^2 x)^2}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\cos^2 x-\cos x+1}$$

$$\fint_0^{\pi} \frac{dx}{\cos x-\alpha}$$

$$\int_0^{2\pi} \ln(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)\,dx$$



$$\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^6+1}$$

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{\sqrt{x}(x^6+1)}\,dx$$

$$\int_0^\infty \frac{x\ln x}{1+x^3}$$

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x^4}\,dx$$

$$\int_0^\infty \frac{\ln^2 x}{1+x^4}\,dx$$

$$\fint_0^\infty \frac{dx}{1-x^3}$$

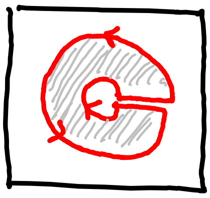
$$\fint_0^\infty \frac{\ln x\,dx}{\sqrt{x}(x^6-1)^2}$$

$$\int_0^\infty \frac{\ln^2 x}{x^2+x+1}\,dx$$

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{1-x+x^2}\,dx$$

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2+2x+2}\,dx$$

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{x(1+x^4)}\,dx$$



$$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)^2}$$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(x^6+1)^2}$$

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{\sqrt{x}(1+x)^2}\,dx$$

$$\int_0^\infty \frac{\ln x\,dx}{(x+1)^2(x+4)\sqrt{x}}$$

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}(1+x)}\,dx$$

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^3)}$$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x+x^2)^2}$$

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{(1+x)^3}\,dx$$

$$\fint_0^\infty \frac{dx}{x^2-6x+1}$$

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x+x^2}\,dx$$

$$\int_0^\infty \frac{\ln^2 x}{(x+1)^2}\,dx$$

$$\int_0^\infty \frac{\ln^3 x\,dx}{(1+x^2)(1+x)^2}$$

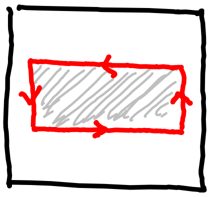
$$\int_0^1 \frac{\ln^2 x}{1-x+x^2}\,dx$$

$$\fint_0^\infty \frac{\ln x}{(x-1)^2}\,dx$$

$$\int_0^1 \frac{\ln x\,dx}{\sqrt{x(1-x)}}dx$$

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg}^3 x}{x^3}\,dx$$

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x}\,dx$$



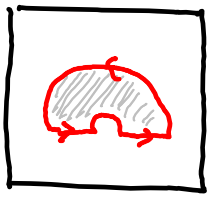
$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos\alpha x}{\cosh x}\,dx$$

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{x/2}}{e^{2x}+2e^{x}+2}\,dx$$

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{x}{\sinh x}\,dx$$

$$\int_0^\infty \frac{x\,dx}{1+e^x}$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{\sinh x}e^{-x}\,dx$$



$$\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2+\alpha^2}$$

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin kx}{x(x^2+\alpha^2)}$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin^3 x}{x^3}$$

$$\fint_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1-x^3}$$

$$\fint_0^\infty \frac{\ln x\,dx}{(x-1)^2}$$

$$\int_0^\infty \frac{\ln^2 x}{1+x^2}\,dx$$

$$\fint_0^\infty \frac{\ln^2 x\,dx}{(x-1)^2(x-4)\sqrt{x}}$$

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\ln(x^2+1)}{x^2+1}\,dx$$

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{x(1+x^2)}\,dx$$

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\ln(1+x^2)}{1-x+x^2}\,dx$$

$$\int_0^\infty \frac{\ln(1+x^4)}{(1+x^2)^2}\,dx$$

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\ln^2(1+x^2)}{1+x^2}\,dx$$

$$\int_0^\infty \frac{\ln x\,\ln(1+x^2)}{1+x^2}\,dx$$

A navíc platí růstová podmínka: $\max\limits_{\{z\in\mathbb{C}:\ \mathrm{Im}\, z\geq 0,\ |z|=R\}} |f(z)| R\log R \overset{R\to+\infty}{\to} 0\ .$

Celkově: $$\boxed{2\int_0^\infty f(x)\log x\ \mathrm{d}x + i\pi\int_0^\infty f(x)\ \mathrm{d}x\ = 2\pi i\sum_{j=1}^k \mathrm{Res}_{a_j}(f(z)\log z)}$$

Logaritmus jako inversní funkce k exponenciále v $\mathbb{C}$

$$\mathrm{e}^z = w = |w|\,\mathrm{e}^{i\mathrm{Arg}\,(w)} \quad\Leftrightarrow\quad z = \mathrm{Ln}\,|w| + \mathrm{Ln}\,(\,\mathrm{e}^{i\mathrm{Arg}\,(w)}) = \underbrace{\ln|w|}_{\substack{\text{„klasický"}\\ \text{logaritmus}}} + i\mathrm{Arg}\,(z)$$

Celkově jsme dostali $$\boxed{\int_0^\infty x^{\alpha-1}f(x)\ \mathrm{d}x\ = \frac{2\pi i}{1-\mathrm{e}^{i2\pi\alpha}}\sum_{j=1}^k \mathrm{Res}_{a_j}\, z^{\alpha-1}f(z)}$$

Zkusme zavést **rozšíření** fce $x^{\alpha-1}(1-x)^{-\alpha}$ na **holomorfní** funkci. Začneme přepisem do vhodnějšího tvaru:

$$\underbrace{x^{\alpha-1}(1-x)^{-\alpha}}_{\substack{\text{Nepracujeme s jednotlivými}\\ \text{funkcemi odděleně}}} \quad=\quad \underbrace{\frac{1}{x}\left(\frac{x}{1-x}\right)^\alpha}_{\substack{\text{pracujeme s nimi}\\ \text{dohromady}}}$$

Celkově máme $$\boxed{\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{-\alpha}f(x)\ \mathrm{d}x\ = \frac{2\pi i}{1-\mathrm{e}^{2\pi\alpha i}}\sum_{j=1}^k \mathrm{Res}_{a_j}\,\frac{1}{z}\,\frac{z}{1-z}^{\alpha} f(z) - \mathrm{e}^{i\pi\alpha}\lim_{z\to\infty} f(z)}$$

3 Fourierova transformace

Vzoreček: Fourierova transformace (FT)

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}, f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\xi \in \mathbb{R}^n \dots$ „v 1D - navíjecí frekvence”, $x \in \mathbb{R}^n \dots$ „v 1D - čas navíjení”

FT: $$\hat{f}(\xi) = \mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, \mathrm{e}^{-2\pi i x\cdot\xi}\, \mathrm{d}x \qquad \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$$

Zpětná FT: $$\check{f}(x) = \mathcal{F}^{-1}(f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi)\, \mathrm{e}^{2\pi i x\cdot\xi}\, \mathrm{d}\xi \qquad \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$$

(a pokud přejmenujeme proměnné) $$\check{f}(\xi) = \mathcal{F}^{-1}(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, \mathrm{e}^{2\pi i x\cdot\xi}\, \mathrm{d}x \qquad \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$$

Vzorečky:

Derivace v multiindexu: $$D^\beta f = \frac{\partial^{\beta_1+\ldots+\beta_n} f}{\partial x_1^{\beta_1} \partial x_2^{\beta_2} \ldots \partial x_n^{\beta_n}}; \qquad x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$$

Poznámka: $D^\beta f$: značí derivaci fce n proměnných podle multiindexu β, který má n složek

Konvoluce: $$\boxed{(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y)\, \mathrm{d}y}$$

Základní vlastnosti Fourierovy transformace:

- $\mathcal{F}^{-1}(f)(\xi) = \mathcal{F}(f)(-\xi)$, $\overline{\mathcal{F}^{-1}(f)(\xi)} = \mathcal{F}(\bar{f})(\xi)$, $\overline{\mathcal{F}(f)(\xi)} = \mathcal{F}^{-1}(\bar{f})(\xi)$
- $\mathcal{F}(f(x-z)) = e^{-2\pi i z\cdot\xi} \mathcal{F}(f)(\xi)$, $\forall z \in \mathbb{R}^n$
- $\mathcal{F}(f)(\xi - \eta) = \mathcal{F}\left(e^{2\pi i x\cdot\eta} f(x)\right)(\xi)$, $\forall \eta \in \mathbb{R}^n$
- $\mathcal{F}\Big(f(\varepsilon x)\Big)(\xi) = |\varepsilon|^{-n}\, \mathcal{F}(f(x))\left(\frac{\xi}{\varepsilon}\right)$, $\forall \varepsilon \neq 0$
- f sudá/lichá v $x_j \Rightarrow \mathcal{F}(f)$ sudá/lichá v ξ_j
- $\mathcal{F}(D^\alpha f)(\xi) = (2\pi i \xi)^\alpha \mathcal{F}(f)(\xi)$, $\mathcal{F}^{-1}(D^\alpha f)(\xi) = (-2\pi i \xi)^\alpha \mathcal{F}^{-1}(f)(\xi)$
- $D^\alpha(\mathcal{F}(f))(\xi) = \mathcal{F}((-2\pi i x)^\alpha f(x))(\xi)$, $D^\alpha\left(\mathcal{F}^{-1}(f)\right)(\xi) = \mathcal{F}^{-1}((2\pi i x)^\alpha f(x))(\xi)$
- $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} f \mathcal{F}(g)\, \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}(f) g\, \mathrm{d}x$, totéž pro $\mathcal{F}^{-1}$
- $\mathcal{F}(f * g)(\xi) = \mathcal{F}(f)(\xi)\, \mathcal{F}(q)(\xi)$, totéž pro $\mathcal{F}^{-1}$

Početní postup (Definice FT pro L^1)

Zadání: Mějme funkci $f(x)$ pro niž chceme spočítat Fourierovu transformaci $\mathcal{F}(f(x))$

Vysvětlete také, jakou definici Fourierovy transformace používáte a proč.

---

1. Nejprve si zadanou funkci $f(x)$ nakreslíme

2. Dále zkoumáme tzv. hraniční pokles:

$$\text{V 1D:} \quad \lim_{x\to\infty} f(x)\cdot|x|^1 < 1 \quad \Rightarrow \quad f \in L^1(\mathbb{R})$$

$$\text{Obecně:} \quad \text{V nD:} \quad \lim_{x\to\infty} f(x)\cdot|x|^n < 1 \quad \Rightarrow \quad f \in L^1(\mathbb{R}^n)$$

Tedy v 1D funkce $f(x)$ klesá na okolí nekonečen rychleji než $\frac{1}{|x|^1} \quad \Rightarrow \quad f \in L^1(\mathbb{R})$

Případně v nD funkce $f(x)$ klesá na okolí nekonečen rychleji než $\frac{1}{|x|^n} \quad \Rightarrow \quad f \in L^1(\mathbb{R}^n)$

3. Pokud je toto **splněno**, můžeme použít definici Fourierovy transformace v prostoru L^1

$$\mathcal{F}\Big(f(x)\Big)(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ \mathrm{e}^{-2\pi i x\cdot\xi}\, \mathrm{d}x$$

4. Dále goniometrickými vzorci pro sin a cos a Eulerovým vzorcem $\mathrm{e}^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi)$ a případně rozkladem či složením na Re a Im část dopočítáme daný integrál

5. Někdy ale musíme stejně použít Residuovou větu, jako v případě L^2

Pokud nemůžeme použít definici pro L^1, stále nejsme ztraceni, můžeme se pokusit využít definice pro L^2 na následující stránce!

Početní postup (Definice FT pro L^2)

6 Pokud ale funkce **neleží** v L^1, zkoumáme, zda leží alespoň v L^2, zkoumáme opět hraniční pokles:

$$\text{V 1D:} \quad \lim_{x\to\infty} (f(x))^2 \cdot |x|^1 < 1 \quad \Rightarrow \quad f \in L^2(\mathbb{R})$$

$$\text{Obecně:} \quad \text{V nD:} \quad \lim_{x\to\infty} (f(x))^2 \cdot |x|^n < 1 \quad \Rightarrow \quad f \in L^2(\mathbb{R}^n)$$

Tedy v 1D funkce $f^2(x)$ klesá na okolí nekonečen rychleji než $\dfrac{1}{|x|^1} \quad \Rightarrow \quad f \in L^2(\mathbb{R})$

Případně v nD funkce $f^2(x)$ klesá na okolí nekonečen rychleji než $\dfrac{1}{|x|^n} \quad \Rightarrow \quad f \in L^2(\mathbb{R}^n)$

7 Pokud je toto splněno, můžeme použít definici Fourierovy transformace v prostoru L^2

$$\mathcal{F}\left(f(x)\right)(\xi) = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\ \mathrm{e}^{-2\pi i\xi\cdot x}\,\mathrm{d}x \qquad \ldots \text{ residuovou větou}$$

8 Dále provádíme úpravy tak, aby nám zbyl v integrandu exponenciální tvar, který si budeme moci parametrizovat α a dostat něco jako:

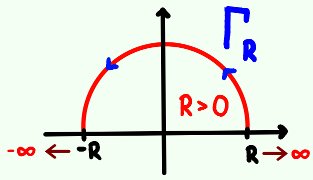
$$I_\alpha := \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} h(x)\ \mathrm{e}^{ix\,\alpha}\,\mathrm{d}x$$

kde $h(x)$ je zpravidla nějaká funkce typu $\frac{1}{x}$ ale ne nutně, tedy naše $\alpha(\xi)$ nám pak určuje polorovinu obíhání, na další straně si uvedeme Jordanovo lemma.

9 Pokud máme problém v 0, změníme typ integrálu na p.v.

Jordanovo lemma

Nechť pro $R_0 > 0$ je $\Omega := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0, |z| > R_0\}$,
$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ spojitá na $\overline{\Omega}$



Definujeme $\Gamma_R(t) = R\,\mathrm{e}^{it}$, $t \in [0, \pi]$ a $M_R = \max\limits_{\langle \Gamma_R \rangle} |f|$

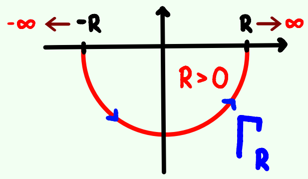
Dále nechť platí

- BUĎ $\alpha = 0$ a $RM_R \to 0$ pro $R \to +\infty$
- NEBO $\alpha > 0$ a $M_R \to 0$ pro $R \to +\infty$

Pak Γ_R je horní půlkružnice, $t \in [0, \pi]$ a platí

$$\int_{\Gamma_R} f(z)\,\mathrm{e}^{i\alpha z}\,\mathrm{d}z \to 0 \quad \text{pro } R \to \infty \qquad (🏀)$$

Pokud $\operatorname{Im} z < 0$, (a opět) $|z| > R_0$



Pak volíme $\Gamma_R(t) = R\,\mathrm{e}^{it}$, $t \in [\pi, 2\pi]$

A vyžadujeme, aby platilo

- BUĎ $\alpha = 0$ a $RM_R \to 0$ pro $R \to +\infty$
- NEBO $\alpha < 0$ a $M_R \to 0$ pro $R \to +\infty$

Tedy $$\int_{\Gamma_R} f(z)\,\mathrm{e}^{i\alpha z}\,\mathrm{d}z \to 0 \quad \text{pro } R \to \infty$$

10 Dále aplikujeme residuovou větu

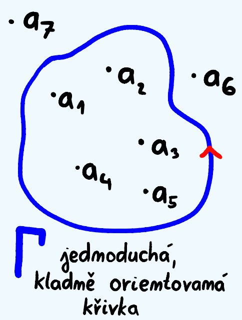
Residuová věta

Residuová věta, konečná varianta

Nechť Γ je kladně orientovaná po částech C^1 křivka, $k \in \mathbb{N}$, $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \operatorname{Int} \Gamma$.

f holomorfní na $\Gamma \subset \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ a spojitá na $\overline{\Gamma} \subset \{a_1, \ldots, a_k\}$

Pak $$\int_{\Gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \operatorname{Res}_{a_j} f \qquad (✠)$$



Početní postup (Definice FT pro L^2) - pokračování II

(11) Při výpočtu kořenů jmenovatele (alias pólů) se nám mohou hodit následující tríčky:

Pozorování: O čísle i se dá uvažovat jako o „rotaci o 90°", úhel cílového čísla $= \frac{\pi}{2}$

Příklad: $z^n = 2i \quad \Leftrightarrow \quad z = \sqrt[n]{2i}$

1) Zjistit úhel cílového čísla, zde $2i \to \varphi = \dfrac{\pi}{2}$

2) Převést do exponenciálního tvaru:

$$\sqrt[n]{|z|}\,\mathrm{e}^{i\frac{\varphi}{n}} = \sqrt[n]{z\cdot\bar{z}}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2n}} = \sqrt[n]{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2n}}$$

3) Hledání kořenů ve tvaru: $\sqrt[n]{|z|}\,\mathrm{e}^{i\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{2\pi k}{n}\right)}$

$$\begin{aligned}
k=0: &\quad z_0 = \sqrt[n]{2}\,\mathrm{e}^{i\left(\frac{\pi}{2n}+0\right)}\\
k=1: &\quad z_1 = \sqrt[n]{2}\,\mathrm{e}^{i\left(\frac{\pi}{2n}+\frac{2\pi}{n}\right)}\\
&\quad \vdots\\
k=n-1: &\quad z_{n-1} = \sqrt[n]{2}\,\mathrm{e}^{i\left(\frac{\pi}{2n}+\frac{2\pi(n-1)}{n}\right)}\\
k=n: &\quad z_n = z_0
\end{aligned}$$

Příklad: $z^n = -1 \quad \Leftrightarrow \quad z = \sqrt[n]{-1}$

1) Zjistit úhel cílového čísla, zde $-1 \to \varphi = \pi$

2) Převést do exponenciálního tvaru:

$$\sqrt[n]{|z|}\,\mathrm{e}^{i\frac{\varphi}{n}} = \sqrt[n]{z\cdot\bar{z}}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{n}} = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{n}}$$

3) Hledání kořenů ve tvaru: $\sqrt[n]{|z|}\,\mathrm{e}^{i\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{2\pi k}{n}\right)}$

$$\begin{aligned}
k=0: &\quad z_0 = \mathrm{e}^{i\left(\frac{\pi}{n}+0\right)}\\
k=1: &\quad z_1 = \mathrm{e}^{i\left(\frac{\pi}{n}+\frac{2\pi}{n}\right)}\\
&\quad \vdots\\
k=n-1: &\quad z_{n-1} = \mathrm{e}^{i\left(\frac{\pi}{n}+\frac{2\pi(n-1)}{n}\right)}\\
k=n: &\quad z_n = z_0
\end{aligned}$$

(12) V závislosti na počtu pólů v Int φ volíme následující početní postup k výpočtu Residua:

Vzorečky: Pravidla pro výpočet residuí (v bodě a) (Pravidla)

$\boxed{0}$ $\mathrm{Res}_a f = c_{-1}$ (← koeficient Laurentovy řady)

$\boxed{1}$ f má v a odstranitelnou singularitu $\Rightarrow$ $\mathrm{Res}_a f = 0$

$\boxed{2}$ f má v a pól násobnosti (nejvýše) $n \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow$ $\mathrm{Res}_a f = \lim\limits_{z\to a} \dfrac{1}{(n-1)!}\left(f(z)(z-a)^n\right)^{(n-1)}$

$\boxed{3}$ *speciálně*: f má v a pól násobnosti 1 $\Rightarrow$ $\mathrm{Res}_a f = \lim\limits_{z\to a} f(z)(z-a)$

$\boxed{4}$ *speciálně*: f a g jsou holomorfní na okolí a, $g(a)=0$; $g'(a)\neq 0$ $\Rightarrow$ $\mathrm{Res}_a\left(\dfrac{f}{g}\right) = \dfrac{f(a)}{g'(a)}$

$\boxed{5}$ *speciálně*: f holomorfní na okolí a, g má v a pól násobnosti 1 $\Rightarrow$ $\mathrm{Res}_a(fg) = f(a)\,\mathrm{Res}_a(g)$

Početní postup (Definice FT pro L^2) - pokračování III

13 Pokud obíháme nulu nebo jiné reálné číslo v rámci p.v.integrálu, může se nám hodit dále:

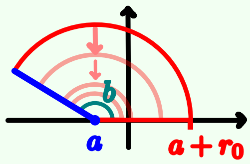
Lemma o obcházení pólu násobnosti 1

Budiž f spojitá na $0 < |z-a| \leq r_0, \quad 0 \leq \arg(z-a) \leq b, \quad \text{kde } b \in (0, 2\pi]$

Nechť $\exists \lim\limits_{z \to a} f(z) \cdot (z-a) = A \in \mathbb{C}$

Potom $\Rightarrow \lim\limits_{r \to 0} \displaystyle\int_{C_r} f(z)\,\mathrm{d}z = iAb,$

kde C_r značí kladně proběhnutý oblouk kružnice $|z-a| = r$ vyťatý úhlem b



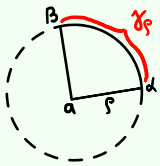
Lemma o obcházení pólů násobnosti 1 (LOOPN1) (pro výpočet residua)

Nechť f má v bodě a pól násobnosti 1. $\quad 0 \leq \alpha \leq \beta \leq 2\pi; \quad 0 < \rho < r;$

$\gamma_\rho = a + \rho\,\mathrm{e}^{it}, \quad t \in [\alpha, \beta]$

Potom :

$$\lim_{\rho \to 0+} \int_{\gamma_\rho} f = (\beta - \alpha) i \cdot \mathrm{Res}_a\, f$$

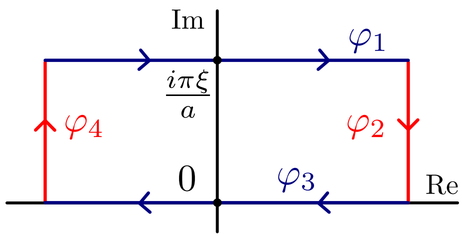


14 Nyní si vyjádříme pro intervaly ξ, kdy platí, že $\alpha > 0$ resp. $\alpha < 0$ resp. $\alpha = 0$ a dostaneme tak chování výsledné transformované funkce $\mathcal{F}(f(x))(\xi)$

Dále můžeme mít ještě jeden speciální případ, kdy můžeme využít **periodicity komplexní exponenciály**, tedy potřebujeme takový tvar integrandu, který vykazuje periodické chování.

Takové případy jsou:

- čistá komplexní exponenciála
- komplexní exponenciála vynásobená hyperbolickými funkcemi
- x/sinh(x)



4 Distribuce

Ekvivalentní značení: $\langle T,\, \varphi \rangle \equiv T(\varphi)$

Definice 1 (Základní distribuce)**.**

- **Regulární distribuce** T_f: (tj. dané „obyčejnou funkcí" f)

$$L^1_{\text{loc}}(\Omega) = \{f \in \Omega \to \mathbb{R}, \forall \text{ kpt. } K \subset \Omega : f \in L^1(K)\}$$

$$\boxed{\text{Pro } \; f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega) \; \text{ def. } \; T_f \in \mathcal{D}'(\Omega) \; := \; \langle T_f, \varphi \rangle = \int_\Omega f \cdot \varphi \, \mathrm{d}x \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)} \tag{dualita}$$

  Kde $T_f \to$ nazýváme *regulární distribuce s hustotou* f, f je *generující funkce distribuce* T_f

  Poznámka: $T_f = T_g \quad \Leftrightarrow \quad f = g$ skoro všude v Ω

- **Diracova distribuce** δ_x: Pro $x \in \mathbb{R}^n$ def. $\langle \delta_x,\, \varphi \rangle = \varphi(x) \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

  Poznámka 1: δ_x není regulární distribuce, neodpovídá žádné (generující) funkci

  Poznámka 2: Často značíme $\delta \equiv \delta_0$

- **Distribuce ve smyslu hlavní hodnoty** $T_{\text{p.v.}\frac{1}{x}}$:

$$\text{Pro } x \in \mathbb{R} \quad \text{def.} \quad T_{\text{p.v.}\frac{1}{x}} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \; := \; \left\langle T_{\text{p.v.}\frac{1}{x}},\, \varphi \right\rangle \; = \; \text{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} \, \mathrm{d}x \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

Vzorečky: Základní operace s distribucemi

Posunutí τ_b o $b \in \mathbb{R}^n$, (kde $\Omega = \mathbb{R}^n$):

- $\langle \tau_b T, \varphi \rangle = \langle T, \tau_{-b}\, \varphi \rangle \quad \equiv \quad [\tau_{-b}\, \varphi]\,(x) = \varphi(x-b)$

Škálování S_λ koeficientem $\lambda > 0$, (kde $\Omega = \mathbb{R}^n$):

- $\left\langle S_\lambda T, \varphi \right\rangle = \left\langle T, \frac{1}{\lambda^n} S_{\frac{1}{\lambda}}\, \varphi \right\rangle \quad \equiv \quad \left[S_{\frac{1}{\lambda}}\, \varphi\right](x) = \varphi\left(\frac{x}{\lambda}\right)$

Součin distribuce s hladkou funkcí:

- $T \in \mathcal{D}'(\Omega),\ \ a \in C^\infty(\Omega),\quad$ pak $\ aT \in \mathcal{D}'(\Omega) \quad \longrightarrow \quad aT(\varphi) = T(a\varphi) \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

  Příklad: $\quad x\delta_0 : \quad \langle x\delta_0,\ \varphi\rangle = \langle \delta_0,\ x\varphi\rangle = x\varphi(x)\big|_{x=0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{x\delta_0 \equiv 0}}$

Derivace distribuce:

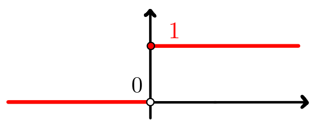
- $T \in \mathcal{D}'(\Omega), \alpha$ multiindex dimense $N, \left(\Omega \subset \mathbb{R}^N\right)$: $\qquad \langle D^\alpha T,\ \varphi\rangle := (-1)^{|\alpha|} \langle T,\ D^\alpha \varphi\rangle \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

  Zobrazení $\quad T \mapsto D^\alpha T$ jest spojité vzhledem k $\ \rightharpoonup^*$

  Příklad: $\quad$ Derivace *Diracovy distribuce*: $\quad \langle D^\alpha \delta,\ \varphi\rangle = \left\langle \delta, (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \varphi \right\rangle = (-1)\,[D^\alpha \varphi]\,(0)$

  $\rightarrow$ speciálně pro $d = 1$, (tedy $\Omega = \mathbb{R}$) : $\qquad \left\langle \delta^{(n)},\ \varphi \right\rangle = (-1)^n \varphi^{(n)}(0)$

  Příklad: $\quad Y(x) = \chi_{[0,\infty)} = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in [0,\infty) \\ 0 & \text{pro } x < 0 \end{cases}$



  $Y \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}) \ldots \exists$ regulární distribuce T_Y

$$\langle T_Y',\ \varphi\rangle = \langle T_Y,\ -\varphi'\rangle = -\int_{\mathbb{R}} Y\varphi'\, \mathrm{d}x \ = -\int \varphi'\, \mathrm{d}x \ = -\,[\varphi]_0^\infty = -\,(0 - \varphi(0)) = \varphi(0) = \delta(\varphi)$$

Definice 2 (Konvoluce distribucí). *(24.3.13)*

Nechť $T, G \in \mathcal{D}'\left(\mathbb{R}^N\right)$ a distribuce $T \otimes G$ připouští prodloužení (spojité vůči slabé* konvergenci distribucí)

$$\langle T(x) \otimes G(y), \varphi(x+y)\rangle := \lim_{k\to\infty} \langle T(x) \otimes G(y), \eta_k(x,y)\varphi(x+y)\rangle \qquad \text{pro všechna } \varphi \in \mathcal{D}\left(\mathbb{R}^N\right),$$

kde $\{\eta_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathcal{D}\left(\mathbb{R}^{2N}\right)$ splňuje $\eta_k \to 1$ v $\mathbb{R}^{2N}$ a navíc je naše limita nezávislá na volbě posloup. $\{\eta_k\}_{k=1}^\infty$.

Pak distribuci $T * G$ (konvoluce distribucí T a G) definujeme předpisem:

$$\langle T * G, \varphi\rangle := \langle T(x) \otimes G(y), \varphi(x+y)\rangle \qquad \text{pro všechna } \varphi \in \mathcal{D}\left(\mathbb{R}^N\right).$$

Věta 1. *O vlastnostech konvoluce distribucí* *(24.3.17)*

Nechť $T, G \in \mathcal{D}'\left(\mathbb{R}^N\right)$ a $\alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^N$.

(i) Jestliže existuje $T * G$, pak existuje i $G * T$ a platí $T * G = G * T$ (tedy konvoluce je **komutativní**).

(ii) Jestliže existuje $T * G$, pak existují i $D^\alpha T * G$ a $T * D^\alpha G$ a platí

$$D^\alpha (T * G) = D^\alpha T * G = T * D^\alpha G.$$

(iii) Konvoluce distribucí však NENÍ **asociativní**, např. platí:

$$(T_1 * D\delta_0) * T_H = T_0 * T_H = T_0 \qquad \text{ale} \qquad T_1 \left(D\delta_0 * T_H\right) = T_1 * \delta_0 = T_1$$

Početní postup

Zadání: Máme zjednodušit zápis distribuce obsahující konvoluci distribucí a derivací Diracových δ distribucí, tak, aby byl výsledek zapsán pomocí lineárních kombinací Diracovy distribuce a její derivace s nosičem ve vhodných bodech.

---

1 Pokud máme v zadání více konvolucí, tak nejprve vyjádříme si každou z nich zvlášť

2 (2. vlastnost konvoluce distribucí) nám říká, že multiindexovou derivaci můžeme prohazovat z jedné konvoluované distribuce na druhou

3 $T * \delta = T$ (kovoluce distribuce T s Diracem dává opět původní distribuci T)

4 Aplikujeme distribuci na testovací funkci $\langle T, \varphi \rangle$, na testovací funkci můžeme přehodit derivace i další prefaktory, kterých se potřebujeme zbavit

5 Pro derivace distribuce platí stejná pravidla jako pro derivaci „derivaci normální fce"

6 $\langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a)$ Aplikace Diraca sedícího v bodě a na testovací funkci vyplivne testovací funkci vyčíslenou v bodě a

7 Rovnost distribucí, na něž aplikujeme testovací funkci, platí i pro distribuce samotné $\langle H, \varphi \rangle = \langle G, \varphi \rangle \quad \Rightarrow \quad H = G$. V závěru si tedy můžeme odpustit testovací funkce a psát rovnou rovnost distribucí.

5 Konvoluční rovnice

Početní postup

Zadání: Nalezněte řešení konvoluční rovnice (tedy nalezněte temperovanou distribuci G)

Řešte nejprve formálně, za předpokladu, že konvoluce existuje a platí příslušné věty o Fourierově transformaci, po získání výsledku vysvětlete, že postup šlo využít; speciálně vysvětlete, že konvoluce má smysl a že její Fourierova transformace má očekávaný tvar, který má smysl v temperovaných distribucích.

1

6 Slabá* konvergence distribucí

Početní postup

Zadání: Mějme

1