Lineární algebra I (pro fyziky)

Direktní součet

Dalibor Šmíd

MFF UK

Připomeňme z první přednášky ortogonální projekci $P_{\mathbf{x}} \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$ do směru nenulového vektoru $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$:

$$P_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = \frac{\mathbf{x}.\mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\|^2}\mathbf{x}$$

Zvolme $B_1 = (r\mathbf{x})$ bázi prostoru $\langle \mathbf{x} \rangle$ a $B_2 = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{n-1})$ nějakou bázi ortogonálního doplňku $\mathbf{x}^\perp$. Pro bázi $\mathbb{R}^n$ ve tvaru $B = (r\mathbf{x}, \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{n-1})$ má reprezentace $P_{\mathbf{x}}$ jednoduchý tvar

$$[P_{\mathbf{x}}]_B^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

Máme tedy dvojici podprostorů $W_1 := \langle \mathbf{x} \rangle$, $W_2 := \mathbf{x}^\perp$ takových, že sjednocením jejich bází B_1, B_2 vznikne báze celého prostoru. Právě taková konfigurace se popisuje pomocí direktního součtu.

Definice

Nechť V je vektorový prostor nad $\mathbb{F}$ a W_1, W_2 jeho dva podprostory. Pak jejich *součtem* $W_1 + W_2$ je množina všech vektorů, které lze zapsat jako součet $w_1 + w_2$, kde $w_i \in W_i$. Pokud navíc $W_1 \cap W_2 = 0$, nazýváme $W_1 + W_2$ *direktní součet podprostorů* a označujeme jej $W_1 \oplus W_2$. Pokud $W_1 \oplus W_2 = V$, pak W_2 je *doplňkem podprostoru* W_1 ve V.

Příklady

- $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \oplus \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$
- $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle + \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \mathbb{R}^3$, ale ne s $\oplus$.
- $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \oplus \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \mathbb{R}^3$.

Tvrzení

Pokud $W_1 \cap W_2 = 0$, pak lze každý prvek $W_1 \oplus W_2$ zapsat jako součet vektoru z $w_1 \in W_1$ a vektoru $w_2 \in W_2$ právě jedním způsobem.

Důkaz.

Stačí ukázat jednoznačnost. Pokud by existovaly $w_1, w_1' \in W_1$, $w_2, w_2' \in W_2$ takové, že $w_1 + w_2 = w_1' + w_2'$, pak $w_1 - w_1' = w_2' - w_2$. Levá strana rovnosti patří do W_1, pravá do W_2, musí tedy být obě nula. $\square$

Platí $W_1 + W_2 = \langle W_1 \cup W_2 \rangle$, tedy součet podprostorů je také podprostor. Můžeme takto snadno definovat součet libovolného množství podprostorů:

Definice

Nechť $\mathcal{W}$ je množina podprostorů prostoru W. Pak definujeme jejich *součet* jako

$$\sum_{W \in \mathcal{W}} W := \left\langle \bigcup_{W \in \mathcal{W}} W \right\rangle$$

Věta (O dimenzi spojení a průniku)
Nechť $W_1, W_2 \leq V$, oba konečné dimenze. Pak

$$\dim W_1 + W_2 = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim W_1 \cap W_2$$

Důkaz.
Nechť $(u_1, \dots, u_p)$ je báze $W_1 \cap W_2$. Doplňme ji na bázi $(u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_q)$ prostoru W_1 a na bázi $(u_1, \dots, u_p, w_1, \dots, w_r)$ prostoru W_2. Zbývá pak ukázat, že $(u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_q, w_1, \dots, w_r)$ je bází $W_1 + W_2$ ♣. $\square$

Pro direktní součet tedy platí $\dim W_1 \oplus W_2 = \dim W_1 + \dim W_2$. Navíc posloupnost (B_1, B_2), kde B_i je báze W_i, je bází $W_1 \oplus W_2$. Chceme definovat direktní součet více než dvou podprostorů tak, aby pro něj platily analogické vlastnosti. Očividný první nápad (všechny průniky nulové) nefunguje ♣. Založíme tedy definici na tvrzení z předchozího snímku.

Definice

Nechť $W_1, \ldots, W_k \leq V$. Pak součet $W = W_1 + \ldots + W_k$ označíme za *direktní*, pokud lze každý vektor $w \in W$ zapsat jako součet $w_1 + \ldots + w_k$, kde $w_i \in W_i$, právě jedním způsobem. Označujeme jej pak

$$W = W_1 \oplus \ldots \oplus W_k \equiv \bigoplus_{i=1}^{k} W_i$$

Věta

Nechť $W_1, \ldots, W_k \leq V$ jsou konečné dimenze. Pak

$$\dim W_1 \oplus \ldots \oplus W_k = \dim W_1 + \ldots + \dim W_k$$

Důkaz.

Nechť B_i je báze W_i, pak ukážeme, že $(B_1, \ldots, B_k)$ je báze $W_1 \oplus \ldots \oplus W_k$ ♣. $\square$

Uvažujme dva vektorové prostory a jejich rozklady na direktní součet $V = V_1 \oplus V_2$ a $W = W_1 \oplus W_2$ a jejich dimenze $n = n_1 + n_2$ a $m = m_1 + m_2$. Pokud B_j je báze V_j, $B = (B_1, B_2)$ báze V, $v = v_1 + v_2$, kde $v_i \in V_i$ a $\mathbf{x}_i := [v_i]^{B_i}$, můžeme reprezentaci vektoru v zapsat *blokovým zápisem*

$$[v]^B \equiv \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} [v_1]^{B_1} \\ [v_2]^{B_2} \end{pmatrix}$$

Aritmetický vektor o n složkách je zde zapsán jako vektor složený ze dvou bloků, jimiž jsou aritmetické vektory o n_1, resp. n_2 složkách.

Označme $\iota_1 : V_1 \to V$ lineární zobrazení *vložení* definované předpisem $\iota_1(v_1) = v_1 \in V$. Jeho reprezentace pak splňuje

$$[\iota_1]^B_{B_1} \mathbf{x}_1 = [\iota_1]^B_{B_1} [v_1]^{B_1} = [v_1]^B = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{o} \end{pmatrix}$$

Tedy $[\iota_1]^B_{B_1} = \left(\begin{array}{c|c|c|c} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \dots & \mathbf{e}_{n_1} \\ \mathbf{o} & \mathbf{o} & & \mathbf{o} \end{array}\right) =: \begin{pmatrix} E_{n_1} \\ 0 \end{pmatrix}$, kde $0 \in \mathbb{F}^{n_2 \times n_1}$.

Podobně lze definovat $\iota_2 : V_2 \to V$. Dále zaveďme lineární zobrazení *projekce* $\pi_i : W \to W_i$ tak, že pro libovolný $w \in W$, $w = w_1 + w_2$, kde $w_i \in W_i$, je $\pi_i(w) = w_i$. Pokud $C = (C_1, C_2)$ je báze W složená z bází W_1, W_2 a $[w_i]^{C_i} =: \mathbf{y}_i$, pak

$$[\pi_1]^{C_1}_{C} \begin{pmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \end{pmatrix} = [\pi_1]^{C_1}_{C} [w]^{C} = [w_1]^{C_1} = \mathbf{y}_1$$

Tedy $[\pi_1]^{C_1}_{C} = (\mathbf{e}_1 | \dots | \mathbf{e}_{m_1} | \mathbf{o} | \dots | \mathbf{o}) =: (E_{m_1}\ 0)$, kde $0 \in \mathbb{F}^{m_1 \times m_2}$.

Uvažujme nyní $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$ s reprezentací $[f]^C_B = A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ a čtyři zobrazení $f_{ij} \in \mathrm{Hom}(V_i, W_j)$, $f_{ij} = \pi_i \circ f \circ \iota_j$. Pro f_{11} máme reprezentaci

$$[f_{11}]^{C_1}_{B_1} = [\pi_1]^{C_1}_{C} [f]^{C}_{B} [\iota_1]^{B}_{B_1} = \begin{pmatrix} E_{m_1} & 0 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} E_{n_1} \\ 0 \end{pmatrix} =: A_{11} \in \mathbb{F}^{m_1 \times n_1},$$

kde A_{11} je matice vzniklá vyškrtnutím posledních n_2 sloupců a posledních m_2 řádků z matice A.

Analogicky lze zavést matice

$$[f_{12}]^{C_1}_{B_2} = [\pi_1]^{C_1}_{C}[f]^{C}_{B}[\iota_2]^{B}_{B_2} = \begin{pmatrix} E_{m_1} & 0 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 0 \\ E_{n_2} \end{pmatrix} =: A_{12} \in \mathbb{F}^{m_1 \times n_2}$$

$$[f_{21}]^{C_2}_{B_1} = [\pi_2]^{C_2}_{C}[f]^{C}_{B}[\iota_1]^{B}_{B_1} = \begin{pmatrix} 0 & E_{m_2} \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} E_{n_1} \\ 0 \end{pmatrix} =: A_{21} \in \mathbb{F}^{m_2 \times n_1}$$

$$[f_{22}]^{C_2}_{B_2} = [\pi_2]^{C_2}_{C}[f]^{C}_{B}[\iota_2]^{B}_{B_2} = \begin{pmatrix} 0 & E_{m_2} \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 0 \\ E_{n_2} \end{pmatrix} =: A_{22} \in \mathbb{F}^{m_2 \times n_2}$$

Ty dávají dohromady *blokový zápis matice* $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$.

Tvrzení

Nechť $n = n_1 + n_2,\ m = m_1 + m_2,\ p = p_1 + p_2,\ A \in \mathbb{F}^{m \times n},$ $B \in \mathbb{F}^{n \times p}$ *s bloky* $A_{ij} \in \mathbb{F}^{m_i \times n_j},\ B_{ij} \in \mathbb{F}^{n_i \times p_j}$. *Pak součin* $C := AB$ *má blokový zápis*

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{pmatrix}$$

Důkaz lze provést rozepsáním

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^{n_1} a_{ik} b_{kj} + \sum_{k=n_1+1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

a interpretací obou sum jako elementů součinu nějakých bloků matic A, B. Nebo si můžeme rozmyslet, že pro $q, r \in \{1, 2\}$

$$\pi_q \circ f \circ g \circ \iota'_r = (\pi_q \circ f \circ \iota_1) \circ (\pi'_1 \circ g \circ \iota'_r) + (\pi_q \circ f \circ \iota_2) \circ (\pi'_2 \circ g \circ \iota'_r),$$

kde $g \in \mathrm{Hom}(U, V)$, $U = U_1 \oplus U_2$, ι'_i je vložení U_i do U a π'_i je projekce V na V_i.
Protože direktní sčítanec v rozkladu $V = V_1 \oplus V_2$ může být sám direktním součtem nějakých svých podprostorů, mohou mít i jednotlivé bloky matice samy blokovou strukturu. Tvrzení se pak snadno zobecní pro matice s libovolným blokovým členěním, pouze musí pro každý vyskytující se součin bloků $A_{ik}B_{kj}$ mít blok A_{ik} stejně sloupců, jako má blok B_{kj} řádků.

Pro $f \in \mathrm{End}(V)$, $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_k$ s bází $B = (B_1, \ldots, B_k)$, kde B_i je báze V_i, jsou diagonální bloky $[f]_B^B$ čtvercové matice $[f_{ii}]_{B_i}^{B_i}$, a pokud jsou zároveň mimodiagonální bloky nulové, mluvíme o *blokově diagonální matici*, jsou-li nulové jen na jedné straně diagonály, o *blokově horní/dolní trojúhelníkové matici*.

Tvrzení

Nechť $A = \mathrm{diag}(A_{11}, A_{22}, \ldots, A_{kk})$ je blokově diagonální matice. Pak

1. $\forall p \in \mathbb{N} : A^p = \mathrm{diag}(A_{11}^p, \ldots, A_{kk}^p)$ *a jsou-li všechny A_{ii} regulární, pak i $A^{-p} = \mathrm{diag}(A_{11}^{-p}, \ldots, A_{kk}^{-p})$*
2. $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(A_{11}) + \mathrm{rank}(A_{22}) + \ldots + \mathrm{rank}(A_{kk})$
3. $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(A_{11}) + \mathrm{Tr}(A_{22}) + \ldots + \mathrm{Tr}(A_{kk})$
4. $\det(A) = \det(A_{11}) \det(A_{22}) \ldots \det(A_{kk})$
5. $\sigma(A) = \sigma(A_{11}) \cup \ldots \cup \sigma(A_{kk})$

Navíc části 3,4 a 5 platí i pro horní/dolní trojúhelníkovou matici s týmiž diagonálními bloky.

Důkaz.

Stačí uvažovat $k = 2$ a $A = \mathrm{diag}(A', A'')$, kde $A' \in \mathbb{F}^{p\times p}$, $A'' \in \mathbb{F}^{q\times q}$, $p + q = n$. Body 1 a 3 jsou jasné, v bodě 4 lze v definici determinantu uvažovat pouze permutace $\pi \in S_n$, pro něž $\pi(i) \le p$ pro všechna $i \in \{1, \dots, p\}$. Rozložme π na nezávislé cykly, pak $\pi = \pi'\pi''$, kde π' je složení cyklů na množině $\{1, \dots, p\}$ a π'' složení cyklů na množině $\{p + 1, \dots, n\}$. Označme $\rho' \in S_p$ permutaci, která vznikne zúžením π' na množinu $\{1, \dots, p\}$ a $\rho'' \in S_q$ permutaci definovanou $\rho''(i) = \pi''(i) - p$. Pak je $\det(A) = \sum_{\pi\in S_n} \mathrm{sgn}\,\pi a_{1\pi(1)} \dots a_{n\pi(n)}$

$$= \sum_{\rho'\in S_p} \sum_{\rho''\in S_q} \mathrm{sgn}(\pi'\pi'')a_{1\rho'(1)} \dots a_{p\rho'(p)}a_{p+1,p+\rho''(1)} \dots a_{p+q,p+\rho''(q)}$$

$$= \sum_{\rho'\in S_p} \mathrm{sgn}(\rho')a'_{1\rho'(1)} \dots a'_{p\rho'(p)} \sum_{\rho''\in S_q} \mathrm{sgn}(\rho'')a''_{1\rho''(1)} \dots a''_{q\rho''(q)}$$

Z bodu 4 plyne 5 ♣. Bod 2 plyne pomocí EŘÚ na A', A'' ♣. Zobecnění 3,4,5 na horní/dolní trojúhelníkové matice ♣. $\square$

Příklad

Nechť $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\|\mathbf{x}\| = 1$, $P_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = (\mathbf{x}.\mathbf{y})\mathbf{x}$ a $B = (B_1, B_2)$ je báze složená z bází $\langle \mathbf{x} \rangle$ a $\mathbf{x}^\perp$. Označme 0_{n-1} nulovou matici z $\mathbb{F}^{n-1 \times n-1}$ a $\mathbf{o}_{n-1}$ nulový vektor z $\mathbb{F}^{n-1}$. Pak

$$[P_{\mathbf{x}}]_B^B = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{o}_{n-1}^T \\ \mathbf{o}_{n-1} & 0_{n-1} \end{pmatrix}, \quad [P_{\mathbf{x}^\perp}]_B^B = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{o}_{n-1}^T \\ \mathbf{o}_{n-1} & E_{n-1} \end{pmatrix}$$

a matice zrcadlení $Z_{\mathbf{x}^\perp} = \mathrm{Id} - 2P_{\mathbf{x}}$ má blokový tvar

$$[Z_{\mathbf{x}^\perp}]_B^B = \begin{pmatrix} -1 & \mathbf{o}_{n-1}^T \\ \mathbf{o}_{n-1} & E_{n-1} \end{pmatrix}$$

Pokud $n = 3$ a B_2 je ortonormální báze $\mathbf{x}^\perp$, pak matice rotace okolo osy $\langle \mathbf{x} \rangle$ o úhel ϕ vzhledem k bázi B je

$$[R_{\mathbf{x},\phi}]_B^B = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{o}_2^T \\ \mathbf{o}_2 & [R_\phi]_{B_2}^{B_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$

Příklad

Uvažujme blokově horní trojúhelníkovou matici $D := \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$, kde $A \in \mathbb{F}^{p\times p}$, $C \in \mathbb{F}^{q\times q}$ jsou regulární. Pak je i D regulární ♣ a protože

$$\begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BC^{-1} \\ 0 & C^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{-1}A & A^{-1}B - A^{-1}B \\ 0 & C^{-1}C \end{pmatrix},$$

je první matice rovna D^{-1}. Srovnejte s výpočtem inverzní matice k 2×2 matici s elementy a, b, c z $\mathbb{F}$, $a, c \neq 0$:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ac} \begin{pmatrix} c & -b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{b}{ac} \\ 0 & \frac{1}{c} \end{pmatrix}$$

Mezi tvary blokového a neblokového inverzu je zřejmá analogie, až na to, že matice A^{-1}, B, C^{-1} na rozdíl od prvků a^{-1}, b, c^{-1} nekomutují a nemusí jít ani v jiném pořadí vynásobit.

Jako ilustraci použití blokových matic v důkazech uveďme

Tvrzení

Nechť $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$. Pak $\sigma(AB) = \sigma(BA)$ včetně násobností.

Důkaz.

Výpočtem ověříme, že

$$\begin{pmatrix} E_n & -A \\ 0_n & E_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} AB & 0_n \\ B & 0_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_n & A \\ 0_n & E_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_n & 0_n \\ B & BA \end{pmatrix}$$

Levá strana má tvar RCR^{-1}, tedy matice C a matice C' na pravé straně jsou podobné a mají stejná vlastní čísla včetně násobností. Protože C i C' jsou obě blokově dolní trojúhelníkové, platí pro ně $\sigma(C) = \sigma(AB) \cup \sigma(0_n)$, $\sigma(C') = \sigma(BA) \cup \sigma(0_n)$ včetně násobností. $\square$

Tvrzení i důkaz se snadno zobecní na obdélníkové matice $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{C}^{n\times m}$, pouze se bude u AB a BA lišit algebraická násobnost vlastního čísla nula.