Zkoušková písemka z Matematické analýzy 1, ZS 2021-22

Písemka číslo 5, verze 2022

(1)(14 bodů) Spočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+2} - \sqrt[3]{n^3+1}}{\operatorname{arccotg}(7n)}.$$

(2)(14 bodů) (a) Uvažujte funkci definovanou jako

$$f(x) = \arccos\left(\frac{2}{3}(\cos x + |\sin x|)\right) .$$

Nalezněte průnik jejího definičního oboru s intervalem $[0, 2\pi]$.

(b) Spočtěte jednostranné derivace a derivace funkce f ve všech bodech množiny $D(f) \cap [0, 2\pi]$.

(3)(20 bodů) Uvažujme reálnou funkci f danou jako

$$f(x) = \log(9 + x^2) - \operatorname{arctg}(\frac{3}{x}) .$$

(a) Nalezněte definiční obor f.
(b) Nalezněte jednostranné limity v krajních bodech $D(f)$.
(c) Nalezněte (i jednostranné) derivace funkce f v každém bodě $D(f)$.
(d) Nalezněte druhou derivaci v každém bodě, kde existuje.
(e) Určete intervaly monotonie, lokální a globální extrémy a $H(f)$.
(f) Určete inflexní body funkce f a intervaly konvexity a konkávity.
(g) Nalezněte asymptoty funkce f v bodě $-\infty$ a ∞.
(h) Načrtněte graf funkce f.

(4)(12 bodů) Nechť $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je funkce. Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení.
(a) Pokud existuje limita $\lim_{x\to\infty} f(x)$, pak existuje $\lim_{n\to\infty} f(n)$.
(b) Pokud existuje limita $\lim_{n\to\infty} f(n)$, pak existuje $\lim_{x\to\infty} f(x)$.
(c) Pokud f je spojitá na $\mathbb{R}$ a existuje $\lim_{n\to\infty} f(n)$, pak existuje $\lim_{x\to\infty} f(x)$.

1. $\lim \dfrac{\sqrt{n^2+2} - \sqrt[3]{n^3+1}}{\operatorname{arccotg} 7n}$

- $a_n = \sqrt{n^2+2}$, $b_n = \sqrt[3]{n^3+1}$ $\Rightarrow \sqrt{n^2+2} - \sqrt[3]{n^3+1} = a_n - b_n = \dfrac{a_n^6 - b_n^6}{\sum_{k=0}^{5} a_n^{5-k} b_n^k} = \dfrac{(n^2+2)^3 - (n^3+1)^2}{-\,||\,-} =$

$\text{st } P(n) \le 3$

$= \dfrac{n^6 + 3n^4\cdot 2 + 3n^2\cdot 4 + 8 - (n^6 + 2n^3 + 1)}{-\,||\,-} = \dfrac{6n^4 + P(n)}{-\,||\,-}$

- $\sum_{k=0}^{5} a_n^{5-k} b_n^k = \sum_{k=0}^{5} n^{5-k}\left(\sqrt{1+\frac{2}{n^2}}\right)^{5-k} n^k \left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^3}}\right)^k = n^5 \underbrace{\sum_{k=0}^{5}\left(1+\frac{2}{n^2}\right)^{\frac{5-k}{2}}\left(1+\frac{1}{n^3}\right)^{\frac{k}{3}}}_{c_n}$

- $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\operatorname{arccotg} x}{1/x} \overset{0/0}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{-1}{1+x^2}}{-1/x^2} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{1+x^2} = 1$

- $\dfrac{\sqrt{n^2+2} - \sqrt[3]{n^3+1}}{\operatorname{arccotg} 7n} = \dfrac{6n^4 + P(n)}{n^5 c_n} \cdot \dfrac{1}{\frac{\operatorname{arccotg} 7n}{\frac{1}{7n}} \cdot \frac{1}{7n}} =$

$= 7 \cdot \dfrac{6n^5 + n P(n)}{n^5} \cdot \dfrac{1}{c_n} \cdot \dfrac{1}{\frac{\operatorname{arccotg} 7n}{1/7n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 7 \cdot 6 \cdot \dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{1}{1} = 7$

použito:
- spojitost mocniny (u c_n)
- Heine (u arccotg)
- Aritmetika limit

Bodování:

čitatel: $\sqrt{\ } - \sqrt[3]{\ }$ +4

$\sum a_n^{5-k} b_n^k$ +3

jmenovatel: · $\dfrac{\operatorname{arccotg} x}{1/x} \xrightarrow[x\to\infty]{} 1$ +3

· Heine +1

dopočet: +3

2. $f(x) = \arccos\left(\frac{2}{3}\underbrace{(\cos x + |\sin x|)}_{g(x)}\right)$

$$g(x) = \begin{cases} \cos x + \sin x & , x \in [0, \pi] \\ \cos x - \sin x & , x \in [\pi, 2\pi] \end{cases} \qquad g'(x) = \begin{cases} -\sin x + \cos x & , x \in (0, \pi) \\ -\sin x - \cos x & , x \in (\pi, 2\pi) \end{cases}$$

g může nabývat extrému v bodech: $0, \pi, 2\pi, \frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$

g má hodnoty postupně: $1, -1, 1, \sqrt{2}, \sqrt{2}$

Jelikož $\frac{2}{3}\sqrt{2} < 1$, je $-1 < \frac{2}{3}(\cos x + |\sin x|) < 1$, $x \in \mathbb{R}$.

Tedy $D(f) = \mathbb{R}$, f spojitá na $\mathbb{R}$.

Dále $f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1 - \frac{4}{9}g^2(x)}} \left(\frac{2}{3}\right) g'(x)$, $x \in (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$

$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0_+} f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1 - \frac{4}{9} \cdot 1}} \cdot (1) \frac{2}{3}$$

$$f'_-(\pi) = \lim_{x \to \pi_-} f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1 - \frac{4}{9} \cdot 1}} \cdot (-1) \frac{2}{3}$$

$$f'_+(\pi) = \lim_{x \to \pi_+} f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1 - \frac{4}{9} \cdot 1}} \cdot (+1) \cdot \frac{2}{3}$$

$$f'_-(2\pi) = \lim_{x \to 2\pi_-} f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1 - 4/9}} \cdot (-1) \cdot \frac{2}{3}$$

<u>Bodování:</u>

- $D(f)$ $+7$
- f' na $(0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$ $+3$
- f' v $0, \pi, 2\pi$ $+4$

3. $f(x) = \cancel{\arccos}\ \log(9+x^2) - \operatorname{arctg}\left(\frac{3}{x}\right)$

· $D(f) = \mathbb{R}\setminus\{0\}$, f spojitá na $D(f)$

· limity v krajních bodech: $-\infty$: ∞

0_-: $\log 9 + \frac{\pi}{2}$

0_+: $\log 9 - \frac{\pi}{2}$

∞: ∞

· $f'(x) = \frac{2x}{9+x^2} - \frac{1}{1+\left(\frac{3}{x}\right)^2}\frac{(-3)}{x^2} = \frac{2x}{9+x^2} + \frac{3}{9+x^2} = \frac{2x+3}{9+x^2}$, $x \neq 0$

· klesá roste roste

$-$ $+$ $+$

$-\frac{3}{2}$ 0

$f\left(-\frac{3}{2}\right) = \log\left(9+\frac{9}{4}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{3}{-\frac{3}{2}}\right) =$

$= \log\left(9+\frac{9}{4}\right) + \operatorname{arctg} 2$

$\lim_{x\to 0_+} f(x) = \log 9 - \frac{\pi}{2} < f\left(-\frac{3}{2}\right)$.

Tedy v $-\frac{3}{2}$ je lokální minimum, $f((-\infty,0)) = \left[f\left(-\frac{3}{2}\right), \infty\right)$

$f((0,\infty)) = \left(\log 9 - \frac{\pi}{2}, \infty\right)$

Tedy $H(f) = \left(\log 9 - \frac{\pi}{2}, \infty\right)$

· $f''(x) = \frac{1}{(9+x^2)^2}\left(2(9+x^2) - (2x+3)2x\right) = \frac{2}{(9+x^2)^2}\left(\underbrace{9+x^2-2x^2-3x}_{-x^2-3x+9}\right) =$

$= \frac{-2}{(9+x^2)^2}(x^2+3x-9)$ $\quad x_{1,2} = \frac{-3\pm\sqrt{9-4(1)(-9)}}{2} = \frac{-3\pm 3\sqrt{5}}{2}$

$x \neq 0$

$-$ $+$ $+$ $-$

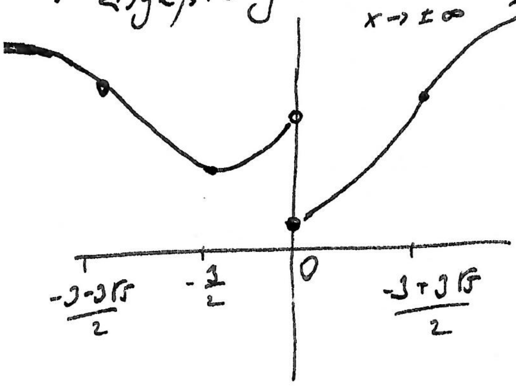
$\frac{-3-3\sqrt{5}}{2}$ 0 $\frac{-3+3\sqrt{5}}{2}$

tedy f konvexní na $\left[\frac{-3-3\sqrt{5}}{2}, 0\right)$, $\left(0, \frac{-3+3\sqrt{5}}{2}\right]$

konkávní na $\left(-\infty, \frac{-3-3\sqrt{5}}{2}\right]$, $\left[\frac{-3+3\sqrt{5}}{2}, \infty\right)$

inflexní body v $\frac{-3\pm 3\sqrt{5}}{2}$

· asymptoty: $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, $\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - 0\cdot x) = \infty$, tedy neexistují



Bodování:

	$D(f)$	+1
	limity	+2
	f'	+2
	f''	+3
	monotonie, extrémy, $H(f)$	+3
	inflexe, konv.	+3
	asympt.	+2
	graf	+4

4. a) Platí dle Heineovy věty

b) Ať $f(x) = \sin(\pi x)$, pak $f(n) = \sin(\pi n) = 0 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, ale

pro $x_n = \frac{1}{2} + 2n$ platí $f(x_n) = \sin(\frac{\pi}{2} + 2\pi n) = 1$. Tedy

f nemá limitu v ∞. Tedy tvrzení neplatí.

c) Tvrzení neplatí dle příkladu v b).

Hodnocení: a) +4
b) +4
c) +4