

Písemná zkouška z G2

6.6.2023

Početní část

1. Ukažte, že množina

$$S = \{(x, y, z) : x^2 = 9(y^2 + z^2), -3 \leq x \leq 6\}$$

je zobecněná 2-plocha, a spočtěte

$$\int_S \sqrt{y^2 + z^2} dS.$$

2. Uvažujte výseč toru

$$T := \left\{ (x, y, z) : \left(\sqrt{x^2 + y^2} - R \right)^2 + z^2 \leq r^2, x > 0, y > 0, z \geq 0 \right\}$$

($R > r > 0$ jsou pevné parametry). Odůvodněte, že T je těleso se skoro hladkou hranicí, a spočtěte

$$\int_{\partial T} (xy^2 dy \wedge dz + yz^2 dz \wedge dx + zx^2 dx \wedge dy).$$

3. Plocha S je dána jako graf funkce $z = xy$ a je orientovaná normálou s kladnou z -ovou souřadnicí.
- (a) Spočtěte první s druhou fundamentální formu a normálu plochy.
 - (b) Najděte hlavní směry a hlavní křivosti plochy v počátku souřadnic.
 - (c) Rozhodněte, zda osy x a y jsou hlavní křivky, asymptotické křivky či geodetiky na ploše S .
 - (d) Rozhodněte, zda křivka v průniku plochy s rovinou $z = 1$ je geodetika.

Časový limit: 90 minut

Teoretická část

1. Definujte orientaci k -plochy v $\mathbb{R}^n$ a okomentujte existenci orientace plochy.
2. Definujte diferenciál zobrazení na ploše a ukažte korektnost definice (nezávislost na mapě).
3. Definujte parametrizované geodetiky na ploše a odvoďte jejich diferenciální rovnice.
4. Rozhodněte, zda následující multivektory v $\mathbb{R}^4$ jsou jednoduché:

$$e_1 + e_2, \quad e_1 \wedge e_3 - e_4 \wedge e_2, \quad e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 + e_2 \wedge e_3 \wedge e_4.$$

60 minut

Bodování: maxima 5/7/10/8 bodů, požadováno minimálně 15 bodů celkem.