

Jméno:

1	2	3	4	Σ

Zkouška z Kombinatoriky a grafů I — písemná část, 5. 2. 2025

Čas: 90 minut

- *Nezapomeňte podepsat všechny papíry, které chcete odevzdat.*
- *Můžete psát i na papír se zadáním. Papír se zadáním je nutno podepsat a odevzdat, i když jste na něj nic nenapsali.*
- *Během písemné části zkoušky nemůžete odcházet ze zkouškové místnosti. Můžete ovšem písemnou část ukončit před časovým limitem.*
- *Nejsou povoleny kalkulačky, hodinky či jiná elektronika, ani přinesené písemné materiály.*
- *Všechny odpovědi je nutno zdůvodnit, pokud není řečeno jinak.*
- *Číselné výsledky (např. typu $\binom{126}{18} \cdot 23! - 17^6$) není nutno dále upravovat a dopočítávat.*
- *Tvrzení z přednášky můžete používat bez důkazů, pokud není uvedeno jinak, nicméně je nutné uvést, které tvrzení používáte.*

-
1. Napište, jak je definováno zobecněné kombinační číslo $\binom{r}{k}$ pro $r \in \mathbb{R}$ a $k \in \mathbb{N}_0$. Zformulujte zobecněnou binomickou větu (nemusíte ji dokazovat). Necht' $(a_n)_{n=0}^\infty$ je posloupnost, která má vytvářející funkci $f(x) = \sqrt{1+3x}$. Pro které indexy $n \in \mathbb{N}_0$ je a_n kladné? [5 bodů]
 2. Definujte pojmy 'vrcholové pokrytí' a 'párování' v grafu G . Zformulujte a dokažte Kőnigovu–Egerváryho větu týkající se těchto pojmů. [10 bodů]
 3. Zformulujte a dokažte Ramseyovu větu ve verzi, která mluví o klikách a nezávislých množinách v konečných grafech. [10 bodů]
 4. V této úloze uvažujeme pouze kódy nad tělesem $\mathbb{Z}_2$. Napište definice pojmů 'generující matice' a 'kontrolní matice' lineárního kódu. Necht' C je lineární kód, jehož generující matice vypadá následovně:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Jaké rozměry bude mít kontrolní matice kódu C ? Jak bude ta kontrolní matice vypadat? Kolik slov obsahuje kód C ? [5 bodů]