Jméno:

1	2	3	4	$\sum$

Zkoušková písemka z Matematické analýzy I
29. 6. 2026

Čas: 90 minut.

- *Nezapomeňte podepsat všechny papíry, které chcete odevzdat. Nemusíte odevzdávat papíry s pomocnými výpočty.*
- *Můžete psát i na papír se zadáním. Papír se zadáním je nutno podepsat a odevzdat, i když jste na něj nic nenapsali.*
- *Během písemné části zkoušky nemůžete odcházet ze zkouškové místnosti. Můžete ovšem písemnou část ukončit před časovým limitem.*
- *Nejsou povoleny kalkulačky, hodinky či jiná elektronika, ani přinesené písemné materiály.*
- *Své odpovědi musíte zdůvodnit.*
- *Tvrzení z přednášky můžete používat bez důkazů, pokud není uvedeno jinak, je však nutno uvést, které tvrzení používáte.*

1. Uvažujme funkci $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovanou vzorcem $f(x) = |x^2 - 1|(x + 1)$.
   (a) [3 b.] V kterých bodech $\mathbb{R}$ má tato funkce vlastní derivaci?
   (b) [3 b.] Najděte všechny body, v nichž tato funkce nabývá lokální či globální extrémy, a určete, o jaký typ extrému se jedná (zda jen lokální nebo i globální, zda minimum nebo maximum).
   (c) [4 b.] Najděte co největší otevřený interval I obsahující nulu, na němž je tato funkce konvexní nebo konkávní, a uveďte, zda je f na I konvexní, nebo zda je tam konkávní.

2. (a) [3 b.] Uvažujme nekonečnou řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, kde (a_n) je posloupnost reálných čísel. Napište, jak je definována *posloupnost částečných součtů* řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a jak je definován *součet* řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
   (b) [4 b.] Nechť $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost nezáporných reálných čísel. Uvažujme následující dvě vlastnosti:
   (I) Řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je konvergentní.
   (II) Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}$ je konvergentní.
   Plyne z vlastnosti (I) vlastnost (II)? Plyne z vlastnosti (II) vlastnost (I)?
   (c) [3 b.] Rozhodněte, zda je řada $\sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{1}{2^n}\right)$ konvergentní.

3. (a) [3 b.] Napište, jak je definován *Taylorův polynom řádu n funkce f v bodě A.*
   (b) [3 b.] Zformulujte větu, která charakterizuje Taylorův polynom pomocí limity. Nemusíte tu větu dokazovat.
   (c) [4 b.] Najděte přirozené číslo $k \in \mathbb{N}$ takové, aby následující limita byla vlastní a nenulová:
   $$\lim_{x \to 0} \frac{(\sin(x) - x) \cdot \exp(x) \cdot (\exp(x) - 1)}{x^k}.$$
   Jaká je pro toto k hodnota té limity?

4. (a) [3 b.] Uveďte příklad funkce $f\colon [-1, 1] \to \mathbb{R}$, která je riemannovsky integrovatelná na intervalu $[-1, 1]$, ale není newtonovsky integrovatelná na intervalu $(-1, 1)$. Nezapomeňte zdůvodnit, proč má váš příklad hledané vlastnosti.
   (b) [3 b.] Napište vzorec pro výpočet délky křivky zadané pomocí parametrizace $\phi\colon I \to \mathbb{R}^d$, kde $I = [A, B]$ je kompaktní interval.
   (c) [4 b.] Mějme funkci $\phi\colon [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ danou předpisem $\phi(t) = (\exp(t)\sin(t), \exp(t)\cos(t))$. Spočítejte délku křivky s parametrizací ϕ. Smíte zde bez důkazu využít rovnost $\sin^2(t) + \cos^2(t) = 1$, platnou pro všechna $t \in \mathbb{R}$.