

Name:

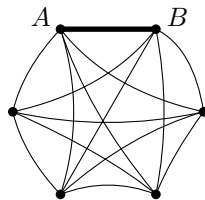
1	2	3	4	Σ

Zkouška: Kombinatorika a Grafy I

- 4 úlohy, 90 minut, max 30 bodů.
- Podepište se. Pište jen z jedné strany papírů (2 extra papíry na konci, kdyžtak si řekněte o další).
- Absolutně žádná elektronika nikde poblíž (mobily, kalkulačky, hodinky, ...). Jen vy, psací potřeby a lahev s pitím.
- Odpovědi zdůvodňujte (pokud není řečeno jinak).
- Číselné výsledky tvaru $\binom{126}{18} \cdot 23! - 17^6$ apod. není potřeba dále zjednodušovat.
- Tvzení z přednášky lze používat bez důkazu (pokud není řečeno jinak), pokud je správně zformulujete.

-
1. Posloupnost $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ je zadána rekurentním předpisem $a_0 = a_1 = 2$ a $a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}$ pro $n \geq 2$.
- (a) Vyjádřete vytvořující funkci $F(x)$ posloupnosti $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ v uzavřeném tvaru (bez tří teček).
- (b) Spočítejte $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$. (Tip: Můžete bez důkazu využít, že n -tý člen posloupnosti a_n lze vyjádřit explicitně jako $a_n = c_1 \cdot \alpha^n + c_2 \cdot \beta^n$, kde c_1, c_2, α, β jsou vhodná reálná čísla.) [7 points]

2. (a) Zformulujte Cayleho větu o počtu koster.
- (b) Královské aerolinie provozují 15 obousměrných linek mezi 6 městy jako na obrázku. Král chce v rámci úspor zrušit některých 10 linek tak, aby se (s přestupy) stále dalo dostat z každého města do každého. Ale přímou linku mezi Arahou a Bstravou určitě rušit nechce. Kolik má král možností, jak vybrat 10 linek, které zruší? [7 points]



3. (a) Definujte hranovou souvislost $k_e(G)$ souvislého grafu G .
- (b) Řekneme, že souvislý graf G na $n \geq 3$ vrcholech je *nenapravitelný* (NPR), pokud platí $k_e(G) = 1$ a přidáním libovolné jedné hrany do G vznikne graf H , pro který stále platí $k_e(H) = 1$.
- i. Najděte nějaký nenapravitelný graf.
 - ii. Může nenapravitelný graf obsahovat právě jeden most? Pečlivě zdůvodněte. [7 points]

4. (a) Zformulujte Ramseyovu větu pro k -tice obarvené t barvami.
- (b) Dokažte, že existuje celé číslo $n \geq 10$ s následující vlastností: Ať už do roviny jakkoliv rozmístíme n různých bodů, bude možné z těchto n bodů vybrat některých 10 tak, že buď bude všech 10 vybraných bodů ležet na jedné přímce, nebo budou každé tři z 10 vybraných bodů tvořit tupouhelný trojúhelník. [9 points]

Extra page 1/2 if you need it.

Extra page 2/2 if you need it.
