

I. MECHANIKA

5. Otáčení tuhého tělesa I



Obsah

- otáčení tuhého tělesa kolem pevné osy
- moment setrvačnosti vůči ose
- zákon zachování momentu hybnosti pro otáčení kolem osy
- Steinerova věta
- kinetická energie rotujícího tělesa
- těžká kladka
- valení po nakloněné rovině
- fyzické kyvadlo
- matematické kyvadlo
- redukovaná délka kyvadla
- reverzní kyvadlo

Otáčení kolem pevné osy

- těleso rotuje kolem osy pevně ukotvené vzhledem k i.s.s.
- 1 stupeň volnosti – stálý směr vektorů $\vec{\varphi} = \vec{\varphi}(t)$ resp. $\vec{\omega} = \vec{\omega}(t)$

- platí 2. impulsová věta

$$\frac{d}{dt} \vec{B} = \vec{M}^E$$

- moment vnější síly lze rozložit na složku $\vec{M}^{E\parallel}$ rovnoběžnou s osou rotace a složku

$\vec{M}^{E\perp}$ kolmou k ose:

$$\vec{M}^E = \vec{M}^{E\parallel} + \vec{M}^{E\perp}$$

- působením momentu $\vec{M}^{E\perp}$ by se měnil směr osy
- $\vec{M}^{E\perp}$ je kompenzován ukotvením osy (vazbová síla)

Moment hybnosti rotujícího hm. bodu

- moment hybnosti \vec{b}_k každého h.b. lze podobně rozložit na složku \vec{b}_k^{\parallel} rovnoběžnou s osou rotace a složku \vec{b}_k^{\perp} kolmou k ose:

$$\vec{b}_k = \vec{b}_k^{\parallel} + \vec{b}_k^{\perp}$$

- využijeme geometrické vlastnosti ($\vec{v}_k = \vec{\omega}_k \times \vec{r}_k \rightarrow \vec{r}_k \perp \vec{v}_k$):

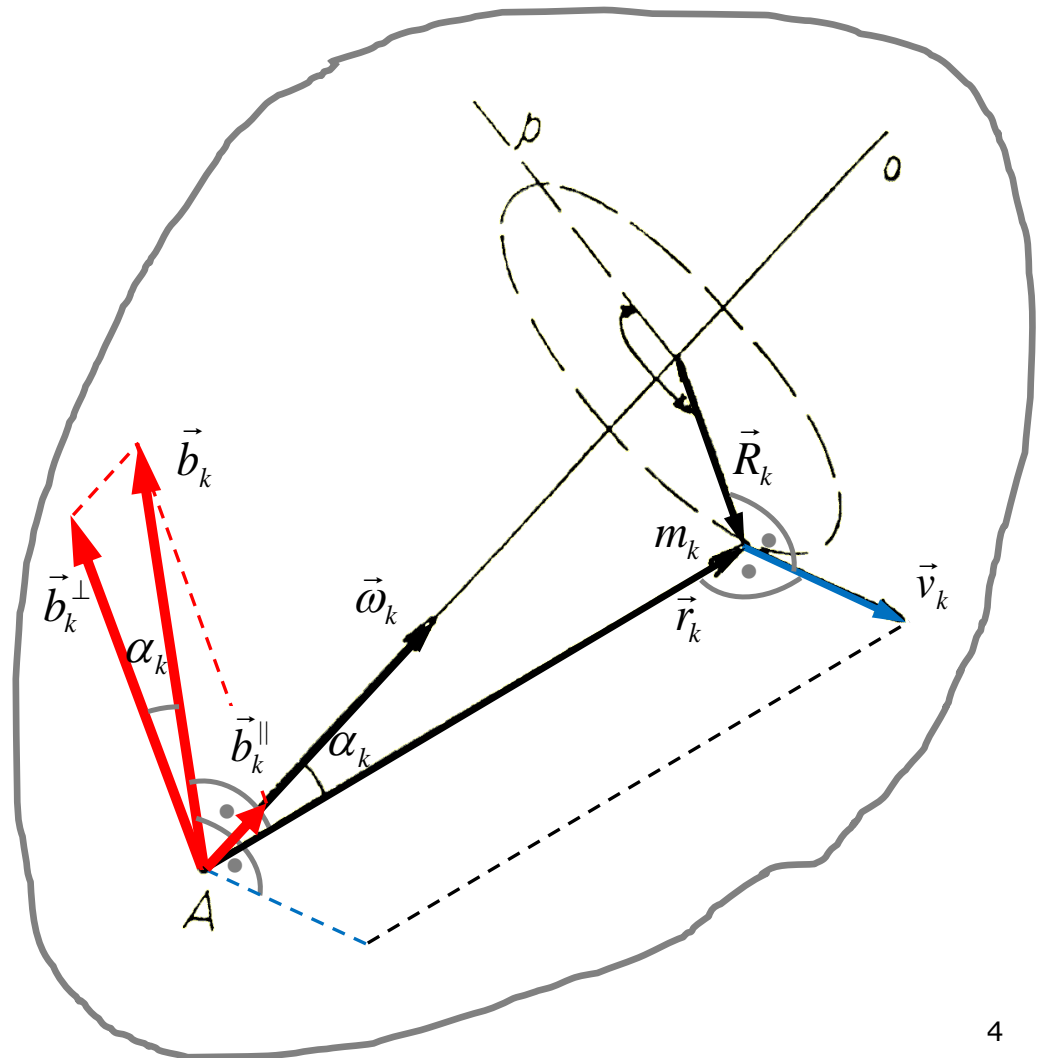
$$b_k = |\vec{r}_k \times m_k \vec{v}_k| = m_k v_k r_k$$

- vektory $\vec{b}_k^{\parallel}, \vec{b}_k^{\perp}, \vec{b}_k, \vec{\omega}_k, \vec{R}_k, \vec{r}_k$ leží v rovině kolmé k vektoru \vec{v}_k

- průmět do směru osy otáčení

$$b_k^{\parallel} = b_k \sin \alpha_k = m_k v_k \underbrace{r_k \sin \alpha_k}_{R_k} =$$

$$= m_k \underbrace{v_k}_{R_k \omega_k} R_k = m_k \omega_k R_k^2$$



Pohybová rovnice pro otáčení kolem osy

Předpokládejme, že kolem osy rotuje jediné tuhé těleso, tj. všechny hmotné body rotují stejnou úhlovou rychlostí ω .

- průmět celkového momentu hybnosti $B^{\parallel} = \sum_{k=1}^N b_k^{\parallel} = \sum_{k=1}^N m_k \omega R_k^2 = \omega \underbrace{\sum_{k=1}^N m_k R_k^2}_J = J\omega$
- zaveden moment setrvačnosti J vůči ose $B^{\parallel} = J\omega$
- moment setrvačnosti s.h.b. vůči ose $J = \sum_{k=1}^N m_k R_k^2$
- pro tuhé těleso ($R(\vec{r})$ vzdálenost od osy) $J = \int_V \rho(\vec{r}) [R(\vec{r})]^2 dV$
- průmět 2. impulsové věty do směru osy $\frac{d}{dt} B^{\parallel} = M^{E\parallel}$
- i pro volné soustavy ($J \neq \text{konst}$) platí $\frac{d}{dt} (J\omega) = M^{E\parallel}$
- pro tuhé soustavy ($J = \text{konst}$) platí $J \frac{d^2\varphi}{dt^2} = J \frac{d\omega}{dt} = J\varepsilon = M^{E\parallel}$

Obecný tvar pohybové rovnice

- pohybová rovnice pro otáčení kolem osy

$$J \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = M^{E\parallel}$$

- má obdobnou strukturu jako 2.NZ

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = F$$

- obecná struktura pohybových rovnic:

konstantní vlastnost objektu × charakteristika pohybu = vnější silové působení

Zákon zachování momentu hybnosti

zobecníme předchozí odvození na případ, kdy hmotné body mohou kolem společné osy rotovat různými úhlovými rychlostmi

- průmět celkového momentu hybnosti
- průmět 2. impulsové věty do směru osy
- pokud moment vnějších sil nulový (ZZMH)
- pro soustavu složenou z několika tuhých těles

$$B^{\parallel} = \sum_{k=1}^N b_k^{\parallel} = \sum_{k=1}^N m_k \omega_k R_k^2$$

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{k=1}^N m_k \omega_k R_k^2 \right) = M^{E\parallel}$$

$$\sum_{k=1}^N m_k \omega_k R_k^2 = \text{konst.}$$

$$\sum_{k=1}^N J_k \omega_k = \text{konst.}$$

Steinerova věta

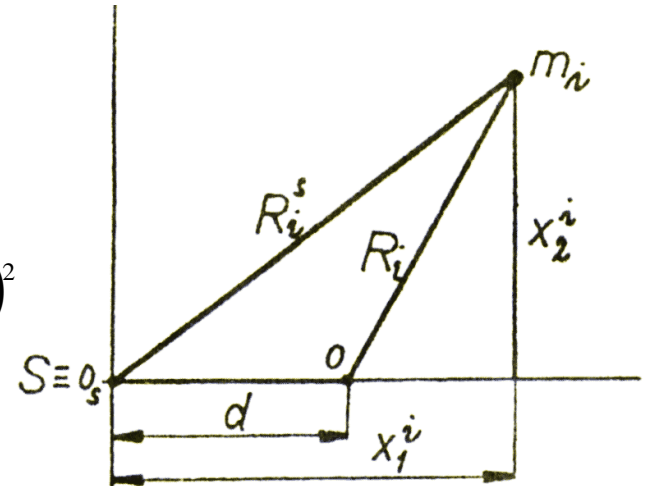
- osa otáčení o_s prochází hmotným středem tělesa
- osa otáčení o ve vzdálenosti d rovnoběžná s osou o_s
- zvolme kartézskou soustavu souřadnic dle nákresu

- moment setrvačnosti vzhledem k ose o_s

$$J_s = \sum_{i=1}^N m_i (R_i^s)^2$$

- moment setrvačnosti vzhledem k ose o

$$J = \sum_{i=1}^N m_i R_i^2$$



- vzdálenost i -tého hm. bodu od osy o_s

$$(R_i^s)^2 = (x_1^i)^2 + (x_2^i)^2$$

- vzdálenost i -tého hmotného bodu od osy o

$$R_i^2 = (x_1^i - d)^2 + (x_2^i)^2$$

- spojením předchozích vyloučíme x_2^i

$$R_i^2 = (R_i^s)^2 + (x_1^i - d)^2 - (x_1^i)^2$$

- moment setrvačnosti vůči ose o

$$J = \sum_{i=1}^N m_i R_i^2 = \underbrace{\sum_{i=1}^N m_i (R_i^s)^2}_{J_s} + \sum_{i=1}^N m_i (x_1^i - d)^2 - \sum_{i=1}^N m_i (x_1^i)^2$$

Steinerova věta

- upravíme

$$J = J_s + \underbrace{\sum_{i=1}^N m_i (x_1^i - d)^2}_{\sum_{i=1}^N m_i (x_1^i)^2 + \underbrace{\sum_{i=1}^N m_i 2x_1^i d}_{2d \sum_{i=1}^N m_i x_1^i} + \underbrace{\sum_{i=1}^N m_i d^2}_{Md^2}} - \sum_{i=1}^N m_i (x_1^i)^2$$

- zůstanou členy

$$J = J_s + Md^2 + 2d \underbrace{\sum_{i=1}^N m_i x_1^i}_{Mx_1^s} = J_s + Md^2 + 2dM \underbrace{x_1^s}_{0}$$

- protože x_1^s představuje první souřadnici hmotného středu a ten leží v počátku, bude poslední člen roven nule

$$J = J_s + Md^2$$

Steinerova věta: Moment setrvačnosti vůči libovolné ose o je roven součtu momentu setrvačnosti vůči ose procházející hmotným středem tělesa rovnoběžně s osou o a součinu hmotnosti tělesa se čtvercem vzdálenosti obou os.

Kinetická energie při otáčení kolem osy

soustava hmotných bodů pohybujících se individuálními rychlostmi \vec{v}_{cn} vůči hmotnému středu soustavy, který se vůči počátku inerciální s.s. pohybuje rychlostí \vec{v}_s

Königova věta

$$E_k = \frac{1}{2} \vec{v}_s^2 M + \underbrace{\sum_{n=1}^N \frac{1}{2} m_n \vec{v}_{cn}^2}_{E_{kI}}$$

tuhé těleso se otáčí kolem pevné osy úhlovou rychlostí $\vec{\omega}$

a) osa prochází hmotným středem, ten je v klidu vůči I.s.s.

- kinetická energie je rovna vnitřní kinetické energii rotující soustavy h.b.

$$E_k = E_{kI} = \sum_{n=1}^N \frac{1}{2} m_n \vec{v}_{cn}^2$$

- rychlost hmotného bodu vůči hm. středu

$$\vec{v}_{cn} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{cn}$$

- velikost rychlosti pomocí vzdálenosti bodu od osy

$$v_{cn} = \omega R_n$$

- kinetická energie

$$E_k = \frac{1}{2} \underbrace{\sum_{n=1}^N m_n R_n^2}_{J_s} \omega^2 = \frac{1}{2} J_s \omega^2$$

Kinetická energie při otáčení kolem osy

b) osa v klidu vůči I.s.s., neprochází hm. středem

- při rotaci nezávisí úhlová rychlost na bodu, vůči kterému ji uvažujeme
- osu otáčení můžeme přemístit do libovolně zvoleného bodu tělesa a rychlost \vec{v}_n hmotného bodu vůči I.s.s. bude pak složena z okamžité rychlosti tohoto zvoleného bodu a z rotační složky, v níž vystupuje vždy stejná hodnota $\vec{\omega}$
- zvolíme za vztažný bod hmotný střed tělesa – tj. uvažujeme rotaci kolem hmotného středu, který se otáčí kolem aktuální osy rotace
- rychlost n -tého hmotného bodu vůči I.s.s.
$$\vec{v}_n = \vec{v}_s + \underbrace{\vec{\omega} \times \vec{r}_{cn}}_{\vec{v}_{cn}}$$
- podle Königovy věty se kinetická energie bude skládat z vnitřní kinetické energie vůči hmotnému středu a z kinetické energie hmotného středu

$$E_k = \frac{1}{2} \vec{v}_s^2 M + E_{kl}$$

- vnitřní kinetická energie (viz bod a)

$$E_{kl} = \frac{1}{2} \underbrace{\sum_{n=1}^N m_n R_n^2}_{J_s} \omega^2 = \frac{1}{2} J_s \omega^2$$

Kinetická energie při otáčení kolem osy

- hmotný střed se otáčí společně s tělesem úhlovou rychlostí $\vec{\omega}$
- rychlost pohybu hmotného středu kolem skutečné osy rotace lze vyjádřit pomocí vzdálenosti R_s hmotného středu od osy

$$v_s = \omega R_s$$

- celková kinetická energie

$$E_k = \frac{1}{2}MR_s^2\omega^2 + \frac{1}{2}J_s\omega^2 = \frac{1}{2}\underbrace{(MR_s^2 + J_s)}_J\omega^2$$

- podle Steinerovy věty představuje J moment setrvačnosti vůči aktuální ose otáčení

Závěr: Výraz $E_k = \frac{1}{2}J\omega^2$ je obecným vyjádřením kinetické energie tělesa otáčejícího se kolem pevné osy.

Těžká kladka

- pohybová rovnice (2. imp. věta)

$$J \frac{d\omega}{dt} = R(F_1 - F_2)$$

- výsledná síla působící na levé závaží

$$m_1 a = m_1 g - F_1$$

- výsledná síla působící na pravé závaží

$$m_2 a = F_2 - m_2 g$$

- obvodová rychlost a úhlová rychlost

$$v = R\omega$$

- derivací získáme vztah mezi zrychleními

$$a = R \frac{d\omega}{dt}$$

- dosazeno do pohybové rovnice

$$J \frac{a}{R} = R(m_1 g - m_1 a - m_2 g - m_2 a)$$

- úprava

$$J \frac{a}{R^2} + m_1 a + m_2 a = m_1 g - m_2 g$$

- úprava

$$\left(\frac{J}{R^2} + m_1 + m_2\right)a = (m_1 - m_2)g$$

- vyjádřeno zrychlení

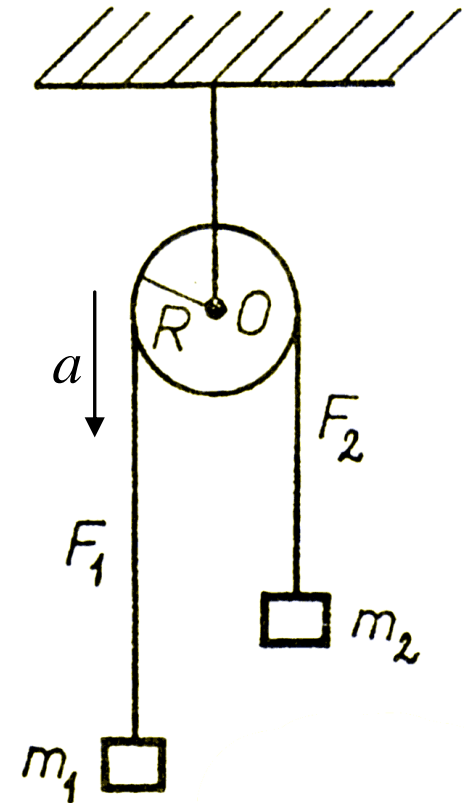
$$a = \frac{(m_1 - m_2)g}{\frac{J}{R^2} + m_1 + m_2}$$

- dif. rovnice pro úhlovou rychlost

$$a = R \frac{d\omega}{dt} \rightarrow d\omega = \frac{a}{R} dt$$

- proměnné separované, integrace

$$\int d\omega = \int \frac{a}{R} dt \rightarrow \omega = \frac{a}{R} t + \omega_0 \rightarrow \varphi = \frac{1}{2} \frac{a}{R} t^2 + \omega_0 t + \varphi_0$$



Těžká kladka – alternativně pomocí ZZME

- nárůst pot. energie při poklesu levého závaží o h

$$\Delta E_p = -m_1gh + m_2gh$$

- získaná kinetická energie

$$\Delta E_k = \frac{1}{2}m_1v^2 + \frac{1}{2}m_2v^2 + \frac{1}{2}J\omega^2$$

- ZZME

$$\Delta E_k = -\Delta E_p$$

- obvodová rychlost a úhlová rychlost $v = R\omega$

- dosazení do ZZME

$$\frac{1}{2}m_1v^2 + \frac{1}{2}m_2v^2 + \frac{1}{2}J\frac{v^2}{R^2} = m_1gh - m_2gh$$

- úprava

$$\frac{1}{2}\left(m_1 + m_2 + \frac{J}{R^2}\right)v^2 = (m_1 - m_2)gh$$

- rychlost v závislosti na h

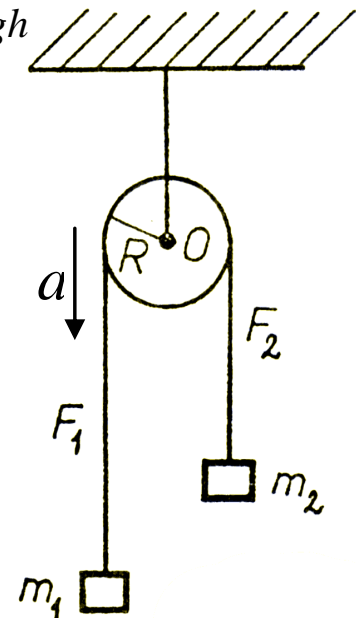
$$v = \sqrt{\frac{2(m_1 - m_2)gh}{m_1 + m_2 + \frac{J}{R^2}}}$$

- rychlost v závislosti na dráze

$$\left. \begin{array}{l} h = \frac{1}{2}at^2 \\ v = at \end{array} \right\} h = \frac{1}{2} \frac{v^2}{a} \rightarrow v = \sqrt{2ah}$$

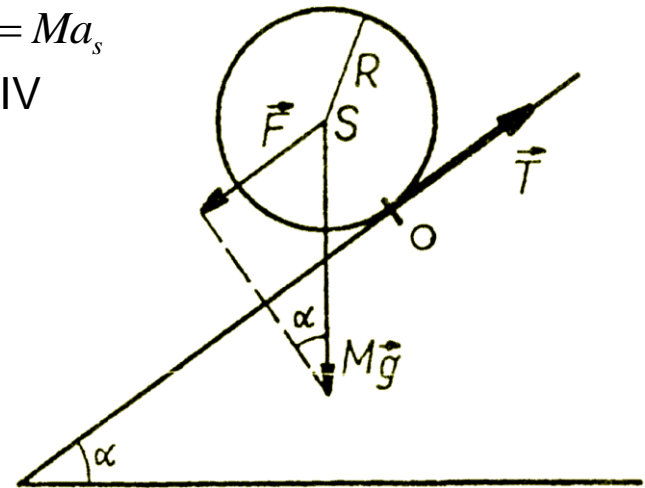
- porovnáním získáme zrychlení

$$a = \frac{(m_1 - m_2)g}{m_1 + m_2 + \frac{J}{R^2}}$$



Valení po nakloněné rovině

- pohybová rovnice pro hm. střed $\vec{F}^E = M\vec{a}_s$
- vnější síly jsou průmět tíhy do směru pohybu a síla tření
 $Mg \sin \alpha - T = Ma_s$
- druhý neznámý parametr (třecí síla) vychází z 2. IV
 $J \frac{d\omega}{dt} = TR$
- vztah posuvné a úhlové rychlosti
 $v_s = R\omega$
- vztah mezi zrychleními
 $a_s = R \frac{d\omega}{dt}$
- dosazením do druhé rovnice
 $J \frac{a_s}{R^2} = T$
- dosazením do první rovnice
 $Mg \sin \alpha - J \frac{a_s}{R^2} = Ma_s$
- lze vyjádřit zrychlení
 $a_s = \frac{Mg \sin \alpha}{M + \frac{J}{R^2}}$



Závěr: čím větší J nebo menší poloměr, tím pomalejší pohyb

Valení po nakloněné rovině - ZZME

posun z výšky h_1 do výšky h_2

- h_1 : potenciální energie

$$E_p(h_1) = Mgh_1$$

- h_2 : kinetická energie

$$E_k(h_2) = \frac{1}{2}Mv_s^2 + \frac{1}{2}J\omega^2$$

- h_2 : potenciální energie

$$E_p(h_2) = Mgh_2$$

- ZZME

$$Mgh_1 = \frac{1}{2}Mv_s^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 + Mgh_2$$

- úpravy

$$Mg(h_1 - h_2) = \frac{1}{2}Mv_s^2 + \frac{1}{2}J \frac{v_s^2}{R^2} = \frac{1}{2} \left(M + \frac{J}{R^2} \right) v_s^2$$

- rychlost v záv. na výšce

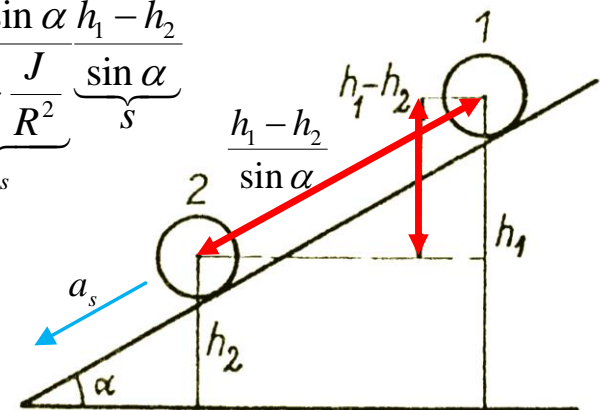
$$v_s = \sqrt{\frac{2Mg(h_1 - h_2)}{M + \frac{J}{R^2}}} = \sqrt{2 \frac{Mg \sin \alpha h_1 - h_2}{M + \frac{J}{R^2} \frac{1}{\sin \alpha}}}$$

- posunutí podél nakl. roviny

$$s = \frac{h_1 - h_2}{\sin \alpha}$$

- zrychlení podél nakl. roviny

$$a_s = \frac{Mg \sin \alpha}{M + \frac{J}{R^2}}$$



Fyzické kyvadlo

tuhé těleso v tíhovém poli zavěšeno na vodorovné ose neprocházející hm. středem – fyzické kyvadlo

- 2. imp. věta
- mínus v rovnici – moment síly působí zrychlení proti výchylce φ
- úhlovou rychlost vyjádřit pomocí úhlové výchylky
- pohybová rovnice
- řešení komplikované – nebudeme provádět
- zjednodušení pro malé úhly φ , kde $\sin \varphi \doteq \varphi$
- rovnice ve tvaru jako pro harmonický kmit \Rightarrow řešení
- platí $(\sin x)'' = -\sin x$, a proto $-J\Phi\Omega^2 \sin(\Omega t + \alpha) = -Mgr\Phi \sin(\Omega t + \alpha)$
- po zjednodušení $J\Omega^2 = Mgr$
- úhlová frekvence kmitů Ω je konstanta $\Omega = \sqrt{\frac{Mgr}{J}}$
- !!! nesměšovat s proměnnou úhlovou rychlostí otáčení kyvadla $\omega = \frac{d\varphi}{dt} \neq \Omega$
- doba kmitu kyvadla (dvojnásobek doby kyvu) $T = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi \sqrt{\frac{J}{Mgr}}$

$$J \frac{d\omega}{dt} = -Mgr \sin \varphi$$

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \rightarrow \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

$$J \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -Mgr \sin \varphi$$

$$J \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -Mgr\varphi$$

$$\varphi = \Phi \sin(\Omega t + \alpha)$$

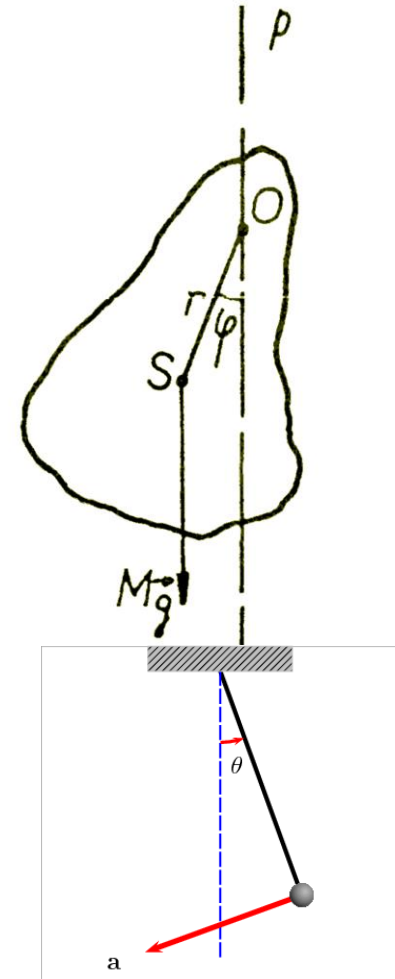
$$-J\Phi\Omega^2 \sin(\Omega t + \alpha) = -Mgr\Phi \sin(\Omega t + \alpha)$$

$$J\Omega^2 = Mgr$$

$$\Omega = \sqrt{\frac{Mgr}{J}}$$

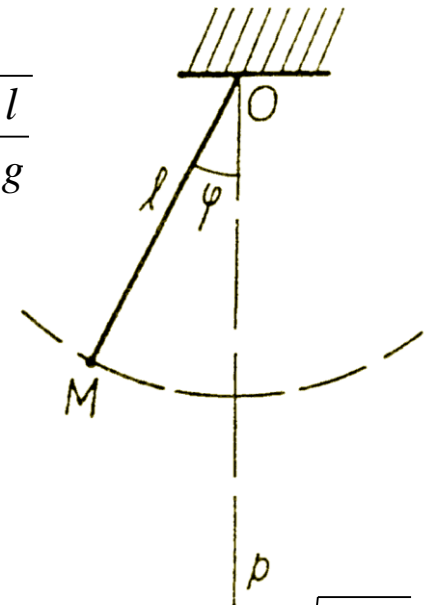
$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \neq \Omega$$

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi \sqrt{\frac{J}{Mgr}}$$



Matematické kyvadlo

- hmotnost soustředěna v jediném h.b. hmotnosti M , nehmotný závěs délky l
- moment setrvačnosti h.b. $J = Ml^2$
- vzdálenost hm. středu od osy otáčení $r = l$
- doba kmitu matematického kyvadla $T = 2\pi \sqrt{\frac{Ml^2}{Mgl}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$
- problémy dělá praktická realizace závěsu:
 - vlastní hmotnost nitě
 - nedrží rovinu kmitu



Redukovaná délka fyzického kyvadla

- se nazývá výraz $l_r = \frac{J}{Mr}$, který má rozměr délky
- s tímto označením přejde rovnice pro periodu kmitu fyzického kyvadla $T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{Mgr}}$ na tvar formálně shodný s rovnicí pro periodu kmitu matematického kyvadla

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l_r}{g}}$$

Reverzní kyvadlo

- kyvadlo lze užít k měření tíhového zrychlení
- problém s realizací „nehmotného“ závěsu a s určením jeho přesné délky
- fyzické kyvadlo – lepší reprodukovatelnost měření
- nutno přesně stanovit redukovanou délku fyzického kyvadla
- redukovanou délku lze přesně určit v případě tzv. reverzního kyvadla

Princip reverzního kyvadla

- mějme těleso, které může kývat na dvou rovnoběžných osách
- osy O a O' budiž ve vzdálenostech r a r' od hm. středu
- budeme zkoumat, za jakých podmínek budou mít malé kmity stejnou periodu pro obě osy

- perioda pro osu O

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{Mgr}}$$

- perioda pro osu O'

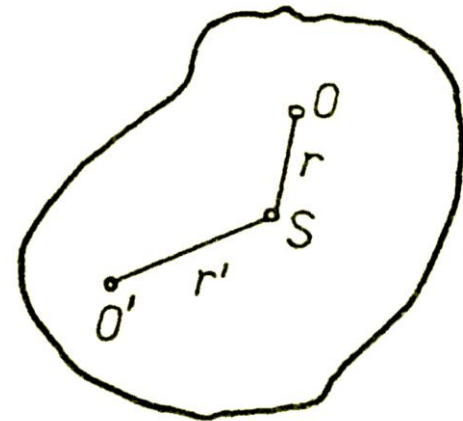
$$T' = 2\pi \sqrt{\frac{J'}{Mgr'}}$$

- bude platit $T' = T$, pokud

$$\frac{J'}{r'} = \frac{J}{r}$$

- podle Steinerovy věty

$$J = J_s + Mr^2, \quad J' = J_s + Mr'^2$$



Reverzní kyvadlo

- dosazením

$$\frac{J_s + Mr'^2}{r'} = \frac{J_s + Mr^2}{r}$$

- upraveno na rovnici pro neznámé r'

$$r'^2 - r' \frac{J_s + Mr^2}{Mr} + \frac{J_s}{M} = 0$$

- zřejmé řešení

$$r'_1 = r$$

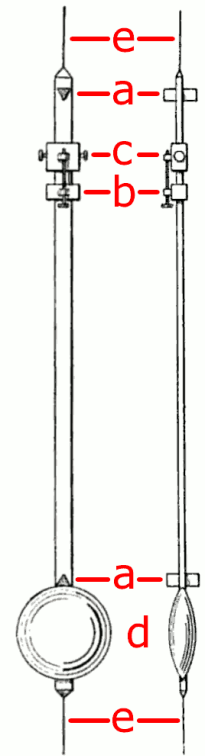
vyhovuje pro všechny osy ve vzdálenosti r od hm. středu

- druhé řešení z vlastností kvadr. rce

$$r'_1 + r'_2 = \frac{J_s + Mr^2}{Mr} = \frac{J}{Mr} = l_r$$

- součet obou řešení roven redukované délce kyvadla $r'_1 + r'_2 = r + r'_2 = l_r$

- druhým řešením jsou opět všechny osy ve vzdálenosti $r'_2 = l_r - r$ od hm. středu



Má-li těleso (reverzní kyvadlo) dvě rovnoběžné osy nestejně vzdálené od hmotného středu, vůči kterým kýve (malými kmity) se stejnou periodou, přičemž hmotný střed leží v rovině určené osami, pak vzdálenost os je rovna redukované délce kyvadla.

Technické řešení:

- tyč s pevnými osami
- po tyči lze posouvat závaží a tím posouvat hm. střed
- závaží se „vyladí“ tak, aby doby kmitu byly shodné
- pak je vzdálenost os rovna redukované délce, tu je nutno co nejpřesněji změřit
- perioda v naladěném stavu může pak být užita pro výpočet tíhového zrychlení