Řady

Diplomová práce

Radek Vejmelka

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Vladimíra Petrášková, Ph.D.

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky
2009

ANOTACE

Tato diplomová práce je koncipována jako učební text, který se věnuje nekonečným číselným řadám. Tematicky vychází z osnov přednášek čtvrtého semestru matematické analýzy oboru "učitelství matematiky pro SŠ" na Pedagogické fakultě Jihočeské univerzity v Českých Budějovicích. Jejím obsahem je teoretický výklad základních pojmů a tvrzení o nekonečných řadách, včetně důkazů uvedených tvrzení, řada řešených úloh, na nichž je demonstrována aplikace těchto pojmů a tvrzení, a také sbírka úloh pro samostatné procvičení.

ABSTRACT

This thesis is conceived as a learning text, which deals with infinite numerical series. The thesis thematicaly results from curriculum for lectures of fourth therm's analysis for field called "Pedagogy of mathematics for secondary schools" on Pedagogical faculty by University of South Bohemia. It contains theoretical interpretation of basic concepts and theorems about infinite series, including of proofs of shown theorems, plenty of solved excersises, which show aplication of these concepts and theorems, and collection of excercises to study indipendently as well.

Prohlášení

Prohlašuji, že svou diplomovou práci jsem vypracoval samostatně, pouze s užitím literatury uvedené v seznamu literatury.

Prohlašuji, že v souladu s 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své diplomové práce, a to v nezkrácené podobě - v úpravě vzniklé vypuštěním vyznačených částí archivovaných fakultou elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG, provozované Jihočeskou Univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách.
V Českých Budějovicích, dne:

Poděkování

Chtěl bych touto cestou poděkovat RNDr. Vladimíře Petráškové, Ph.D., za náměty, připomínky i poskytnutí materiálů, které mi usnadnily sepsat mou práci.

Obsah

1. Konečné součty

1.1 Posloupnosti reálných čísel

Abychom mohli zavést pojem konečného součtu, s jehož pomocí definujeme nekonečnou řadu, je důležité připomenout pojem posloupnosti reálných čísel. Protože studium posloupností reálných čísel není v této práci cílem, nebudeme pojednání o nich šířeji rozvádět a omezíme se pouze na několik nejpodstatnějších pojmů.

Definice 1.1:(Posloupnost reálných čísel)

Posloupností reálných čísel (dále jen poslopupností) nazýváme funkci, jejímž definičním oborem je libovolná podmnožina množiny přirozených čísel.

V nejjednodušším případě může být tato podmnožina i konečná, potom bychom hovořili o konečné posloupnosti. Pro nás jsou však důležité posloupnosti nekonečné, přičemž lze posloupnost definovat až od určitého přirozeného čísla n_0 dále. Nekonečnou posloupnost reálných čísel značíme $\{a_n\}_{n=n_0}^{\infty}$ a prvek a_n nazýváme n-tým členem této posloupnosti. Většinou budeme uvažovat posloupnosti definované od přirozeného čísla 0 nebo 1, vyjímečně jinak, vždy však na tuto skutečnost upozorním. Dalším důležitým pojmem pro další výklad je limita posloupnosti. Uvedeme pouze stručně symbolicky definice vlastní a nevlastní limity posloupnosti.

Definice 1.2: (Limita posloupnosti reálných čísel)

Mějme posloupnost $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$

a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A \ (A \in R) \Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0) \ (\exists n_0 \in N); \forall n > n_0 : |a_n - A| < \epsilon$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty \Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0) \ (\exists n_0 \in N); \forall n > n_0 : a_n > \frac{1}{\epsilon}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty \Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0) \ (\exists n_0 \in N); \forall n > n_0 : a_n < -\frac{1}{\epsilon}$

Existuje-li vlastní limita posloupnosti $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, nazýváme posloupnost **konvergentní**. Je-li limita posloupnosti $\pm\infty$ nebo pokud limita neexistuje, nazýváme tuto posloupnost **divergentní**.

Pro další výklad budou důležité dva typy posloupností, kterých si nyní podrobněji všimneme.

Aritmetická posloupnost

Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ se nazývá aritmetická, jestliže platí:

$$\forall n \in N : a_{n+1} - a_n = d, \quad d \in R \ \wedge \ d = konst.$$

Posloupnost je tedy jednoznačně určena prvním členem a_1 a pevnou konstantou d, zvanou diference. Pro n-tý člen posloupnosti tedy platí:

$$a_n = a_1 + (n-1)d.$$

Určeme vztah pro součet prvních n členů aritmetické posloupnosti. Napišme si součet prvních n členů pod sebe dvakrát, pouze v opačném pořadí.

$$\begin{array}{ccccccccc} a_1 & + & a_2 & + & \ldots & + & a_{n-1} & + & a_n \\ a_n & + & a_{n-1} & + & \ldots & + & a_2 & + & a_1 \end{array}$$

Rozepišme si nyní všechny členy pomocí prvního členu a diference.

$$\begin{array}{ccccccccc} a_1 & + & a_1 + d & + & \ldots & + & a_1 + (n-2)d & + & a_1 + (n-1)d \\ a_1 + (n-1)d & + & a_1 + (n-2)d & + & \ldots & + & a_1 + d & + & a_1 \end{array}$$

Vidíme, že nad sebou budou vždy dvojice, které po sečtení dají součet

$$a_1 + a_1 + (n-1)d = a_1 + a_n.$$

Sečteme-li tedy oba řádky, dostaneme n součtů tvaru $a_1 + a_n$. To ovšem odpovídá dvojnásobku součtu prvních n členů, protože jsme jej napsali dvakrát pod sebe. Označíme-li součet prvních n členů s_n ($s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$), dostáváme:

$$2s_n = n \cdot (a_1 + a_n) \Rightarrow s_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}.$$

Geometrická posloupnost

Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ se nazývá geometrická, jestliže platí:

$$\forall n \in N : \frac{a_{n+1}}{a_n} = q, \quad q \in R \ \wedge \ q = konst.$$

Tato posloupnost je tedy jednoznačně určena prvním členem a_1 a pevnou konstantou q, kterou nazýváme kvocient. Pro n-tý člen geometrické posloupnosti tudíž platí:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}.$$

Odvoďme vztah pro součet prvních n členů geometrické posloupnosti. Označíme jej (podobně jako v předchozím případě) s_n.

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = a_1 + a_1 q + \ldots + a_1 q^{n-1} = a_1(1 + q + \ldots + q^{n-1})$$

Rozšíříme-li výraz v závorce výrazem $1 - q$, dostaneme:

$$s_n = a_1 \frac{(1 + q + \ldots + q^{n-1})(1 - q)}{1 - q} = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

Vlastnostmi posloupností a jejich limit se již podrobněji zabývat nebudeme, následující text však bude vyžadovat znalost některých dalších pojmů. Čtenář je nalezne např. v publikaci [1]. Uveďme však (bez důkazu) nejdůležitější limity, které se využívají při práci s řadami:

- $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = 1$
- $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad a > 0$
- $\lim\limits_{n \to \infty} n! = \infty$
- $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$
- $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^a.$

1.2 Zavedení a vlastnosti konečných součtů

Definice 1.3:

Nechť $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel. Potom definujeme:

$\sum\limits_{k=0}^{n} a_k = a_0$ pro $n = 0$

$\sum\limits_{k=0}^{n+1} a_k = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k + a_{n+1}$ pro $n \geq 0$

k nazýváme *sčítací index*, 0 a n jsou *meze sčítacího indexu.*

Poznámka: Místo symbolu $\sum\limits_{k=0}^{n}$ lze použít zápis $(a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$

Věta 1.1

Mějme dány posloupnosti $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ a $\{b_k\}_{k=0}^{\infty}$ a libovolné $c \in R$. Pak platí:

1. $\sum\limits_{k=0}^{n} c \cdot a_k = c \cdot \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$
2. $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k + \sum\limits_{k=0}^{n} b_k = \sum\limits_{k=0}^{n} (a_k + b_k)$

Důkaz: Důkaz obou částí tvrzení provedeme matematickou indukcí podle n

1. Pro $n = 0$ je tvrzení zřejmé neboť je součet roven přímo prvku a_0, takže $c \cdot \sum\limits_{k=0}^{n} a_k = c \cdot a_0$.

   Předpokládejme nyní, že tvrzení platí pro libovolné $n \in N$ a ukažme, že za tohoto předpokladu tvrzení platí i pro $n + 1$.
   $\sum\limits_{k=0}^{n+1} c \cdot a_k = \sum\limits_{k=0}^{n} c \cdot a_k + c \cdot a_{n+1}$ dle definice konečného součtu.
   Potom $\sum\limits_{k=0}^{n} c \cdot a_k + c \cdot a_{n+1} = c \cdot \sum\limits_{k=0}^{n} a_k + c \cdot a_{n+1}$ dle indukčního předpokladu.
   Dále: $c \cdot \sum\limits_{k=0}^{n} a_k + c \cdot a_{n+1} = c \cdot \left(\sum\limits_{k=0}^{n} a_k + a_{n+1} \right) = c \cdot \sum\limits_{k=0}^{n+1} a_k$, což jsme chtěli ukázat.

2. Pro $n = 0$ je tvrzení opět zřejmé, protože výsledkem je pouhý součet dvou reálných čísel $a_0 + b_0$

   Opět předpokládejme, že tvrzení platí pro libovolné $n \in N$ a ukažme v indukčním kroku platnost tvrzení pro $n + 1$. Postup je analogický jako

v první části důkazu, proto jen stručně:
$\sum\limits_{k=0}^{n+1} a_k + \sum\limits_{k=0}^{n+1} b_k = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k + a_{n+1} + \sum\limits_{k=0}^{n} b_k + b_{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{n} (a_k + b_k) + (a_{n+1} + b_{n+1}) = \sum\limits_{k=0}^{n+1} (a_k + b_k)$

Pojem konečného součtu a jeho výše uvedené vlastnosti hrají pomocnou roli při zavádění číselných řad a při práci s nimi. Vše co o nich bylo řečeno pro naše účely postačí a nemá tedy smysl se jimi dále zabývat. Přejdeme tedy přímo k zavedení pojmu číselné řady.

2. Nekonečné číselné řady

2.1 Základní pojmy

Definice 2.1:

Nechť $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ je daná posloupnost reálných čísel.
Posloupnost $\left\{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\right\}_{n=1}^{\infty}$ nazveme *nekonečnou číselnou řadou* určenou posloupností$\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$.
Označíme ji $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ nebo též $(a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots)$.

Definice 2.2:

- k-tý člen a_k posloupnosti $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$, která určuje řadu $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$,nazveme *k-tý člen řady* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$
- n-tý člen s_n posloupnosti $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, nazveme *n-tý částečný součet* řady $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$

Je třeba si uvědomit, že nekonečná číselná řada tak jak byla zavedena představuje posloupnost částečných součtů $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$, tedy konečných součtů tvaru: $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, kde členy a_k jsou členy posloupnosti $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Značíme-li řadu zkráceně $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ má k význam sčítacího indexu a na jeho označení nebude záležet. Ze zápisu je totiž vždy jasné, který symbol představuje sčítací index a který proměnné. Tento zápis také umožňuje zjednodušit si představu o číselné řadě. Pro lepší názornost si ji představme tak, jako bychom celou určující posloupnost $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ rozepsali člen po členu vedle sebe až do nekonečna a všechna čísla sečetli. Jak však dále uvidíme, definice číselné řady jako posloupnosti částečných součtů bude hrát významnou roli např. při definici (a v některých případech i výpočtu) součtu řady i v důkazech mnoha důležitých vět o řadách, proto je třeba si korektní definici číselné řady osvojit.

Příklady:

1. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k = 1 + 2 + 3 + \ldots + n + \ldots$

2. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c = c + c + c + \ldots$

3. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (3k + 2) = 5 + 7 + 11 + 14 + \ldots$

4. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (\frac{1}{3})^k = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \ldots$

5. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} = 1 + (-1) + 1 + (-1) + \ldots$

6. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$

7. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots$

Výše uvedené příklady pouze ilustrují, jak si zápis číselné řady představit. Řady 1. a 2. jsou speciálními případy aritmetické řady, řady 4. a 5. zase speciálními případy geometrické řady. Oba druhy řad později rozebereme podrobněji. Řada 6. se nazývá *harmonická řada* a je důležitým příkladem, ke kterému se budeme ještě mnohokrát vracet.

2.2 Konvergence a divergence řady; součet řady

Stejně jako jsme posloupnosti reálných čísel rozdělili na konvergentní a divergentní v závislosti na existenci nebo neexistenci vlastní limity, budeme moci týmž způsobem dělit i řady, protože jsme je definovali jako *posloupnosti* částečných součtů. To bude obsahem následujících definic.

Definice 2.3:

Řekneme, že nekonečná číselná řada $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *konverguje* (je konvergentní), jestliže konverguje posloupnost$\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ jejích částečných součtů.

V ostatních případech nazýváme řadu divergentní.Speciálně:

- Je-li $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \infty$, říkáme, že řada $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ diverguje k ∞.
- Je-li $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = -\infty$, říkáme že řada $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ diverguje k $-\infty$.
- Pokud $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ neexistuje, říkáme, že řada $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ osciluje.

Definice 2.4:
Nechť řada $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje a $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} a_k = s$. Tuto vlastní limitu s posloupnosti částečných součtů nazýváme ***součtem řady*** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ a píšeme $s = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$.

Uvědomme si, že v tuto chvíli jsme rozšířili význam symbolického zápisu řady $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$. Představuje totiž buď označení součtu řady, pokud je řada konvergentní nebo jde pouze o označení řady určené posloupností $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$. Nyní již máme dostatečné množství nástrojů k tomu, abychom mohli rozhodnout o konvergenci či divergenci některých jednodušších řad, popřípadě určili i jejich součet. Předveďme si to na následujících příkladech:

Příklad 1: Mějme řadu

$$\sum_{k=1}^{\infty} k = 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots$$

Posloupnost $\{k\}_{k=1}^{\infty}$ je příkladem aritmetické poslopupnosti s prvním členem 1 a diferencí 1. Dle vztahu pro součet prvních n členů aritmetické posloupnosti (nebo jinak) dojdeme k tomu, že součet n po sobě jdoucích přirozených čísel počínaje číslem 1 jest $\frac{n(n+1)}{2}$. Tento výraz tudíž v našem příkladě představuje n-tý částečný součet řady $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k$. Takže tuto řadu lze reprezentovat posloupností částečných součtů $\left\{\sum\limits_{k=1}^{n} k\right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}_{n=1}^{\infty}$. Součet řady je roven limitě posloupnosti částečných součtů

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)}{2} = +\infty.$$

Limita částečných součtů je $+\infty$, takže řada diverguje k $+\infty$.

Příklad 2:

$$\sum_{k=1}^{\infty} c = c + c + c + c + \dots$$

Posloupnost, která určuje tuto řadu je konstantní posloupnost $\{c\}_{k=1}^{\infty}$. Je zřejmé, že sečteme-li prvních n-členů této posloupnosti, dostaneme $s_n = n \cdot c$. Součet řady lze najít, pokud bude existovat vlastní limita posloupnosti částečných součtů. Máme:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} n \cdot c \ .$$

Tato limita je rovna $+\infty$ pokud $c > 0$, pak tato řada diverguje k $+\infty$, je rovna $-\infty$ pokud $c < 0$, pak řada diverguje k $-\infty$ a konečně je tato limita rovna 0 pokud $c = 0$, pak řada konverguje a její součet je 0.

Příklad 3: *Aritmetická řada*

Aritmetická řada je řada $s = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, kde $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ je aritmetická posloupnost, což je taková posloupnost, jejíž libovolné dva sousední členy se liší o tutéž konstantu d, kterou nazýváme *diference*. Aritmetická posloupnost je jednoznačně určena svým prvním členem a_1 a danou diferencí d, přičemž a_1 a d jsou daná reálná čísla. Potom pro každý následující člen platí: $a_{n+1} = a_n + d$. Obecně pro n-tý člen aritmetické posloupnosti platí: $a_n = a_1 + (n-1)d$. Pro součet prvních n členů aritmetické posloupnosti lze odvodit (viz kapitola 1) vztah:

$$s_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{n(a_1 + a_1 + (n-1)d)}{2} = n\left(a_1 + \frac{(n-1)d}{2}\right)$$

Součet aritmetické řady opět určíme jako limitu posloupnosti částečných součtů $\left\{n\left(a_1 + \frac{(n-1)d}{2}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$.

Tedy spočteme limitu

$$\lim_{n\to\infty}\left[n\left(a_1 + \frac{(n-1)d}{2}\right)\right] = \lim_{n\to\infty}\left[na_1 + \frac{n^2d - nd}{2}\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{n^2d}{2} + n\left(\frac{2a_1 - d}{2}\right)\right] = \lim_{n\to\infty}\left[n^2\left(\frac{d}{2} + \frac{2a_1 - d}{2n}\right)\right]$$

Tato limita je rovna limitě $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^2\cdot\frac{d}{2}\right)$, pokud $d \neq 0$. Vidíme, že pokud je $d > 0$ je tato limita rovna $+\infty$ a řada diverguje k $+\infty$. Pokud je $d < 0$ je limita rovna $-\infty$ a řada diverguje k $-\infty$. Pokud je $d = 0$ Jde o situaci jako v příkladě 2, protože dostaneme konstantní posloupnost. Z toho plyne, že aritmetická řada může být konvergentní pouze v případě, že $a_1 = d = 0$. Pak je součet řady též roven 0.

Příklad 4: *Geometrická řada*

Geometrická řada je řada $s = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, kde $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ je geometrická posloupnost. Geometrická posloupnost je jednoznačně určena dvěma reálnými čísly. Svým prvním členem a_1 a danou konstantou q zvanou *kvocient*. Pro každý její následující člen platí: $a_{n+1} = a_n \cdot q$. Obecně pro n-tý člen geometrické posloupnosti tedy platí: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$. Pro součet prvních n členů geometrické posloupnosti lze odvodit vztah: $s_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$. (viz kapitola 1) Tento vztah opět představuje n-tý částečný součet geometrické řady a my můžeme najít součet řady jako limitu těchto částečných součtů (pokud existuje).

$$\lim_{n\to\infty} a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_1}{1-q} \cdot (1-q^n)$$

Nyní je třeba rozlišit následující případy:

1. Je-li $|q| < 1$ potom $q^n \to 0$ pro $n \to \infty$, takže výraz v závorce má limitu 1 a celá posloupnost částečných součtů má limitu $\frac{a_1}{1-q}$. Speciálně: je-li $q = 0$, pak počínaje druhým členem jde o řadu složenou z nulových členů, takže součet řady je roven prvnímu členu a_1.
2. Je-li $q > 1$ pak $q^n \to 0$pro $n \to \infty$ a výraz v závorce má limitu $-\infty$. Jmenovatel zlomku je však také záporný, protože $q > 1$, takže výraz $\frac{1-q^n}{1-q}$ má limitu $+\infty$. Tedy posloupnost částečných součtů má limitu $+\infty$, pokud $a_1 > 0$ a $-\infty$ pokud $a_1 < 0$. V obou případech však geometrická řada diverguje.
3. Je-li $q \leq -1$ pak posloupnost částečných součtů neexistuje (např. dle věty o vybrané posloupnosti) a řada osciluje.
4. Konečně, je-li $q = 1$, pak členy tvoří konstatntní posloupnost $\{a_1\}$. Tedy příslušná řada diverguje pro $a_1 \neq 0$ a konverguje pro $a_1 = 0$, přičemž její součet je v tomto případě pochopitelně nulový.

Závěrem tedy shrňme, že geometrická řada je konvergentní, pokud geometrická posloupnost, kterou je určena, má kvocient $|q| < 1$. Potom pro součet geometrické řady platí:

$$s = \frac{a_1}{1-q}.$$

Příklad 5: Mějme dánu řadu:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}.$$

Tato řada není ani geometrická ani aritmetická a budeme-li chtít rozhodnout o její konvergenci či divergenci nebo dokonce najít její součet, budeme muset najít způsob, jak určit její částečné součty, protože jiný nástroj zatím nemáme k dispozici. V zadaném tvaru se nám to však nepodaří. Je proto třeba si uvědomit, že libovolou racionální funkci lze rozložit na tzv. parciální zlomky. V našem případě to znamená, že zlomek $\frac{1}{k(k+1)}$ lze rozložit na dva zlomky tvaru $\frac{a}{k} + \frac{b}{k+1}$, kde a a b jsou reálné konstanty. Snadno najdeme, že $a = 1$ a $b = -1$, takže původní řadu lze napsat:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right).$$

Rozepišme si pro ilustraci první čtyři členy:

$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) = 1 - \frac{1}{5}.$

Pokud bychom totéž provedli obecně pro n-tý člen posloupnosti částečných součtů dostaneme:

$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{(n-1)\cdot n} + \frac{1}{n\cdot(n+1)} =$
$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$

N-tý částečný součet je tedy $1 - \frac{1}{n+1}$ a stačí spočíst $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$.

Tato limita je rovna 1, proto je řada $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ konvergentní a má součet 1.

Definice 2.5:

Nechť n je přirozené číslo různé od nuly. *Zbytkem řady* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ po n-tém členu nazveme řadu $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$, kde $b_k = a_{n+k}, k = 1, 2, \ldots$ a označíme ji $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k$.

Věta 2.1:

Řada $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje (resp. diverguje), právě když konverguje (resp. diverguje) její zbytek po n-tém členu $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k$.

Tato věta neříká nic jiného, než že konvergenci nebo divergenci (ani druh divergence) nezměníme, pokud vynecháme nebo pozměníme konečný počet členů. Můžeme však, v případě konvergentní řady, změnit hodnotu jejího součtu.

Věta 2.2:*Nutná podmínka konvergence řady*

Jestliže řada $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje, potom platí: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Důkaz:

Protože řada $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje, existuje vlastní limita jejích částečných součtů. Označme ji $s.(\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s, s \in R)$ Pro částečné součty této řady platí: $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$. Z toho plyne, že n-tý člen řady a_n lze napsat ve tvaru: $a_n = s_n - s_{n-1}$. Jak s_n, tak s_{n-1} jsou částečné součty téže řady, proto musí platit, že $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} s_{n-1} = s$. Z toho dostáváme:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(s_n - s_{n-1}) = s - s = 0.$$

To už je požadovaná podmínka a důkaz je tímto ukončen.

Je důležité si uvědomit, že tato podmínka je nutná, nikoliv postačující. Je-li totiž řada $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergentní, pak nutně musí $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Ovšem je-li $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ pak to **neznamená**, že by musela příslušná řada konvergovat. Typickým příkladem je harmonická řada $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$. Limita n-tého členu $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0$, ale harmonická řada je divergentní, jak v dalším textu ukážeme.

(viz kapitola 3)

Nutné podmínky konvergence lze užít k důkazu, že řada diverguje. (Pokud ukážeme, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, pak řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ nemůže konvergovat.)

Dále lze nutné podmínky konvergence užít k důkazu, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, pokud dokážeme konvergenci řady určené touto posloupností, protože v některých případech je (s použitím vhodných kritérií konvergence) důkaz konvergence příslušné řady snazší, než výpočet limity posloupnosti.

Příklad 6: Mějme řadu

$$\sum_{k=0}^{\infty}(3k^2 - k + 2).$$

Řada je na první pohled divergentní, ale abychom tuto domněnku dokázali, museli bychom (bez znalosti nutné podmínky konvergence) najít vyjádření pro částečné součty a ukázat, že posloupnost částečných součtů je divergentní. To však lze obejít právě užitím nutné podmínky konvergence. Je evidentní, že $\lim\limits_{n\to\infty}(3k^2 - k + 2) \neq 0$. (Tato limita je dokonce nevlastní a je rovna ∞.) Dle nutné podmínky konvergence původní řada nemůže konvergovat.

Příklad 7: Máme vyšetřit konvergenci řady

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2 + 4k + 5}{2 - k - k^2}.$$

Rozumně popsat posloupnost částečných součtů této řady je v tomto případě nemožné. Ale nutná podmínka konvergence je opět cestou k řešení. Spočteme limitu

$$\lim_{k\to\infty} \frac{k^2 + 4k + 5}{2 - k - k^2} = \lim_{k\to\infty} \frac{k^2\left(1 + \frac{4}{k} + \frac{5}{k^2}\right)}{k^2\left(\frac{2}{k^2} - \frac{1}{k} - 1\right)} = -1.$$

Limita k-tého členu je opět nenulová, tudíž řada musí divergovat.

Příklad 8: Máme rozhodnout o konvergenci či divergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n + 6}{2n^2 - n + 2}.$$

Popisovat posloupnost částečných součtů opět nepovede k cíli. Budeme chtít použít druhého nástroje, který máme zatím k dispozici, sice nutné podmínky konvergence. Spočteme limitu n-tého členu posloupnosti, určující tuto řadu.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n+6}{2n^2-n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(3+\frac{6}{n}\right)}{n^2\left(2-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}\right)} = 0.$$

Vidíme, že limita je rovna 0. Pro nás to znamená, že na základě nutné podmínky konvergence nelze o divergenci ani konvergenci řady nic říci, protože podmínka nulové limity n-tého členu ke konvergenci řady nestačí.[1]

S příkladem využití nutné podmínky konvergence řady k důkazu nulové limity n-tého členu zatím počkáme do chvíle, než vyslovíme některá kritéria konvergence řad. Jinak bychom museli metodu ukázat na příkladech, kde je její využití evidentně nepraktické. Dříve než tato kritéria vyslovíme, je nutné zavést některé elementární operace s řadami, které budou nezbytné pro řešení dalších problémů. Máme nyní na mysli operace sčítání řad a násobení řady reálnou konstantou.

2.3 Sčítání řad; konstantní násobek řady

Sčítání řad a násobení řady reálnou konstantou zavedeme zcela přirozeně tak, jak tomu bylo u konečných součtů. Je třeba však ukázat, že takto zavedené operace budou korektní, tzn. že např. součet konvergentních řad bude opět konvergentní a reálný násobek konvergentní řady bude také konvergentní. To bude obsahem následující věty.

Věta 2.3:
Nechť $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ jsou *konvergentní* řady a nechť c je libovolné reálné číslo. Potom:

[1] Až probereme některá další kritéria k posuzování konvergence a divergence řad, snadno ukážeme, že tato řada je divergentní. V této fázi ovšem ještě nejsme schopni rozhodnout.

a) Konverguje řada $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k)$ a platí: $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k + \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$

b) Konverguje řada $\sum\limits_{k=1}^{\infty} ca_k$ a platí: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} ca_k = c\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$

Důkaz:

a) Obě řady $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergují, mají tedy konečné součty. Označme součet řady $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = s$ a součet řady $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k = t$; $s, t \in R$. Řadu $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k)$ můžeme napsat jako posloupnost částečných součtů tvaru $\left\{\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k + b_k)\right\}_{n=1}^{\infty}$. Každý částečný součet je konečným součtem a můžeme jej dle věty 1.1 (2.) napsat ve tvaru $\left\{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k + \sum\limits_{k=1}^{n} b_k\right\}_{n=1}^{\infty}$. Součet řady nalezneme výpočtem limity posloupnosti částečných součtů.

$$\lim_{n\to\infty}(\sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k + \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k = s + t.$$

Větu o limitě součtu posloupností jsme mohli použít, protože obě limity částečných součtů $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ a $\sum\limits_{k=1}^{n} b_k$ existují vzhledem ke konvergenci obou řad. Součet s+t je reálné číslo, protože i s a t byla reálná čísla. Tím je dokázána nejen konvergence řady $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k)$, ale i kýžená rovnost $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k + \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$.

b) Analogicky jako při důkazu první části věty označme součet řady $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = s$. Řadu $\sum\limits_{k=1}^{\infty} ca_k$ opět napíšeme jako posloupnost částečných součtů $\left\{\sum\limits_{k=1}^{n} ca_k\right\}_{n=1}^{\infty}$ Částečné součty upravíme s využitím věty 1.1 (1.) a dostaneme $\left\{c\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\right\}_{n=1}^{\infty}$. Zbývá spočíst limitu těchto částečných součtů a najít tak součet řady $\sum\limits_{k=1}^{\infty} ca_k$.

$$\lim_{n\to\infty} c\sum_{k=1}^{n} a_k = \lim_{n\to\infty} c \cdot \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k = c \cdot s.$$

Větu o součinu limit posloupností jsme opět mohli použít, neboť obě limity existují. První je limitou konstantní posloupnosti a druhá existuje vzhledem ke konvergenci řady $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$. Limita částečných součtů řady $\sum\limits_{k=1}^{\infty} ca_k$ je tedy $c \cdot s$. Tím je tvrzení b) dokázáno.

Právě dokázaná věta nám umožní definovat nejen nové pojmy, jako je součtová řada nebo reálný násobek řady, ale především nám rozšiřuje možnosti práce s konvergentními řadami, jak si ukážeme na příkladech.

Definice 2.6:
Nechť řady $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergují a c, d jsou libovolná reálná čísla.
Potom:

- Řadu $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k)$ nazveme *součet* řad $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$.
- Řadu $\sum\limits_{k=1}^{\infty} ca_k$ nazveme *konstantním násobkem* řady $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$.
- Řadu $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (ca_k + db_k)$ nazveme *lineární kombinací* řad $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$.

Poznamenejme, že lineární kombinace řad je vždy konvergentní, pokud konvergují jednotlivé řady zvlášť. Z konvergence lineární kombinace řad ovšem neplyne, že jednotlivé řady konvergují. Ukažme si to na následujícím příkladě:

Uvažme tuto situaci: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k$, $c = 1$ a $d = -1$.

Lineární kombinace $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (ca_k + db_k) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} (1 \cdot (-1)^k + (-1) \cdot (-1)^k) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} ((-1)^k - (-1)^k) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} 0 = 0$, takže lineární kombicace je konvergentní řada se součtem 0. Ale řada $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k$ diverguje, což snadno ukážeme např. pomocí nutné podmínky konvergence, protože $\lim\limits_{k \to \infty} (-1)^k$ neexistuje.

Ukažme si práci s lineárními kombinacemi řad na několika příkladech.

Příklad 9: Určete součet řady

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\left(\frac{1}{2}\right)^k + \left(\frac{2}{3}\right)^k \right).$$

Vidíme, že řada je určena součtem dvou geometrických posloupností

$\left(\frac{1}{2}\right)^k$ a $\left(\frac{2}{3}\right)^k$. První je geometrická posloupnost s prvním členem $\frac{1}{2}$ (jak lehce zjistíme, dosadíme-li do vztahu pro k-tý člen $k = 1$) a kvocientem také $\frac{1}{2}$. Druhá posloupnost má první člen $\frac{2}{3}$ a kvocient také $\frac{2}{3}$. Kvocienty obou posloupností jsou menší než 1, takže obě geometrické řady konvergují a lze tedy určit jejich součet dle vztahu $s = \frac{a_1}{1-q}$ odvozeného v příkladě 4.

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^k + \left(\frac{2}{3}\right)^k\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} + \frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}} = 1 + 2 = 3.$$

Příklad 10: Určete součet řady

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^k + \left(\frac{2}{3}\right)^k\right).$$

Zadání je *téměř* stejné. Jediným rozdílem je, že začínáme sčítat od $k = 0$ a ne od $k = 1$, jak bylo v předchozím příkladě. Kvocienty příslušných geometrických posloupností, určujících řadu, jsou stejné jako v předchozím příkladě a to $\frac{1}{2}$ a $\frac{2}{3}$. Ovšem vzhledem k tomu, že nesčítáme od prvního členu, ale od "nultého členu", musíme jako a_1 ve vztahu pro součet geometrické řady vzít $\left(\frac{1}{2}\right)^0$ a $\left(\frac{2}{3}\right)^0$, tedy jedničky. Dostaneme:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^k + \left(\frac{2}{3}\right)^k\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k + \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} + \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 2 + 3 = 5.$$

Příklad 11: Sečtěte:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{3}{5^k} + \frac{5}{(-3)^k}\right).$$

Řadu půjde opět sečíst využitím vztahu pro součet geometrické řady a algebraických operací s řadami. Přepíšeme původní řadu tak, aby byly příslušné geometrické řady lépe vidět a poté je sečteme.

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{3}{5^k} + \frac{5}{(-3)^k}\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(3\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^k + 5\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^k\right) =$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} 3\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^k + \sum_{k=1}^{\infty} 5\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^k = 3\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^k + 5\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^k$$

Dostáváme tedy dvě geometrické řady. První řada má počáteční člen $\frac{1}{5}$ a kvocient také $\frac{1}{5}$. Druhá řada má první člen $\left(-\frac{1}{3}\right)$ a kvocient též $\left(-\frac{1}{3}\right)$. Oba kvocienty jsou v absolutní hodnotě menší než 1, takže je můžeme sečíst:

$$3\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^k+5\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^k = 3\cdot\frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}}+5\cdot\frac{\left(-\frac{1}{3}\right)}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)} = = 3\cdot\frac{1}{4}-5\cdot\frac{1}{4} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}.$$

Příklad 12: Sečtěte:

$$\sum_{k=0}^{\infty} 4\cdot 10^{-2k}.$$

V zadání je opět ukryta geometrická řada, je jen třeba výraz upravit tak, aby byla lépe vidět.

$\sum_{k=0}^{\infty} 4\cdot 10^{-2k} = \sum_{k=0}^{\infty} 4\cdot (10^{-2})^k.$

Je možné, stejně jako v předchozím příkladě, konstantu 4 vytknout a sečíst pouze řadu $\sum_{k=0}^{\infty}(10^{-2})^k$. Ukažme si ale i jiný způsob. V případě geometrické řady plní konstanta 4 funkci prvního členu. Navíc sčítáme od nuly, takže první člen bude $4\cdot(10^{-2})^0 = 4\cdot\frac{1}{100^0} = 4\cdot 1 = 4$. Proto můžeme řadu sečíst pomocí již mnohokrát užitého vztahu, kdy za a_1 dosadíme 4 a kvocient $q = 10^{-2} = \frac{1}{100}$. Dostaneme:

$s = \frac{4}{1-\frac{1}{100}} = \frac{4}{\frac{99}{100}} = \frac{400}{99}.$

Úkoly a cvičení:

1. Spočtěte součet řad:

a) $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k^2-1}$ $\left[\frac{3}{2}\right]$

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$ $\left[\frac{1}{3}\right]$

d) $\sum_{k=3}^{\infty}\frac{1}{k^2+k-6}$ $\left[\frac{137}{300}\right]$

e)* $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k^3-k}$ $\left[\frac{1}{4}\right]$

Návod: Rozložte výrazy ve jmenovateli na parciální zlomky, rozepište několik prvních členů a pokuste se najít n-tý částečný součet, jak je ukázáno v příkladě 5.

2. Dokažte, že divergují řady:

a) $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k(6+5k-k^2)}{2k^3-3}$

b) $\sum_{k=0}^{\infty}\sin\left(\frac{3k\pi}{2}\right)$

Návod: Využijte nutnou podmínku konvergence.

3. Vypočtěte:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-3}}$ [8]

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4^n} + \frac{(-1)^n}{3^n} \right)$ $\left[\frac{1}{12} \right]$

c) $5 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt[4]{5} \cdot \sqrt[8]{5} \cdot \ldots$ [25]

d) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \left(\frac{2^{n-2}+3^{n+2}}{5^{n+1}} \right)$ $\left[-\frac{65}{56} \right]$

Návod: vhodně výrazy upravte a užijte vztahu pro součet geometrické řady, odvozeného v příkladě 4.

3. Řady s nezápornými členy

3.1 Základní pojmy

Definice 3.1:(řada s nezápornými členy)

Řadu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ nazveme *řadou s nezápornými členy*, platí-li pro všechna $n \in N : a_n \geq 0$.

Řadu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ nazveme *řadou s kladnými členy*, jestliže pro všechna $n \in N$ platí: $a_n > 0$.

Věta 3.1:

Nechť $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s nezápornými členy. Potom tato řada konverguje nebo diverguje k $+\infty$. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, právě když posloupnost jejích částečných součtů je omezená.

Důkaz:

Tvrzení věty je nasnadě. Protože $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s nezápornými členy, nemůže řada divergovat k $-\infty$. Samozřejmě nemůže ani oscilovat, protože pak by nesměla limita částečných součtů existovat. Zde však sčítáme pouze nezáporné členy, takže pro libovolný částečný součet platí: $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \geq 0$ a navíc $(\forall n \in N) : s_{n+1} \geq s_n$. Posloupnost částečných součtů je tedy zdola omezená a neklesající. Pak, je-li tato posloupnost shora omezená, musí existovat její reálná limita dle věty o limitě monotónní posloupnosti. Z tohoto již konvergence řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ plyne. Jestliže posloupnost částečných součtů není omezená, je řada divergentní a vzhledem k nezápornosti členů musí divergovat k $+\infty$.

3.2 Kritéria pro konvergenci a divergenci řad s nezápornými členy

V následující části vyslovíme některá kritéria konvergence či divergence řady s nezápornými členy. Půjde o tvrzení, která nám umožní rozhodnout o konvergenci nebo divergenci řady, aniž bychom znali její částečné součty a hledali jejich limitu. V mnoha případech totiž stačí zjistit, zda daná řada konverguje a znalost jejího součtu již není podstatná.

3.2.1 Srovnávací kritérium

Prvním kritériem pro konvergenci nebo divergenci řady, které uvedeme, bude srovnávací kritérium. K jeho využití je nutné odhadnout dopředu, zda daná řada bude divergovat nebo konvergovat a potom ji "porovnáme" s jinou řadou, o které již víme, že konverguje nebo diverguje. Kritérium nyní zformulujme v následující větě:

Věta 3.2:(Srovnávací kritérium)
Nechť $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou řady s nezápornými členy, pro které platí:

$$(\forall n \in N), (n \geq n_0): \quad 0 \leq a_n \leq b_n.$$

Potom platí:

1. Jestliže konverguje $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, potom $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ také konverguje.
2. Jestliže $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje, potom $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ také diverguje.

Důkaz:

1. Označme s_n n-tý částečný součet řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ (tedy $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$). Obdobně označíme t_n n-tý částečný součet řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ (tedy $t_n = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k$). Dle předpokladu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, takže posloupnost částečných součtů $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ je omezená, dle věty 3.1. Existuje tedy konstanta $K \in R$ tak,

že pro všechna $n \in N, n \geq 1$ je $t_n \leq K$. Dále dle předpokladu platí: $\forall n \in N, n \geq n_0 : \quad 0 \leq a_n \leq b_n$. Z toho plyne, že pro všechna $n \geq n_0$ je $s_n \leq t_n$. Ale $t_n \leq K$, takže i $s_n \leq K$. Z toho vyplývá, že posloupnost částečných součtů $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ je také omezená, proto (opět dle věty 3.1) tato řada konverguje a důkaz je ukončen.

2. Postup důkazu přes částečné součty by byl obdobný. Stačí si ovšem uvědomit, že vzhledem k tomu, že řada s nezápornými členy, která nekonverguje, diverguje k $+\infty$, jde pouze o obměnu prvního tvrzení.[2]

Zjednodušeně řečeno, věta netvrdí nic jiného, než že pokud máme dvě řady, z nichž jedna má "menší členy než druhá", pak jestliže řada s "většími" členy konverguje, musí konvergovat i řada s členy "menšími" a naopak, jestliže "menší" diverguje, musí divergovat i "větší".

Jak již bylo řečeno, při aplikaci srovnávacího kritéria, musíme zkoumanou řadu porovnávat s jinou řadou, o níž předem víme, že konverguje či diverguje. Je dobré mít na paměti následující tvrzení:

Věta 3.3: Nechť $\alpha \in R$. Pak $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ konverguje pro $\alpha > 1$ a diverguje pro $\alpha \leq 1$.
Pozn.: Tvrzení později elegantně dokážeme např. užitím integrálního kritéria.

Nyní si předveďme aplikaci srovnávacího kritéria na několika příkladech.

Příklad 1: Vyšetřete konvergenci řady:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 + (-1)^n}{10^n}.$$

Jak vidíme, libovolný člen řady je kladný, neboť v čitateli se v závislosti na lichém nebo sudém n střídají čísla 4 a 2, což jsou čísla kladná, a ve jmenovateli zlomku je výraz 10^n, který je kladný pro všechna přirozená n. Kdyby v čitateli byla konstanta, jde o geometrickou řadu k kvocientem $\frac{1}{10}$, o níž víme, že konverguje. Budeme chtít tedy ukázat

[2] Z hlediska matematické logiky: Jsou-li A a B dva výroky, je tautologií formule:

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (nonB \Rightarrow nonA)$$

.

konvergenci zadané řady. Chceme-li toho docílit užitím srovnávacího kritéria, musíme členy původní řady omezit shora členy konvergentní řady. To provedeme například takto:

$$\forall n \in N : \frac{3+(-1)^n}{10^n} \leq \frac{4}{10^n}.$$

Mohli jsme v čitateli použít i libovolnou jinou konstantu, která je větší než čtyři. Jedinou podmínkou je, aby odhad skutečně omezoval členy původní řady shora. Jak toto omezení zajistíme závisí v podstatě na naší libovůli.
Nyní již máme členy, které určují geometrickou řadu.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{10^n} = 4 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n} = 4 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n$$

Jde tedy o geometrickou řadu s kvocientem $\frac{1}{10}$, která je (jak již víme) konvergentní, takže dle srovnávacího kritéria je konvergentní i původní řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3+(-1)^n}{10^n}$.

Příklad 2: Rozhodněte o konvergenci nebo divergenci řady:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{9^n}, \quad a_n \in \{0, 1, ..., 7\}.$$

Situace je obdobná jako v příkladě prvním. V čitateli se nachází čísla mezi 0 a 7, ve jmenovateli je výraz 9^n. Všechny výrazy jsou nezáporné, takže jde opěr o řadu s nezápornými členy. Užijeme srovnávacího kritéria a odhadneme n-tý člen shora.

$$\forall n \in N : \frac{a_n}{9^n} \leq \frac{7}{9^n}$$

Vidíme, že členy posloupnosti opět určují geometrickou řadu:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{9^n} = 7 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9^n} = 7 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{9}\right)^n$$

Kvocient řady je $\frac{1}{9}$, takže řada $7 \cdot \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{9}\right)^n$ konverguje a dle srovnávacího kritéria konverguje i řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{9^n}$.

Příklad 3: Určete, zda konverguje nebo diverguje řada:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{6^n}.$$

U této řady budeme také předpokládat konvergenci, protože opět "připomíná" geometrickou řadu. v čitateli i jmenovateli jsou nezáporné výrazy, jde tedy o řadu s nezápornými členy. Abychom mohli užít srovnávací kritérium, musíme členy řady omezit shora. Zde je to však komplikovanější, protože nelze najít konstantu, která by omezovala shora každé přirozené číslo n. Je tedy otázka, zda v tomto případě lze srovnávací kritérium použít. Skutečně bychom konvergenci této řady dokázali pohodlněji jiným kritériem, nicméně i zde můžeme srovnávací kritérium využít, neboť si pomůžeme jednoduchou úvahou:
Pro každé přirozené číslo n zřejmě platí: $n \leq 5^n$, takže můžeme členy původní řady omezit takto: [3]

$$\frac{n}{6^n} \leq \frac{5^n}{6^n}.$$

Proč jsme zvolili právě 5^n je nasnadě. Chceme členy původní řady omezit členy geometrické řady s kvocientem z intervalu $(0; 1)$, abychom zaručili její konvergenci. (Takže jsme mohli pochopitelně místo hodnoty 5 vzít i jiný odhad.) Nyní je již situace analogická jako v předchozích příkladech.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{6^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

Tato řada je již geometrická řada s kvocientem $\frac{5}{6}$, takže je to řada konvergentní a dle srovnávacího kritéria je konvergentní i původní řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{6^n}$.

Příklad 4: Rozhodněme o konvergenci nebo divergenci řady:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n+4}{3n^3+2n+1}.$$

Pro počáteční odhad, zda řada konverguje nebo diverguje porovnáme stupně polynomů v čitateli a jmenovateli zlomku. Stupeň čitatele je jedna, stupeň jmenovatele je tři. Z toho plyne, že pro velká n se členy

[3] Využíváme znalosti o exponenciální funkci se základem $a > 1$, pro kterou platí: $x < a^x$.

řady "chovají jako $\frac{5}{3n^2}$". Stupeň ve jmenovateli je větší než jedna, proto předpokládáme (s užitím věty 3.3), že řada bude konvergovat. Musíme tedy řadu opět omezit shora tak, aby majorantní řada byla ve tvaru $\frac{k}{n^2}$, kde $k \in R^+$. Máme-li hodnotu **kladného** zlomku zvětšit, musíme buď zvětšit hodnotu výrazu v čitateli, nebo zmenšit hodnotu výrazu ve jmenovateli. Zároveň se snažíme nahrazovat členy s různými mocninami členy se stejnými mocninami, abychom mohli členy sečíst a dostali ve zlomku podíl mocnin n, který zkrátíme a tím dostaneme požadovaný tvar.

$$\frac{5n+4}{3n^3+2n+1} \leq \frac{5n+4n}{3n^3+2n+1} \leq \frac{9n}{3n^3} = \frac{3}{n^2}$$

V čitateli jsme nahradili číslo 4 výrazem $4n$, čímž jsme hodnotu zlomku zvětšili, neboť $\forall n \in N : 4n \geq 4$. V dalším kroku jsme ze jmenovatele zlomku vypustili výraz $2n+1$, čímž jsme hodnotu jmenovatele zmenšili, protože je zřejmě $\forall n \in N : 0 \leq 2n+1$ a tím jsme opět zvětšili hodnotu celého zlomku. Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n^2} = 3 \cdot \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ je konvergentní dle věty 3.3, takže dle srovnávacího kritéria je konvergentní i původní řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5n+4}{3n^3+2n+1}$.

Příklad 5: Rozhodněte, zda konverguje nebo diverguje řada:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2-1}{n^3+n^2+1}.$$

Abychom odhadli, zda bude řada konvergovat nebo divergovat, opět porovnáme stupně polynomů v čitateli a jmenovateli zlomku. Stupeň čitatele je dvě, jmenovatele tři. Pro velká n se zlomek "chová jako $\frac{2}{n}$". Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ je harmonická řada, která je divergentní, takže budeme chtít ukázat divergenci zadané řady. Nyní musíme členy původní řady omezovat zdola tak, abychom dostali členy nějaké divergentní řady (v našem případě členy harmonické řady). Budeme zmenšovat hodnotu zlomku a to tak, že buď zmenšíme hodnotu výrazu v čitateli nebo zvětšíme hodnotu výrazu ve jmenovateli. Cílem je jako v předchozím příkladu nahradit členy s různými mocninami členy se stejnými mocninami, abychom po úpravě a zkrácení dostali člen tvaru $\frac{k}{n}$, kde opět $k \in R^+$.

$$\frac{2n^2-1}{n^3+n^2+1} \leq \frac{2n^2-n^2}{n^3+n^3+n^3} = \frac{n^2}{3n^3} = \frac{1}{3n}$$

Zde jsme v čitateli nahradili člen -1 členem $-n^2$, čímž jsme hodnotu celého zlomku zmenšili, neboť $(\forall n \in N) : 1 \leq n^2$. Ve jmenovateli jsme každý z výrazů n^2 a 1 nahradili výrazem n^3, čímž jsme zvětšili hodnotu jmenovatele a zmenšili tak celkovou hodnotu zlomku. Evidentně by stačilo nahradit celý výraz $n^2 + 1$ pouze jedním výrazem n^3, protože $(\forall n \in N), (n > 1) : n^3 \geq n^2 + 1$. Obojí je v pořádku, takže i zde máme ve své podstatě jistou libovůli, jak omezení provést, pokud zajistíme správnost odhadu a nezměníme dokazovanou vlastnost řady. Tím máme na mysli, že chceme-li dokázat divergenci řady a odhadneme její členy pomocí členů řady, která je konvergentní (nebo naopak), pak je srovnávací kritérium nepoužitelné a závěr nelze stanovit.
Vrátíme-li se k našemu příkladu, pak jsme odhadli členy původní řady zdola členy řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n} = \frac{1}{3} \cdot \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, která je divergentní, takže dle srovnávacího kritéria je divergentní i původní řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2-1}{n^3+n^2+1}$.

Příklad 6: Určete, zda konverguje či diverguje řada:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 - n}{2n^4 + 5n + 7}$$

Analogicky jako v předchozím příkladu zjistíme, že stupně polynomů v čitateli a jmenovateli se liší o 1, takže budeme chtít ukázat divergenci zadané řady srovnáním s harmonickou řadou $k \cdot \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Budeme odhadovat členy zadané řady zdola, zmenšováním hodnoty výrazu v čitateli a zvětšováním hodnoty výrazu ve jmenovateli. Podíváme-li se na čitatele zlomku, nelze nahradit člen n výrazem n^3, jak jsme prováděli v předchozích příkladech, protože by v čitateli zůstala nula. Odhad by byl sice v pořádku, ale dostali bychom nulovou řadu a nepodařilo by se nám divergenci dokázat. Místo n^3 vezmeme nějaký zlomek, například $\frac{n^3}{2}$, protože pro $\forall n > 1$ platí: $\frac{n^3}{2} > n$. Odhad může být tedy nádledující:

$$\frac{n^3 - n}{2n^4 + 5n + 7} \geq \frac{n^3 - \frac{n^3}{2}}{2n^4 + n^4} = \frac{\frac{n^3}{2}}{3n^4} = \frac{n^3}{6n^4} = \frac{1}{6n}.$$

Vidíme, že odhad je v pořádku, neboť hodnota výrazu v čitateli je menší a hodnota výrazu ve jmenovateli větší než v původním zlomku (neboť $n^4 \geq 5n + 7$ pro $\forall n \in N : n > 2$), takže hodnotu celého zlomku jsme zmenšili. Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{6n} = \frac{1}{6} \cdot \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ je divergentní a dle srovnávacího kritéria je divergentní i původní řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^3-n}{2n^4+5n+7}$.

Pozn.: Jak je vidět, tento odhad platí pouze pro přirozená čísla větší než dvě. Pro $n = 1$ a $n = 2$ odhad ve jmenovateli není správně. Nicméně vzhledem k tomu, že konvergence a divergence řady nezávisí na konečném počtu členů, není tato skutečnost nikterak omezující.

Příklad 7: Rozhodněte o konvergenci nebo divergenci řady:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^4 - n^2 + 1}}.$$

Pokusíme se konvergenci nebo divergenci řady opět odhadnout. Zřejmě budeme chtít ukázat, že řada konverguje a srovnat ji s řadou $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^4}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$, což je konvergentní řada dle věty 3.3, protože $\frac{4}{3} > 1$. Budeme tedy členy této řady omezovat shora konvergentní řadou, čili zvětšovat celkovou hodnotu zlomku a to buď zvětšováním hodnoty výrazu v čitateli nebo zmenšováním hodnoty výrazu ve jmenovateli. Protože v čitateli je pouze jednička, budeme se snažit zmenšovat hodnotu výrazu ve jmenovateli. Vynecháním jedničky z výrazu pos odmocninou hodnotu výrazu jistě zmenšíme. Výraz n^2 však nelze nahradit výrazem n^4, protože by se pak jmenovatel rovnal nule. Použijeme tedy obdobného "triku" jako v příkladě 6. Výraz n^2 nahradíme např. výrazem $\frac{n^4}{3}$, čímž hodnotu jmenovatele zmenšíme, neboť $\frac{n^4}{3} \geq n^2$ pro $\forall n \in N : n > 1$. (Stejně tak bychom mohli vzít i $\frac{n^4}{2}$ nebo kterýkoliv jiný zlomek. Tím dostáváme:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{n^4 - n^2 + 1}} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{n^4 - n^2}} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{n^4 - \frac{n^4}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{2}{3}n^4}} = \sqrt[3]{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{n^4}} = \sqrt[3]{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}.$$

Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$ je konvergentní dle věty 3.3, proto dle srovnávacího kritéria konverguje i původní řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^4-n^2+1}}$.

3.2.2 Limitní srovnávací kritérium

Druhé kritérium pro konvergenci nebo divergenci řad s nezápornými členy, které uvedeme, je limitní srovnávací kritérium. Podobně jako u předchozího srovnávacího kritéria bude k jeho použití zapotřebí srovnat členy zkoumané řady s členy jiné řady, o které víme zda konverguje či diverguje. Nebudeme zde však porovnávat přímo velikosti členů ale zkoumat, zda-li klesají "srovnatelně rychle". Co tím myslíme objasňuje následující věta:

Věta 3.4:(Limitní srovnávací kritérium)
Nechť $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s nezápornými členy a nechť $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ je řada s kladnými členy. Nechť existuje $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = A,\ A \geq 0$. Potom platí:

1. Jestliže $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = A,\ A \in \langle 0;\infty)$ a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, potom konverguje i $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.
2. Jestliže $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = A,\ A \in (0;\infty\rangle$ a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ diverguje, potom diverguje i $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.
3. Jestliže $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = A,\ A \in (0;\infty)$, pak obě řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ buď konvergují nebo divergují.

Důkaz:

1. Víme, že $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = A$, kde A je reálné nezáporné číslo. Tedy je tato limita vlastní. Z teorie posloupností víme, že každá konvergentní posloupnost je omezená. V našem případě je to posloupnost $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$. Protože $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ je navíc posloupnost nezáporných členů, znamená to, že existuje kladná reálná konstanta k tak, že pro $(\forall n \in N)(n \geq 0)$: $\frac{a_n}{b_n} \leq k$. Z nerovnosti dostaneme:

$$\frac{a_n}{b_n} \leq k \Rightarrow a_n \leq kb_n.$$

   Dle předpokladu je $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergentní. Protože je $a_n \leq kb_n$ pro $\forall n \in N$ je dle srovnávacího kritéria konvergentní i $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

2. Dle předpokladu je $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = A$, kde $A \in (0;\infty)$. Dle definice limity posloupnosti to znamená, že pro $(\forall\epsilon > 0)$ $(\exists n_0 \in N)$ tak, že pro $(\forall n \in N); (n > n_0)$ platí: $\left|\frac{a_n}{b_n} - A\right| < \epsilon$. Rozepsáním nerovnosti dostaneme:

$$-\epsilon < \frac{a_n}{b_n} - A < \epsilon$$

$$A - \epsilon < \frac{a_n}{b_n} < A + \epsilon.$$

Protože je $A > 0$ existuje takové $\epsilon > 0$, že $A - \epsilon > 0$. Takové ϵ označme ϵ_0 (například můžeme vzít $\epsilon_0 = \frac{A}{2}$). Nyní najdeme $n_0 \in N$ tak, že pro $(\forall n \in N); (n > n_0)$ platí:

$$A - \epsilon_0 < \frac{a_n}{b_n} < A + \epsilon_0.$$

Takové n_0 existuje z definice limity. Protože bylo ϵ_0 pevně zvoleno, je $A - \epsilon_0$ kladná konstanta. Protože $A - \epsilon_0 < \frac{a_n}{b_n}$ pro $\forall n > n_0$ a $b_n \neq 0$ ($\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ je řada s kladnými členy), dostáváme:$(A - \epsilon_0)b_n < a_n$. Jelikož dle předpokladu tvrzení je řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ divergentní, je dle srovnávacího kritéria divergentní i řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ a důkaz je hotov.

3. Poslední, třetí tvrzení ukážeme s využitím úvah z důkazu druhé části věty. Opět předpokládáme, že $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = A$, $A \in (0;\infty)$. Stejně jako v předchozí části důkazu najdeme $\epsilon_0 > 0$ tak, aby $A - \epsilon_0 > 0$. K tomuto ϵ_0 najdeme dle definice limity posloupnosti $n_0 \in N$ tak, že pro $\forall n > n_0$ platí:

$$A - \epsilon_0 < \frac{a_n}{b_n} < A + \epsilon_0$$

$$(A - \epsilon_0)b_n < a_n < (A + \epsilon_0)b_n.$$

Užijeme-li těchto nerovností a srovnávacího kritéria, tvrzení třetí části věty je již zřejmé.

Příklad 8: Rozhodněte zda konverguje nebo diverguje řada:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n}$$

Protože obor hodnot funkce sinus je interval $\langle -1; 1\rangle$ je třeba nejprve ukázat, že zadaná řada je skutečně řadou s nezápornými členy.

Pro každé přirozené $n \geq 1$ zřejmě platí: $0 < \frac{1}{n} \leq 1$. Funkce sinus nabývá nezáporných hodnot na intervalu $\langle 0; \pi\rangle$ a je zřejmé, že pro $\forall n \in N : n \geq 1 : \frac{1}{n} \in \langle 0; 1\rangle \subset \langle 0; \pi\rangle$, takže $\sin\frac{1}{n} \geq 0$ pro každé přirozené $n \geq 1$. Chceme-li při vyšetřování této řady užít limitní srovnávací kritérium, musíme najít nejprve řadu, jejíž členy lze s členy zadané řady srovnávat a o které víme, zda konverguje nebo diverguje. Vidíme, že $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, navíc z diferenciálního počtu víme, že $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. S využitím Heineho věty a věty o limitě složené funkce zjistíme, že $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1$. Limita leží v intervalu $(0; \infty)$ a řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverguje. Dle limitního srovnávacího kritéria (Věta 3.4 část 2.) diverguje i původní řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n}$.

Příklad 9: Určete, zda konverguje nebo diverguje řada:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-1}{5n^3+n+2}$$

O konvergenci této řady bychom mohli rozhodnout i obyčejným srovnávacím kritériem, neboť je tento příklad analogický situaci z příkladu 4. Je to řada s kladnými členy pro každé přirozené n jedničkou počínaje, takže první předpoklad věty je splněn. Zde, podobně jako ve zmíněném příkladě odhadujeme, že řada bude konvergentní, protože se pro dostatečně velká n její členy "chovají jako členy tvaru $\frac{3}{5n^2}$". U srovnávacího kritéria bychom museli přicházet na úpravy členů původní řady. Úpravy, kterými bychom tyto členy omezili jinými členy tvaru $\frac{k}{n^2}$, které určují dle věty 3.3 konvergentní řadu. Při užití limitního srovnávacího kritéria tyto úpravy odpadají. Stačí spočíst limitu $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$, kde a_n bude člen zkoumané řady a b_n člen $\frac{1}{n^2}$.

Dostaneme:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3n-1}{5n^3+n+2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(3n-1)}{5n^3+n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^3-n^2}{5n^3+n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3\left(3-\frac{3}{n}\right)}{n^3\left(5+\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^3}\right)} = \frac{3}{5}.$$

Limita je $\frac{3}{5}$ a Protože $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konverguje, konverguje dle limitního srovnávacího kritéria i řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3n-1}{5n^3+n+2}$.

Jak je vidět, je nespornou výhodou limitního srovnávacího kritéria, že nevyžaduje vymýšlení odhadů a úprav členů zkoumané řady, ovšem vyžaduje zběhlost ve výpočtu limit posloupností. Je tedy na individuálním uvážení, která cesta bude schůdnější. Navíc řadu uvedenou v příkladě 8 bychom obyčejným srovnávacím kritériem nerozřešili.

3.2.3 Podílové srovnávací kritérium

Posledním srovnávacím kritériem, které uvedeme, bude podílové srovnávací kritérium. Toto kritérium vychází z porovnání podílu dvou sousedních členů zkoumané řady s podílem dvou sousedních členů jiné řady, o jejíž konvergenci nebo divergenci již umíme rozhodnout. Kritérium vyslovíme v následující větě.

Věta 3.5:(Podílové srovnávací kritérium)
Nechť $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou řady s kladnými členy.
Nechť pro $\forall n \in N : n \geq 1$ platí:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}.$$

Pak platí:

1. Jestliže řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, pak konverguje i řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.
2. Jestliže řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje, diverguje i řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

Důkaz:

1. Je-li splněn předpoklad věty pak platí:

$$\frac{a_2}{a_1} \leq \frac{b_2}{b_1} \wedge \frac{a_3}{a_2} \leq \frac{b_3}{b_2} \wedge \ldots \wedge \frac{a_n}{a_{n-1}} \leq \frac{b_n}{b_{n-1}}.$$

Protože obě řady jsou řady s kladnými členy, můžeme všechny nerovnosti mez sebou vynásobit aniž by se nerovnost změnila. Dostaneme:

$$\frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_3}{a_2} \cdot \frac{a_4}{a_3} \cdot \ldots \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}} \leq \frac{b_2}{b_1} \cdot \frac{b_3}{b_2} \cdot \frac{b_4}{b_3} \cdot \ldots \cdot \frac{b_{n-1}}{b_{n-2}} \cdot \frac{b_n}{b_{n-1}}$$

Jestliže zlomky postupně vykrátíme, dostaneme nerovnost:

$$\frac{a_n}{a_1} \le \frac{b_n}{b_1} \qquad \Rightarrow \qquad a_n \le \frac{a_1}{b_1} \cdot b_n.$$

Získali jsme vztah mezi n-tými členy obou řad a tvrzení věty již plyne ze srovnávacího kritéria.

2. Zde si opět stačí uvědomit, že druhá část tvrzení je obměnou prvního, takže jej implikuje tvrzení 1 a důkaz je hotov.

Příklad 10: Máme vyšetřit konvergenci nebo divergenci řady:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

Jde o řadu s kladnými členy, takže předpokladům věty vyhovuje. Podívejme se nejprve, jak vypadá podíl dvou sousedních členů.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2(n+1))!}{((n+1)!)^2} \cdot \frac{(n!)^2}{(2n)!} = \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(n+1)^2(n!)^2} \cdot \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

Po zkrácení a úpravě dostáváme:

$$\frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = \frac{2(2n+1)}{n+1} = \frac{4n+2}{n+1}.$$

Výsledek je podíl lineárních výrazů, takže se pokusíme porovnat tento podíl s harmonickou řadou. Pro harmonickou řadu dostáváme:

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{n}{1} = \frac{n}{n+1}.$$

Vidíme, že $\frac{b_{n+1}}{b_n} \le \frac{a_{n+1}}{a_n}$, protože $\frac{n}{n+1} \le \frac{4n+2}{n+1}$. A protože je harmonická řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergentní, je dle podílového srovnávacího kritéria divergentní i původní řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$.

Příklad 11: Rozhodněte o konvergenci či divergenci řady:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)!}.$$

Protože výraz $(2n-1)!$ je kladný pro všechna přirozená $n \geq 1$, jde opět o řadu s kladnými členy. Chceme-li užít podílové srovnávací kritérium, musíme nejprve vyjádřit podíl $\frac{a_{n+1}}{a_n}$.

$$\frac{1}{(2(n+1)-1)!} \cdot \frac{(2n-1)!}{1} = \frac{(2n-1)!}{(2n+1)!} = \frac{(2n-1)!}{(2n+1)2n(2n-1)!} = \frac{1}{(2n+1)2n}$$

Ke srovnání užijeme řadu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Tato řada je též řadou s kladnými členy, neboť $n^2 > 0$ pro všechna přirozená $n \geq 1$. Vyjádříme podíl $\frac{b_{n+1}}{b_n}$.

$$\frac{1}{(n+1)^2} \cdot n^2 = \frac{n^2}{(n+1)^2}$$

Porovnáme-li nyní oba podíly, zjistíme, že $\frac{1}{2n(2n+1)} \leq \frac{n^2}{(n+1)^2}$, protože $2n(2n+1) = 4n^2 + 2n > (n+1)^2$ pro každé přirozené $n \geq 1$. Z toho dokonce dostáváme, že $\frac{1}{2n(2n+1)} \leq \frac{1}{(n+1)^2}$ a tedy tím spíše platí: $\frac{1}{2n(2n+1)} \leq \frac{n^2}{(n+1)^2}$. Protože řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konverguje, musí dle podílového srovnávacího kritéria konvergovat i původní řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)!}$.

Poznámka: Tento příklad jsme uvedli spíše jako ukázku práce s podílovým srovnávacím kritériem. V tomto případě je totiž mnohem vhodnější využít "obyčejného" srovnávacího kritéria (věta 3.2), neboť pro libovolné přirozené $n \geq 1$ platí:

$$\frac{1}{n^2} \geq \frac{1}{(2n+1)2n} \geq \frac{1}{(2n+1)2n(2n-1)!} = \frac{1}{(2n+1)!}$$

.
Protože $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konverguje dle věty 3.3, je dle srovnávacího kritéria konvergentní i řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)!}$. Srovnávací kritérium je proto v tomto případě pohodlnější a rychlejší.

Při používání srovnávacích kritérií je třeba mít vždy na paměti, že chceme-li dokázat konvergenci zkoumané řady, musíme ji srovnávat zase s konvergentní řadou a obráceně, pokud dokazuji divergenci zadané řady, musíme ji srovnávat s divergentní řadou. Pokud srovnáme konvergentní řadu s divergentní nebo naopak, nemá naše tvrzení žádný význam. Je tedy třeba správně odhadnout, zda daná řada bude konvergentní nebo divergentní.
Například: Chceme rozhodnout užitím prvního srovnávacího kritéria o konvergenci nebo divergenci řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n^2-n)}$. Napíšeme- li pro n-tý člen nerovnost $\frac{1}{2n^2-n} \leq \frac{1}{n}$ pro $\forall n \in N : n \geq 1$, budeme mít sice pravdu, ale tvrzení je bezvýznamné, protože $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverguje, ale $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n^2-n)}$ konverguje.

3.2.4 D'Alembertovo podílové kritérium

Čtvrté kritérium pro konvergenci nebo divergenci řad, které vyslovíme, má (stejně jako ostatní, které budou následovat) výhodu v tom, že nemusíme o dané řadě předem rozhodovat, zda konverguje nebo diverguje a nebudeme potřebovat ani žádnou jinou řadu, se kterou bychom zkoumanou řadu museli srovnávat. Využívá přímo vlastností členů tvořících danou řadu. Kritérium nyní vyslovme.

Věta 3.6:(D'Alembertovo podílové kritérium)
Nechť $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ je řada s kladnými členy. Pak platí:

1. Jestliže $\exists q \in (0; 1) \wedge \exists n_0 \in N$ tak, že pro $\forall n > n_0 : \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$, pak $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje.

2. Jestliže $\exists n_0 \in N$ tak, že pro $\forall n > n_0 : \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$, potom $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ diverguje.

Důkaz:

1. Z předpokladů víme, že $\exists q \in (0; 1) \wedge \exists n_0 \in N$ tak, že pro $\forall n > n_0$: $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$.
   Nerovnost můžeme napsat ve tvaru: $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{q^{n+1}}{q^n}$. Protože $q \in (0; 1)$,

je $\sum\limits_{k=1}^{\infty} q^k$ konvergentní geometrická řada a dle podílového srovnávacího kritéria konverguje i řada $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$.

2. Z předpokladů tvrzení víme, že $\exists n_0 \in N$ tak, že pro $\forall n > n_0 : \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$. Z toho plyne, že pro $\forall n > n_0 : a_{n+1} \geq a_n$, takže posloupnost $\{a_k\}_{k=n_0}^{\infty}$ je neklesající. Protože je však $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ řada z kladnými členy, platí pro $\forall n > n_0 : a_n \geq a_{n_0} > 0$. Z toho však plyne, že $\lim\limits_{k\to\infty} a_k \neq 0$, dle věty o limitách a nerovnostech a tudíž řada $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ diverguje, protože není splněna nutná podmínka konvergence a důkaz je ukončen.

Příklad 12: Rozhodněte o konvergenci či divergenci řady:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2}.$$

Všechny výrazy jak v čitateli, tak jmenovateli jsou kladné pro věchna přirozená $n \geq 1$, takže jde o řadu s kladnými členy. Chceme-li řadu vyšetřit užitím D'Alembertova podílového kritéria, musíme nejprve zjistit jak vypadá podíl dvou sousedních členů $\frac{a_{n+1}}{a_n}$. V našem případě máme:

$$\frac{3^{n+1}}{(n+1)^2} \cdot \frac{n^2}{3^n} = \frac{3n^2}{(n+1)^2}.$$

tyto podíly tvoří posloupnost $\left\{\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{3n^2}{(n+1)^2}\right\}_{n=1}^{\infty}$. Snadno se ověří, že tato posloupnost je rostoucí pro všechna přirozená $n \geq 1$. A tedy platí:

$$\forall n \in N, n \geq 2 : \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{a_3}{a_2} = \frac{3 \cdot 2^2}{3^2} = \frac{12}{9} > 1.$$

Z této nerovnosti vyplývá, že řada diverguje dle D'Alembertova podílového kritéria.

Pozn.: Pro odhad jsme museli vzít až 2. člen posloupnosti $\left(\frac{a_3}{a_2}\right)$, protože pro první člen není podíl ještě větší než 1. od druhého členu počínaje jsou již předpoklady použitého kritéria v pořádku.

Příklad 13: Zjistěte, zda konverguje nebo diverguje řada:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}.$$

opět je zřejmé, že $\frac{1}{(2n)!} > 0$ pro $\forall n \in N : n \geq 0$, takže jde o řadu s kladnými členy. Použijme podílové kritérium:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n)!}{(2n+2)!} = \frac{(2n)!}{(2n+2)(2n+1)(2n)!} = \frac{1}{(2n+2)(2n+1)}.$$

Opět získáváme posloupnost podílů $\left\{\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\}_{n=0}^{\infty} = \left\{\frac{1}{(2n+2)(2n+1)}\right\}_{n=0}^{\infty}$. Tato posloupnost je klesající, což se snadno ukáže ověřením podmínky

$$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} < \frac{a_{n+1}}{a_n},$$

v našem konkrétním případě podmínky:

$$\frac{1}{(2(n+1)+2)(2(n+1)+1)} < \frac{1}{(2n+2)(2n+1)}.$$

Platí tedy, že pro $\forall n \in N : \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} > \frac{a_{n+1}}{a_n}$, takže $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{a_1}{a_0}$ pro $\forall n \in N$. Z toho plyne, že posloupnost zkoumaných podílů $\left\{\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\}_{n=0}^{\infty}$ je omezená shora konstantou $\frac{a_1}{a_0} = \frac{1}{(2\cdot 0+2)(2\cdot 0+1)} = \frac{1}{2}$. To je konstanta menší než 1, takže dle D'Alembertova podílového kritéria řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}$ konverguje.

Poznámka: Obdobně jako v příkladě 11, je v tomto případě podstatně jednodušší použít srovnávacího kritéria, protože pro $(\forall n \in N)(n \geq 1)$: $\frac{1}{(2n)!} \leq \frac{1}{n^2}$, takže stačí užít věty 3.3. Příklad tedy opět slouží především jako ukázka práce s podílovým kritériem.

Příklad 14: Rozhodněte o konvergenci či divergenci řady:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n+1)!}.$$

Snadno nahlédnem, že se jedná opět o řadu s kladnými členy. Použijeme D'Alembertovo podílové kritérium, takže budeme chtít opět odhadnout podíl $\frac{a_{n+1}}{a_n}$. V tomto případě dostáváme:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}}{(n+2)!} \cdot \frac{(n+1)!}{2^n} = \frac{2 \cdot 2^n (n+1)!}{2^n (n+2)(n+1)!} = \frac{2}{n+2}.$$

Podíly tvoří klesající posloupnost. Tuto skutečnost lehce prokážeme ověžením podmínky:

$$\frac{2}{(n+1)+2} < \frac{2}{n+2} \qquad (\forall n \in N) : n \geq 1.$$

tudíž pro $\forall n \in N : n \geq 1$ platí: $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{a_2}{a_1} = \frac{2}{1+2} = \frac{2}{3}$. $\frac{2}{3}$ je konstanta menší než 1, takže dle D'Alembertova podílového kritéria je vyšetřovaná řada konvergentní.

Příklad 15: Vyšetřete, zda konverguje nebo diverguje řada:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(n+1)!]^n}{2! \cdot 4! \cdot 6! \cdot \ldots \cdot (2n)!}.$$

Tento příklad je podstatně náročnější, než příklady předchozí a pro jeho úplné vyřešení bude zapotřebí využít celé řady znalostí z matematické analýzy. Pro vyšetření použijeme opět D'Alembertovo podílové kritérium. Určeme nejprve podíl $\frac{a_{n+1}}{a_n}$.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{[((n+1)+1)!]^{n+1}}{2! \cdot 4! \cdot \ldots \cdot (2n)! \cdot (2(n+1))!} \right) \cdot \left(\frac{2! \cdot 4! \cdot \ldots \cdot (2n)!}{[(n+1)!]^n} \right) =$$

$$\left(\frac{[(n+2)!]^{n+1}}{2! \cdot 4! \cdot \ldots \cdot (2n)! \cdot (2n+2)!} \right) \cdot \left(\frac{2! \cdot 4! \cdot \ldots \cdot (2n)!}{[(n+1)!]^n} \right) =$$

$$= \frac{[(n+2)!]^{n+1}}{(2n+2)![(n+1)!]^n} = \frac{[(n+2)(n+1)!]^{n+1}}{(2n+2)![(n+1)!]^n} = \frac{(n+2)^{n+1}[(n+1)!]^{n+1}}{(2n+2)![(n+1)!]^n} =$$

$$= \frac{(n+2)^{n+1}(n+1)![(n+1)!]^n}{(2n+2)![(n+1)!]^n} = \frac{(n+2)^{n+1}(n+1)!}{(2n+2)!} =$$

$$\frac{(n+2)(n+2)^n(n+1)!}{(2n+2)(2n+1)2n(2n-1)\ldots(n+3)(n+2)(n+1)!} =$$

$$= \frac{(n+2)^n}{(2n+2)(2n+1)2n(2n-1)\ldots(n+3)} <$$

$$< \frac{(n+2)^n}{(n+3)(n+3)(n+3)(n+3)\dots(n+3)}$$

V posledním kroku jsme jmenovatele zlomku zmenšili tím, že jsme každý výraz před závorkou $(n + 3)$ nahradili toutéž závorkou, a tak jsme zvětšili zlomek. Tím jsme eliminovali výrazy, které zůstaly po zkrácení původního $(2n + 2)!$. Protože členů od $(n + 3)$ do $(2n + 2)$ včetně je přesně n, můžeme výraz ještě zjednodušit. [4]

$$\frac{(n+2)^n}{(n+3)(n+3)(n+3)(n+3)\dots(n+3)} = \frac{(n+2)^n}{(n+3)^n} = \left(\frac{n+2}{n+3}\right)^n$$

Nyní, pokud bychom dokázali, že tato posloupnost je klesající, mohli bychom omezit podíly $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ konstantou $\left(\frac{n+2}{n+3}\right)^n$ kde $n = 1$. Vyšla by konstanta $\frac{3}{4}$ a my bychom dostali:

$$(\forall n \in N) : n \geq 1 : \frac{a_{n+1}}{a_n} < \left(\frac{n+2}{n+3}\right)^n \leq \frac{3}{4}.$$

Řada by splňovala podmínky D'Alembertova podílového kritéria, protože $\frac{3}{4} < 1$ a řada by dle tohoto kritéria konvergovala.

Stačí tedy již pouze ukázat, že posloupnost $\left\{\left(\frac{n+2}{n+3}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ je klesající.

Nejprve připomeňme, že posloupnost $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ je klesající a má limitu e. Z toho plyne, že pro $\forall n \in N : n \geq 1$ je $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} > e$. Protože obě strany nerovnosti jsou větší než jedna, můžeme je zlogaritmovat beze změny na nerovnosti. Dostáváme:

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} > \ln e.$$

Nyní nerovnost upravíme následovně:

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} > 1$$

$$(n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) > 1$$

[4]Plyne to například ze vztahu pro n-tý člen aritmetické posloupnosti. Zde jde o posloupnost s prním členem $(n + 3)$, k-tým členem $(2n + 2)$ a diferncí 1. Platí: $2n + 2 = n + 3 + (k - 1) \cdot 1$. Úpravou dostaneme rovnost k=n.

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) > \frac{1}{n+1}$$

V tomto tvaru si nerovnost ponecháme, neboť ji při ověření, zda je posloupnost $\left\{\left(\frac{n+2}{n+3}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ klesající využijeme.

Abychom ukázali, že posloupnost $\left\{\left(\frac{n+2}{n+3}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ je klesající, stačí ukázat, že je klesající funkce $f : f(x) = \left(\frac{x+2}{x+3}\right)^x$, pro $x \in \langle 1; \infty)$. Provedeme to tak, že spočteme derivaci funkce f a ukážeme, že pro $\forall x \in \langle 1; \infty)$ platí: $f'(x) < 0$.

$$f'(x) = \left[\left(\frac{x+2}{x+3}\right)^x\right]' = \left[e^{x\ln\left(\frac{x+2}{x+3}\right)}\right]' =$$

$$= e^{x\ln\left(\frac{x+2}{x+3}\right)} \cdot \left(\ln\left(\frac{x+2}{x+3}\right) + x \cdot \frac{x+3}{x+2} \cdot \frac{(x+3)-(x+2)}{(x+3)^2}\right) =$$

$$= \left(\frac{x+2}{x+3}\right)^x \cdot \left(\ln\left(\frac{x+2}{x+3}\right) + \frac{x}{(x+3)(x+2)}\right)$$

Protože výraz $\left(\frac{x+2}{x+3}\right)^x > 0$ pro $\forall x \in \langle 1; \infty)$, musí být (aby byla f klesající) $\left(\ln\left(\frac{x+2}{x+3}\right) + \frac{x}{(x+3)(x+2)}\right) < 0$.

Zřejmě platí, že výraz $\frac{x}{(x+3)(x+2)} > 0$ pro $\forall x \in \langle 1; \infty)$ a $\ln\left(\frac{x+2}{x+3}\right) < 0$ pro $\forall x \in \langle 1; \infty)$, protože $0 < \frac{x+2}{x+3} < 1$ pro $x \geq 1$.

Stačí tedy ukázat, že $\left|\ln\left(\frac{x+2}{x+3}\right)\right| > \frac{x}{(x+3)(x+2)}$ a jelikož je $\ln\left(\frac{x+2}{x+3}\right) < 0$ pro $x \geq 1$, ukážeme, že $-\ln\left(\frac{x+2}{x+3}\right) > \frac{x}{(x+3)(x+2)}$.

$$-\ln\left(\frac{x+2}{x+3}\right) = \ln\left(\frac{x+2}{x+3}\right)^{-1} = \ln\left(\frac{x+3}{x+2}\right) = \ln\left(\frac{(x+2)+1}{x+2}\right) =$$

$$= \ln\left(1+\frac{1}{x+2}\right)$$

Dříve jsme ukázali, že $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) > \frac{1}{n+1}$. Nerovnost využijeme pro náš případ:

$$\ln\left(1+\frac{1}{x+2}\right) > \frac{1}{(x+2)+1} = \frac{1}{x+3}.$$

Protože je pro $\forall x \in \langle 1; \infty) : \frac{x}{x+2} < 1$, výsledný odhad zmenšíme, pokud jej tímto výrazem vynásobíme. Dostaneme:

$$\frac{1}{x+3} > \frac{1}{x+3} \cdot \frac{x}{x+2} = \frac{x}{(x+3)(x+2)}.$$

Souhrnně můžeme tedy napsat:

$$-\ln\left(\frac{x+2}{x+3}\right) = \ln\left(\frac{x+3}{x+2}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{x+2}\right) > \frac{x}{(x+3)(x+2)}.$$

Z toho ovšem již plyne tvrzení, které jsme chtěli dokázat, tedy:

$$\ln\left(\frac{x+2}{x+3}\right) + \frac{x}{(x+3)(x+2)} < 0 \quad \Rightarrow \quad f'(x) < 0.$$

Funkce f je klesající na $\langle 1; \infty)$, takže i posloupnost $\left\{\left(\frac{n+2}{n+3}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ je klesající a odhad použitý při důkazu konvergence řady D'Alembertovým podílovým kritériem je v pořádku.

Vidíme, že ověření monotonie pro odhad podílu $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ dalo velmi mnoho práce. Pokud bychom ve chvíli, kdy jsme dospěli pro podíl sousedních členů řady k odhadu $\frac{a_{n+1}}{a_n} < \left(\frac{n+2}{n+3}\right)^n$ užili limitního podílového kritéria, výpočet by se značně zjednodušil. Toto kritérium je uvedeno v následujícím odstavci, kde si také dořešení tohoto příkladu s jeho pomocí ukážeme.

Poznámka: Dle podmínky D'Alembertova podílového kritéria pro konvergenci řady, musí existovat $q \in (0;1)$ tak, že od jistého $n_0 \in N$ počínaje, je pro $(\forall n > n_0) : \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$. To znamená, že existuje pevná konstanta, *ostře menší než jedna*, která omezuje podíly sousedních členů řady. *Nestačí*, aby samotný podíl $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$. Vezmeme-li totiž harmonikou řadu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, pak pro ni platí: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1} < 1$ pro všechna přirozená $n \geq 1$. Vezmeme-li naproti tomu řadu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, pak platí: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n^2}{(n+1)^2} < 1$, a to také pro všechna přirozená $n \geq 1$. Ovšem řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ je divergentní a řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergentní. Protože jsme kritérium použili špatně a jeho předpoklad nebyl splněn, nelze jeho tvrzení k důkazu konvergence či divergence v tomto případě využít.

3.2.5 D'Alembertovo limitní podílové kritérium

Nevýhodou D'Alembertova podílového kritéria je nutnost hledat odhad pro podíl dvou sousedních členů v podobě konkrétní číselné konstanty. Limitní verze tohoto kritéria dává návod, jak rozhodnout o konvergenci nebo divergenci řady pomocí výpočtu limity posloupnosti podílů $\frac{a_{n+1}}{a_n}$. Pokud máme zběhlost ve výpočtu limit, je jeho použití pohodlnější, než nelimitní podílové kritérium. vyslovíme jej v následující větě.

Věta 3.7:(D'Alembertovo limitní podílové kritérium)
Nechť $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ je řada s kladnými členy. Pak platí:

1. Jestliže $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, pak řada $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje.

2. Jestliže $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, potom $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ diverguje.

Pozn.: Jestliže je $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ nebo pokud tato limita neexistuje, nelze o konvergenci nebo divergenci této řady nic říci.

Důkaz:

1. Dle předpokladu platí: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = A, \quad A < 1$. To dle definice limity znamená, že $(\forall \epsilon > 0) \quad (\exists n_0 \in N)$ tak, že

$$(\forall n \in N); (n > n_0) : \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - A \right| < \epsilon.$$

Upravíme-li nerovnost dostáváme, že $\frac{a_{n+1}}{a_n} < A + \epsilon$, přičemž je současně $A < 1$. Protože je tato podmínka splněna pro všechna kladná ϵ, nalezněme takové ϵ_0, aby $A + \epsilon_0 < 1$. Takové podmínce vyhovuje například volba $\epsilon_0 = \frac{1-A}{2}$. Pak platí:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < A + \epsilon_0 = A + \frac{1-A}{2} = \frac{A+1}{2}.$$

Protože je $A < 1$ je výraz $\frac{A+1}{2} < 1$. Vše souhnně napíšeme takto:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{A+1}{2} < 1$$

Z toho ovšem plyne, že řada $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ splňujke podminku konverguje dle nelimitního podílového kritéria (věta 3.6).

2. Druhá část tvrzení se již dokáže snadno. Protože $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, musí (dle věty o limitách a nerovnostech) existovat takové $n_0 \in N$, že pro $\forall n \in N; n > n_0$ je $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$. Z toho vyplývá že řada $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ diverguje, neboť splňuje předpoklady druhé části tvrzení nelimitního podílového kritéria.

Příklad 16: Vyšetřete konvergenci nebo divergenci řady:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}.$$

Jak $n!$, tak i $(2n)!$ jsou zřejmě kladná čísla pro všechna přirozená n, takže jde o řadu s kladnými členy. Spočtěme opět limitu $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{[(n+1)!]^2 \cdot (2n)!}{[2(n+1)]! \cdot (n!)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2 \cdot (n!)^2 \cdot (2n)!}{(2n+2) \cdot (2n+1) \cdot (2n)! \cdot (n!)^2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n+1}{4n^2+6n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(4+\frac{6}{n}+\frac{2}{n^2}\right)} = \frac{1}{4}$$

Vidíme, že tato limita je $\frac{1}{4}$, což je číslo menší než jedna, takže řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ konverguje dle D'Alembertova limitního podílového kritéria.

Příklad 17: Rozhodněte o konvergenci či divergenci řady:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{3^k}.$$

Jak $k!$ tak 3^k jsou kladná čísla pro libovolné přirozené k, takže zkoumaná řada je řada s kladnými členy. Pro její vyšetření užijme D'Alembertova limitního kritéria. Spočtěme limitu: $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k}$.

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\frac{(k+1)!}{3^{k+1}}}{\frac{k!}{3^k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{3^k (k+1)!}{3^{k+1} k!} = \lim_{k\to\infty} \frac{3^k \cdot (k+1) \cdot k!}{3 \cdot 3^k \cdot k!} = \lim_{k\to\infty} \frac{k+1}{3} = +\infty$$

Protože je limita větší než jedna (zde dokonce $+\infty$), je řada $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{3^k}$ divergentní dle D'Alembertova limitního podílového kritéria.

Příklad 18: Zjistěte, zda konverguje či diverguje řada:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} k!}{(2n)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1! + 2! + \ldots + n!}{(2n)!}.$$

Snadno nahlédneme, že jde opět o řadu s kladnými členy. K jejímu vyšetření budeme chtít použít D'Alembertovo limitní kritérium. Nejprve zjistíme, jak vypadají podíly $\frac{a_{n+1}}{a_n}$.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(1! + 2! + \ldots + n! + (n+1)!) \cdot (2n)!}{(1! + 2! + \ldots + n!) \cdot [2(n+1)]!} =$$

$$= \frac{1! + 2! + \ldots + n! + (n+1)!}{(1! + 2! + \ldots + n!)(2n+2)(2n+1)} =$$

$$= \frac{1}{(2n+2)(2n+1)} \cdot \frac{1! + 2! + \ldots + n! + (n+1)!}{1! + 2! + \ldots + n!}$$

Druhý zlomek, obsahující faktoriály, rozdělíme na dva následujícím způsobem:

$$\frac{1! + 2! + \ldots + n! + (n+1)!}{1! + 2! + \ldots + n!} = \frac{1! + 2! + \ldots + n!}{1! + 2! + \ldots + n!} + \frac{(n+1)!}{1! + 2! + \ldots + n!} =$$

$$= 1 + \frac{(n+1)!}{1! + 2! + \ldots + n!} = 1 + \frac{(n+1) \cdot n!}{1! + 2! + \ldots + n!}.$$

Protože $n! \leq 1! + 2! + \ldots + n!$, je zlomek $\frac{n!}{1!+2!+\ldots+n!} \leq 1$ a my můžeme napsat:

$$\frac{(n+1) \cdot n!}{1! + 2! + \ldots + n!} \leq n + 1.$$

S využitím tohoto odhadu dostáváme:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{(2n+2)(2n+1)} \cdot \left(1 + \frac{(n+1) \cdot n!}{1! + 2! + \ldots + n!}\right) \leq$$

$$\leq \frac{1}{(2n+2)(2n+1)} \cdot (1 + (n+1)).$$

Máme tedy následující odhad:

$$0 \leq \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{n+2}{(2n+2)(2n+1)}.$$

Spočtěme nyní limitu: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+2}{(2n+2)(2n+1)}$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{(2n+2)(2n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{4n^2+6n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(1+\frac{2}{n}\right)}{n^2\left(4+\frac{6}{n}+\frac{2}{n^2}\right)} = 0$$

Protože $0 \leq \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{n+2}{(2n+2)(2n+1)}$ a $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+2}{(2n+2)(2n+1)} = 0$, musí být dle věty o limitě sevřené posloupnosti i $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0$. A jelikož je tato limita menší než jedna, je původní řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1!+2!+\ldots+n!}{(2n)!}$ konvergentní dle D'Alembertova limitního kritéria.

Jak bylo již řečeno dříve, pokud při aplikaci limitního D'Alembertova kritéria vyjde limita $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ nebo pokud tato limita neexistuje, nelze o zkoumané řadě nic říci. Ukažme si tuto skutečnost na příkladech:

Příklad 19: Mějme řadu:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Pokud bychom použili limitní D'Alembertovo kritérium, dostali bychom:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

Limita tedy vyšla jedna a, jak víme, harmonická řada je divergentní.

Příklad 20: Mějme řadu:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Při aplikaci téhož kritéria dostáváme:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2\left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)} = 1.$$

Limita vyšla opět jedna, ale řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konverguje.

Příklad 21: Vyšetřeme konvergenci řady:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5+(-1)^n}{3^{n+1}}.$$

Řada je s kladnými, ale užijeme-li limitní odmocninové kritérium, dostaneme:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{5+(-1)^{n+1}}{3^{n+2}} \cdot \frac{3^{n+1}}{5+(-1)^n} \begin{array}{ll} = \frac{2}{9} & \text{pro } n \text{ sudé} \\ = \frac{1}{2} & \text{pro } n \text{ liché} \end{array}$$

Limita tedy neexistuje, ale řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5+(-1)^n}{3^{n+1}}$ je konvergentní, neboť její členy omezíme shora členy řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{6}{3^{n+1}}$, což je konvergentní geometrická řada a užijeme srovnávací kritérium.

Příklad 22: Rozhodněme o konvergenci nebo divergenci řady:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{2}+(-1)^n)^n}{n \cdot 2^{n+1}}.$$

Užijme k vyšetření konvergence limitní podílové kritérium :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{(\sqrt{2}+(-1)^{n+1})^{n+1}}{(\sqrt{2}+(-1)^n)^n} \begin{array}{ll} = 0 & \text{pro } n \text{ sudé} \\ = +\infty & \text{pro } n \text{ liché} \end{array}$$

Limita podílu opět neexistuje a řada je divergentní. Divergenci snadno ukážeme pokud vypočítáme limitu sudých členů posloupnosti určující danou řadu:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{2}+(-1)^{2n})^{2n}}{2n \cdot 2^{2n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4n} \cdot \frac{(\sqrt{2}+1)^{2n}}{2^{2n}} = +\infty.$$

Členy řady nesplňují nutnou podmínku konvergence, a proto daná řada diverguje.

Příklady 19-22 jasně ukazují, že v případech, kdy limita $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ nebo neexistuje, může daná řada konvergovat i divergovat. D'Alembertovo limitní kritérium se tak stává nepoužitelným a my musíme o konvergenci nebo divergenci dané řady rozhodnout jiným kritériem.

Poznámka k příkladu č. 15:
V předchozím odstavci, věnovanému nelimitnímu podílovému kritériu, jsme v příkladě č. 15 vyšetřovali konvergenci řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{[(n+1)!]^n}{2!\cdot 4!\cdot 6!\cdot \ldots \cdot (2n)!}$. Řešení užitím předchozího kritéria bylo značně zdlouhavé. Nyní si ukažme řešení pomocí limitního podílového kritéria.

Postupnými úpravami jsme dospěli pro podíl sousedních členů zkoumané řady k odhadu: $\frac{a_{n+1}}{a_n} < \left(\frac{n+2}{n+3}\right)^n$. Pokud ukážeme, že $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n+2}{n+3}\right)^n < 1$, bude podle věty o limitách a nerovnostech i $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ a řada bude konvergovat dle limitního podílového kritéria.
Budeme uvažovat funkci $f : f(x) = \left(\frac{x+2}{x+3}\right)^x$ a vypočítáme limitu $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x+2}{x+3}\right)^x = \lim_{x\to\infty} e^{x\cdot \ln\left(\frac{x+2}{x+3}\right)}$$

Protože exponenciála je spojitá a rostoucí na R, Najdeme nejprve limitu samotného exponentu:

$$\lim_{x\to\infty} x \cdot \ln\left(\frac{x+2}{x+3}\right) = \lim_{x\to\infty} x \cdot \ln\left(1 - \frac{1}{x+3}\right) = \lim_{x\to\infty} x \cdot \frac{\ln\left(1-\frac{1}{x+3}\right)}{-\frac{1}{n+3}} \cdot \frac{-1}{x+3}$$

Užijeme větu o limitě složené funkce a znalosti limity $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$. Protože $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{-1}{x+3} = 0$, je dle věty o limitě složené funkce $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln\left(1-\frac{1}{x+3}\right)}{-\frac{1}{n+3}} = 1$. Pokud se vrátíme k hledané limitě dostaneme:

$$\lim_{x\to\infty} x \cdot \frac{\ln\left(1-\frac{1}{x+3}\right)}{-\frac{1}{n+3}} \cdot \frac{-1}{x+3} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(1-\frac{1}{x+3}\right)}{-\frac{1}{n+3}} \cdot \frac{-x}{x+3} = 1 \cdot (-1) = -1.$$

Využijeme-li tohoto výsledku, bude:

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x+2}{x+3}\right)^x = \lim_{x\to\infty} e^{x\cdot \ln\left(\frac{x+2}{x+3}\right)} = e^{\left[\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot \ln\left(\frac{x+2}{x+3}\right)\right]} = e^{-1} < 1.$$

Dle Heineho věty [5] je i $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n+3}\right)^n < 1$, což je to, co jsme chtěli dokázat, neboť dle věty o limitách a nerovnostech je i $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, a proto řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{[(n+1)!]^n}{2!\cdot 4!\cdot 6!\cdot\ldots\cdot(2n)!}$ konverguje.

3.2.6 Cauchyovo odmocninové kritérium

Další kritérium pro konvergenci řad s nezápornými členy, které ukážeme, je Cauchyovo odmocninové kritérium. Jeho výhodou je, že se nemusíme zabývat podíly sousedních členů, které mnohdy mohou vycházet dosti nepříjemně. Toto kritérium pracuje přímo s vlastnostmi obecného členu řady. Zformulujeme jej v následující větě:

Věta 3.8:(Cauchyovo odmocninové kritérium)
Nechť $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ je řada s nezápornými členy. Pak platí:

1. Jestliže $\exists\, q \in (0;1)$ a $\exists\, n_0 \in N$ tak, že pro $(\forall n \in N);(n > n_0)$ platí: $\sqrt[n]{a_n} \leq q$, pak řada $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje.
2. Jestliže $\exists\, n_0 \in N$ tak, že pro $(\forall n \in N);(n > n_0)$ platí: $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$, pak řada $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ diverguje.

Důkaz:

1. Dle předpokladu tvrzení $\exists\, q \in (0;1)$ a $\exists\, n_0 \in N$ tak, že pro
$$(\forall n \in N);(n > n_0): \ \sqrt[n]{a_n} \leq q.$$
Jestliže nerovnost umocníme na n-tou, dostaneme $a_n \leq q^n$. Protože je $q \in (0;1)$, jsou q^n členy gemetrické řady, která je konvergentní, takže dle srovnávacího kritéria konverguje i řada $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$.

[5] Heineho věta: Nechť f je reálná funkce reálné proměnné, $(a, A \in R) \vee (a, A = \pm\infty)$. Pak $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \Leftrightarrow (\forall\,\{x_n\}_{n=1}^{\infty});(x_n \neq a \wedge \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a)(\exists \lim\limits_{x\to a} f(x_n)) \wedge (\lim\limits_{x\to a} f(x_n) = A.)$

2. Důkaz druhé části tvrzení je ještě jednodušší, než první. Vyjdeme z předpokladu, který říká, že od jistého n_0 počínaje je pro všechna $n > n_0 : \sqrt[n]{a_n} \geq 1$. Nerovnost opět umocníme na n-tou a dostaneme: $a_n \geq 1$. Z toho již divergence řady $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ plyne, neboť dle věty o limitách a nerovnostech je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \geq 1$, takže členy řady nesplňují nutnou podmínku konvergence.

Příklad 23: Rozhodněte o konvergenci nebo divergenci řady:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3+(-1)^n}{(2n+3)^n}.$$

Snadno nahlédneme, že jde o řadu s kladnými členy, neboť v čitateli zlomku se v závislosti na n střídají konstanty 2 a 4 a ve jmenovateli zlomku je kladný výraz pro libovolné přirozené n. Užijeme-li k vyšetření řady odmocninové kritérium, musíme $\sqrt[n]{a_n}$ odhadnout konstantou, která bude menší než 1. Provedeme to následovně:

$$\sqrt[n]{\frac{3+(-1)^n}{(2n+3)^n}} = \frac{\sqrt[n]{3+(-1)^n}}{2n+3} \leq \frac{\sqrt[n]{4}}{2n+3} \leq \frac{4}{2n+3}.$$

Posloupnost $\left\{\frac{4}{2n+3}\right\}_{n=1}^{\infty}$ je (jak se velmi snadno ukáže ověřením vztahu $a_n > a_{n+1}$ pro $\forall n \in N$) klesající, tudíž každý člen této posloupnosti můžeme odhadnout členem prvním. Tedy:

$$(\forall n \in N); (n \geq 1): \ \frac{4}{2n+3} \leq \frac{4}{2\cdot 1+3} = \frac{4}{5}.$$

Protože $\frac{4}{5} < 1$, je řada $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{3+(-1)^n}{(2n+3)^n}$ konvergentní dle Cauchyova odmocninového kritéria.

Příklad 24: Vyšetřete konvergenci či divergenci řady:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^{2n+1}}.$$

Řada má opět pouze kladné členy, takže zde problém nenastává. Užijme nyní odmocninové kritérium:

$$\sqrt[n]{\frac{n^n}{3^{2n+1}}} = \frac{n}{\sqrt[n]{3} \cdot 3^2}.$$

Protože $3 \geq \sqrt[n]{3} \geq 1$ pro všechna přirozená n, můžeme výraz $\frac{n}{\sqrt[n]{3} \cdot 3^2}$ odhadnout zdola (tedy zmenšit), jestliže $\sqrt[n]{3}$ nahradíme konstantou 3. Dostaneme:

$$\frac{n}{\sqrt[n]{3} \cdot 3^2} \geq \frac{n}{3 \cdot 9} = \frac{n}{27}.$$

Posloupnost $\left\{\frac{n}{27}\right\}_{n=1}^{\infty}$ je evidentně rostoucí. Navíc pro $(\forall n \in N); n > 28$ platí: $\frac{n}{27} > \frac{28}{27} > 1$. Spojíme-li tato tvrzení dohromady máme:

$$\sqrt[n]{a_n} \geq \frac{n}{27} \geq \frac{28}{27} > 1 \qquad (\forall n \in N);\ n > 28.$$

Proto dle Cauchyova odmocninového kritéria řada $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^{2n+1}}$ diverguje.

Poznámka: Divergence této řady by se dokázala pohodlněji a rychleji pomocní limitní verze odmocninového kritéria. Toto kritérium je uvedeno v následujícím odstavci.

3.2.7 Cauchyovo limitní odmocninové kritérium

Obdobně jako u nelimitního podílového kritéria je nevýhodou nelimitní verze odmocninového kritéria to, že musíme odhadovat n-té odmocniny členů řady konstantou, přičemž tyto odhady mohou být dosti pracné a někdy i trikové. Limitní verze Cauchyova kritéria tuto práci ušetří a vyšetření konvergence nebo divergence řady převede na výpočet limity.

Věta 3.9:(Cauchyovo limitní odmocninové kritérium)
Nechť $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ je řada s nezápornými členy. Pak platí:

1. Jestliže $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$ pak řada $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje.

2. Jestliže $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$ pak řada $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ diverguje.

Pozn.: Obdobně jako u limitního podílového kritéria: jestliže je $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$ nebo pokud tato limita neexistuje, nelze o konvergenci nebo divergenci této řady rozhodnout.

Důkaz:

1. Protože dle předpokladu $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = A < 1$, znamená to, že:

   $$(\forall \epsilon > 0)\ (\exists\, n_0 \in N); (\forall n > n_0) : |\sqrt[n]{a_n} - A| < \epsilon.$$

   Protože jde o řadu s nezápornými členy, mužeme psát:

   $$0 \leq \sqrt[n]{a_n} < A + \epsilon.$$

   Protože je tato podmínka splněna pro všechna kladná ϵ, nalezněme takové ϵ_0, aby $A + \epsilon_0 < 1$. Této podmínce vyhovuje (obdobně jako při důkazu D'Alembertova limitního kritéria) volba $\epsilon_0 = \frac{1-A}{2}$. Takové ϵ_0 je určitě kladné, protože $A < 1$ dle předpokladu. Najdeme $n_0 \in N$ tak, aby $\sqrt[n]{a_n} < A + \epsilon$ pro všechna $n > n_0$.
   Potom dostáváme:

   $$\sqrt[n]{a_n} < A + \frac{1-A}{2} = \frac{A+1}{2} < 1.$$

   To už je podmínka, která postačuje pro konvergenci řady $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, protože lze použít předchozí nelimitní Cauchyovo kritérium (1. část věty 3.8) a tvrzení je dokázáno.

2. Protože $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$, existuje (dle věty o limitách a nerovnostech) $n_0 \in N$ tak, že pro $\forall n > n_0$:

   $$\sqrt[n]{a_n} > 1.$$

   Pokud použijeme opět nelimitní Cauchyovo odmocninové kritérium (2. část věty 3.8) je divergence řady $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ dokázána.

Příklad 25: Vyšetřete konvergenci nebo divergenci řady:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{n}{4n+3}\right)^n.$$

Jde zřejmě o řadu s kladnými členy, takže můžeme použít limitní odmocninové kritérium. Spočtěme tedy limitu $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{4n+3}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{4n+3} = \frac{1}{4} < 1$$

Protože limita vyšla menší než jedna, je řada $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\frac{n}{4n+3}\right)^n$ konvergentní dle limitního odmocninového kritéria.

Příklad 26: Rozhodněte o konvergenci nebo divergenci řady:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5 \cdot [\sqrt{2} + (-1)^n]^n}{3^n}.$$

Protože $\sqrt{2} > 1$, je výraz $[\sqrt{2} + (-1)^n]^n$ kladný pro všechna přirozená n. U členů n^5 a 3^n je kladná hodnota zřejmá, takže vyšetřovaná řada je řadou s kladnými členy. Zde však nelze použít limitní odmocninové kritérium přímo, protože limita $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ neexistuje, čili bychom nemohli o konvergenci nebo divergenci rozhodnout. Pro členy této řady platí:

$$\frac{n^5 \cdot (\sqrt{2}+1)^n}{3^n} \leq \frac{n^5 \cdot [\sqrt{2} + (-1)^n]^n}{3^n} \leq \frac{n^5 \cdot (\sqrt{2}+1)^n}{3^n},$$

tedy uvážíme možnost užít srovnávací kritérium.
Vyšetřeme nyní řadu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^5 \cdot (\sqrt{2}+1)^n}{3^n}$. Na tuto řadu již lze aplikovat limitní odmocninové kritérium.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^5 \cdot (\sqrt{2}+1)^n}{3^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n^5} \cdot (\sqrt{2}+1)}{3}$$

Víme, že $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. Z toho plyne:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^5} = \left(\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}\right)^5 = 1^5 = 1.$$

Tohoto výsledku užijeme při výpočtu hledané limity:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n^5} \cdot (\sqrt{2}+1)}{3} = \frac{1 \cdot (\sqrt{2}+1)}{3} = \frac{\sqrt{2}+1}{3} < 1.$$

Limita je menší než jedna, takže řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^5 \cdot (\sqrt{2}+1)^n}{3^n}$ konverguje dle limitního odmocninového kritéria a dle srovnávacího kritéria konverguje i původní řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^5 \cdot [\sqrt{2}+(-1)^n]^n}{3^n}$.

Příklad 27: Vyšetřete konvergenci nebo divergenci řady:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{3^{n+5} \cdot n^{10}}.$$

Opět je vidět, že se jedná o řadu s kladnými členy. Použijme limitní odmocninové kritérium:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{4^n}{3^{n+5} \cdot n^{10}}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{4^n}{3^5 \cdot 3^n \cdot n^{10}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{4}{\sqrt[n]{3^5} \cdot 3 \cdot \sqrt[n]{n^{10}}}$$

Využijeme nyní znalosti limit: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ a $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ pro $\forall a \in R,\ a > 0$. Vezmeme v našem případě $a = 3^5$ a dostaneme:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4}{\sqrt[n]{3^5} \cdot 3 \cdot \sqrt[n]{n^{10}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{4}{\sqrt[n]{3^5} \cdot 3 \cdot (\sqrt[n]{n})^{10}} = \frac{4}{1 \cdot 3 \cdot 1^{10}} = \frac{4}{3}.$$

Protože je tato limita větší než jedna, je dle limitního odmocninového kritéria řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{3^{n+5} \cdot n^{10}}$ divergentní.

Příklad 28: Určete, zda konverguje nebo diverguje řada:

$$\sum_{n=4}^{\infty} \left(\frac{n^2-5n+6}{n^2+n-6}\right)^{n^2+3n}.$$

Protože výrazy v čitateli i jmenovateli zlomku nabývají kladných hodnot pro všechna přirozená $n \geq 4$, jde opět o řadu s kladnými členy. Nejprve členy této řady vhodně upravíme:

$$\sum_{n=4}^{\infty} \left(\frac{n^2-5n+6}{n^2+n-6}\right)^{n^2+3n} = \sum_{n=4}^{\infty} \left(\frac{(n-2)(n-3)}{(n-2)(n+3)}\right)^{n(n+3)} = \sum_{n=4}^{\infty} \left(\frac{n-3}{n+3}\right)^{n(n+3)}.$$

Nyní použijeme k vyšetření konvergence či divergence řady limitní odmocninové kritérium.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n-3}{n+3}\right)^{n(n+3)}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-3}{n+3}\right)^{\frac{n(n+3)}{n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-3}{n+3}\right)^{(n+3)}$$

Získaný výraz ještě dále upravíme, abychom mohli využít známou limitu: $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{a}{n}\right)^n = e^a$ pro $a \in R$.

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-3}{n+3}\right)^{(n+3)} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+3-6}{n+3}\right)^{(n+3)} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{-6}{n+3}\right)^{(n+3)} = e^{-6}$$

Protože $e^{-6} = \frac{1}{e^6} < 1$, je řada $\sum\limits_{n=4}^{\infty} \left(\frac{n^2-5n+6}{n^2+n-6}\right)^{n^2+3n}$ dle Cauchyova limitního odmocninového kritéria konvergentní.

Příklad 29: Vyšetřete konvergenci nebo divergenci řady:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{e^n \cdot n^{\sqrt{n}}}.$$

Řada je opět s kladnými členy a k jejímu vyšetření použijeme Cauchyovo limitní odmocninové kritérium.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{e^n \cdot n^{\sqrt{n}}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{e \cdot \sqrt[n]{n^{\sqrt{n}}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{e \cdot n^{\frac{\sqrt{n}}{n}}}$$

Nyní stačí vypočítat limitu $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n^{\frac{\sqrt{n}}{n}}}$. Provedeme to tak, že vypočteme $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{x^{\frac{\sqrt{x}}{x}}}$

jako limitu funkce a použijeme Heineho větu.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^{\frac{\sqrt{x}}{x}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^{\frac{1}{\sqrt{x}}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^{\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot \ln x}}$$

Limitu tohoto podílu můžeme vypočítat jako podíl limit, pokud budou obě limity existovat a bude mít výsledek smysl. Limita čitatele je

$$\lim_{x\to\infty} x = \infty.$$

Limita jmenovatele bude

$$\lim_{x\to\infty} e^{\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\ln x} = e^{\left(\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\ln x\right)}.$$

Limitu $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ spočteme l'Hospitalovým pravidlem.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \overset{l'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2\cdot\sqrt{x}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$$

Ve výsledku dostáváme:

$$\lim_{x\to\infty} e^{\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\ln x} = e^{\left(\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\ln x\right)} = e^0 = 1.$$

Dosažené výsledky použijeme pro výpočet původní limity.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^{\frac{1}{\sqrt{x}}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^{\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\ln x}} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty} x}{\lim\limits_{x\to\infty} e^{\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\ln x}} = \frac{\infty}{1} = \infty$$

Za použití Heineho věty můžeme tedy napsat:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^{\frac{\sqrt{n}}{n}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^{\frac{1}{\sqrt{x}}}} = \infty.$$

Závěrem tedy vše shrňme:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{e^n\cdot n^{\sqrt{n}}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{e\cdot n^{\frac{\sqrt{n}}{n}}} = \frac{1}{e}\cdot\infty = \infty.$$

Protože je tato limita rovna ∞ je dle limitního odmocninového kritéria řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{e^n\cdot n^{\sqrt{n}}}$ divergentní.

Při používání limitního odmocninového kritéria si musíme, podobně jako tomu bylo u limitního podílového (D'Alembertova) kritéria, dát pozor na situaci, kdy je $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$ nebo kdy tato limita neexistuje a mít na paměti, že v těchto případech nelze o vyšetřované řadě nic říci. Řada může jak konvergovat, tak divergovat. Ukážeme si tyto situace na jednoduchých příkladech.

Příklad 30: Uvažujme řadu:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k+1}{k} \right)^k .$$

Snadno nahlédneme, že jde o řadu s kladnými členy a budeme-li chtít užít odmocninové limitní kritérium, spočteme $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k}$.

Dostaneme:

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\left(\frac{k+1}{k} \right)^k} = \lim_{k\to\infty} \frac{k+1}{k} = 1.$$

Řada $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k+1}{k} \right)^k$ je divergentní, protože (jak víme) jest:

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{k+1}{k} \right)^k = \lim_{k\to\infty} \left(1 + \frac{1}{k} \right)^k = e \neq 0,$$

takže členy řady nesplňují nutnou podmínku konvergence.

Příklad 31: Mějme dánu řadu

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k}{3k^5+4}.$$

Řada je opět s kladnými členy, takže můžeme použít limitní odmocninové kritérium, ačkoliv zde je evidentní, že použití jiného kritéria (např. srovnávacího) povede rychle a efektivně k cíli. Nicméně přesto spočtěme limitu $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k}$.

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{2k}{3k^5+4}} = \lim_{k\to\infty} \frac{\sqrt[k]{2k}}{\sqrt[k]{k^5 \left(3 + \frac{4}{k^5}\right)}} = \lim_{k\to\infty} \frac{\sqrt[k]{2}\sqrt[k]{k}}{\left(\sqrt[k]{k}\right)^5 \cdot \sqrt[k]{3 + \frac{4}{k^5}}}$$

Užijeme-li již známých limit $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{2} = \lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{3} = \lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{3 + \frac{4}{k^5}} = = \lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{k} = 1$, dojdeme k závěru, že $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k}$ pro řadu $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2k}{3k^5+4}$ je rovna jedné. Ale tato řada je konvergentní, jak snadno ukážeme pomocí srovnávacího kritéria a věty 3.3.

Příklad 32: Připomeňme řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ a } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Pokud bychom chtěli kopnvergenci těchto řad vyšetřit limitním odmocninovým kritériem, dostaneme:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^2} = \frac{1}{1^2} = 1$$

Obě limity jsou rovny jedné, ale řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverguje, zatímco řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konverguje.

Příklad 33: Vyšetřeme konvergenci nebo divergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(3+(-1)^{n-1}\right)^n}{n^2}$$

Užijme limitní odmocninové kritérium:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{\left(3+(-1)^{n-1}\right)^n}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3+(-1)^{n-1}}{(\sqrt[n]{n})^2} =$$

$$\begin{aligned} = \frac{3+(-1)^{n-1}}{1} &= 4 \quad \text{pro } n \text{ liché} \\ &= 2 \quad \text{pro } n \text{ sudé.} \end{aligned}$$

Limita $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ neexistuje, ale protože pro členy řady platí:

$$\frac{4^n}{n^2} \geq \frac{(3+(-1)^{n-1})^n}{n^2} \geq \frac{2^n}{n^2},$$

zkusíme užít srovnávací kritérium.
Řada $\sum\limits^{\infty} \frac{2^n}{n^2}$ diverguje, což ukážeme snadno užitím odmocninového limitního kritéria, proto řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\left(3+(-1)^{n-1}\right)^n}{n^2}$ diverguje dle srovnávacího

kritéria.

Poznámka: Příkladem konvergentní řady, jejíž $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ neexistuje, je příklad č. 26.

Z předložených příkladů vyplývá, že odmocninová kritéria se hodí při vyšetřování řad, jejichž členy obsahují proměnnou n v exponentu. Není to však univerzální návod a někdy je pohodlnější jiné kritérium buď z toho důvodu, že výpočet limity je značně složitý nebo na základě tohoto kritéria nejsme schopni o konvergenci nebo divergenci rozhodnout. Vždy tedy záleží na tom, jak konkrétní řada vypadá a na správném odhadu, které kritérium povede v dané situaci k cíli a (pokud je cest více) která z možností řešení je nejschůdnější.

Obecně lze říci, že bývá vhodný postup:

1. podílové limitní kritérium
2. odmocninové limitní kritérium (selže-li podílové) [6]
3. podílové nebo odmocninové nelimitní kritérium (selžou-li kritéria limitní).

Ovšem znovu zdůrazněme, že vždy záleží na konkrétním případě. V některých případech je vhodné podílová a odmocninová kritéria kombinovat se srovnávacími, atd. Vhodný výběr kritérií a postup řešení proto závisí na řešiteli.

3.2.8 Integrální kritérium

Poslední ze základních kritérií pro řady s nezápornými členy, které uvedeme, je integrální kritérium. Od ostatních, již vyslovených kritérií se liší tím, že kromě poznatků o posloupnostech a řadách využívá poznatků integrálního počtu reálných funkcí reálné proměnné. Kritérium je založeno na porovnání řady s nevlastním Riemannovým integrálem. Vyslovíme jej v následující větě.

Věta 3.10:(Integrální kritérium)
Nechť funkce $f : R \to R$ splňuje podmínky:

[6]Protože pro posloupnosti reálných čísel platí: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = A \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = A$.

1. Funkce f je nerostoucí v intervalu $\langle 1; \infty)$.
2. $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$.

Pak platí: Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ konverguje právě tehdy, když existuje nevlastní Riemannův integrál $\int\limits_{1}^{\infty} f(x)dx$.

Důkaz:
Z předpokladů 1. a 2. plyne, že na intervalu $\langle 1; \infty)$ je $f(x) \geq 0$ a že řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ je řadou s nezápornými členy které tvoří nerostoucí posloupnost konvergující k nule.

Vyšetřeme dělení intervalu $\langle 1; n\rangle$ určené body $1, 2, \ldots, (n-1), n$.

Horní integrální součet funkce f, patřící k tomuto dělení je:

$$S = \sum_{i=2}^{n} M_i \sigma_i = f(1) + f(2) + \ldots + f(n-1) = \sum_{i=1}^{n-1} f(i),$$

kde $M_i = f(i-1)$ a σ_i je délka intervalu $\langle i-1; i\rangle$, tedy 1.

Dolní integrální součet funkce f, patřící k témuž dělení je:

$$s = \sum_{i=2}^{n} m_i \sigma_i = f(2) + f(3) + \ldots + f(n) = \sum_{i=1}^{n} f(i) - f(1),$$

kde $m_i = f(i)$ a analogicky σ_i délka intervalu $\langle i-1; i\rangle$, tedy opět 1.

Z vlastností horních a dolních součtů vyplývá, že

$$s \leq \int_{1}^{n} f(x)dx \leq S.$$

Nerovnost přepíšeme do tvaru:

$$\sum_{i=1}^{n} f(i) - f(1) \leq \int_{1}^{n} f(x)dx \leq \sum_{i=1}^{n-1} f(i).$$

Dále musí platit:

$$\sum_{i=1}^{n} f(i) - f(1) \leq \int_{1}^{n} f(x)dx \leq \int_{1}^{\infty} f(x)dx$$

$$\sum_{i=1}^{n} f(i) \leq \int_{1}^{n} f(x)dx + f(1) \leq \int_{1}^{\infty} f(x)dx + f(1)$$

Jestliže integrál $\int_1^\infty f(x)dx$ existuje, pak $\exists\, A \in R$ tak, že $\int_1^\infty f(x)dx = A$.

Z toho vyplývá, že

$$\sum_{i=1}^{n} f(i) \leq \int_{1}^{\infty} f(x)dx + f(1) = A + f(1) = konst.$$

To však neznamená nic jiného, než že částečné součty $\sum_{i=1}^{n} f(i)$ řady s nezápornými členy $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ jsou omezené a řada je tudíž konvergentní.

Tím jsme ukázali jednu implikaci tvrzení, totiž že z existence integrálu plyne konvergence příslušné řady. Obrácenou implikaci (z konvergence řady plyne existence integrálu) ukážeme nepřímo tak, že ukážeme, že pokud integrál $\int_1^\infty f(x)dx$ neexistuje, musí řada $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ nutně divergovat.

Nechť tedy integrál $\int_1^\infty f(x)dx$ neexistuje. Protože $f(x) \geq 0$ pro $x \in \langle 1; \infty)$, znamená to, že:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{1}^{n} f(x)dx = +\infty,$$

Takže posloupnost integrálů $\left\{ \int_1^n f(x)dx \right\}_{n=1}^{\infty}$ není omezená.

Navíc podle definice horních součtů platí, že

$$\int_{1}^{n} f(x)dx \leq S = \sum_{i=1}^{n-1} f(i)$$

To ale znamená, že ani částečné součty $\sum_{i=1}^{n-1} f(i)$ řady $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ nejsou omezené, řada musí proto divergovat a důkaz je ukončen.

Příklad 34: Rozhodněte, v závislosti na parametru $\alpha \in R$ o konvergenci nebo divergenci řady:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}.$$

Příklad by mohl být stručněji zadán: Dokažte větu 3.3, jejíž tvrzení jsme používali při důkazech konvergence řad srovnávacím kritériem. Důkaz integrálního kritéria jsme provedli nezávisle na jiných kritériích, proto bude vše v pořádku, pokud větu 3.3 dokážeme s jeho pomocí.

Dle integrálního kritéria bude řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ konvergovat (resp. divergovat), bude-li konvergovat (resp. divergovat) integrál $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}} dx$.

Rozdělme důkaz na čtyři části.

1. $\alpha \leq 0$

V tomto případě je zbytečné užívat jakékoliv kritérium, protože pro $\alpha < 0$ je $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} = \infty$ a pro $\alpha = 0$ je $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} = 1$, takže není splněna nutná podmínka konvergence a řada diverguje. [7]

2. $\alpha > 0$

Pro použití integrálního kritéria musíme ověřit jeho podmínky, kladené na funkci $f : f(x) = \frac{1}{x^{\alpha}}$.

Snadno se ukáže, že tato funkce je nerostoucí na $\langle 1; \infty)$ a $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$.

Můžeme tedy počítat:

$$\int\limits_{1}^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}} dx = \lim_{t\to\infty} \int\limits_{1}^{t} \frac{1}{x^{\alpha}} dx = \lim_{t\to\infty} \int\limits_{1}^{t} x^{-\alpha} dx =$$

$$= \lim_{t\to\infty} \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right]_1^t = \lim_{t\to\infty} \left(\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} \right)$$

Pro $\alpha \in (0; 1)$ je výraz $1 - \alpha > 0$. Z diferenciálního počtu víme, že v tomto případě je $\lim\limits_{t\to\infty} t^{1-\alpha} = +\infty$. To však znamená, že řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ diverguje dle integrálního kritéria, protože $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}} dx = +\infty$.

Pro $\alpha > 1$ je výraz $1 - \alpha < 0$. To ovšem znamená, že $\lim\limits_{t\to\infty} t^{1-\alpha} = 0$,

[7] Navíc by funkce $f(x) = \frac{1}{x^{\alpha}}$ v tomto případě nesplňovala podmínky integrálního kritéria

takže

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx = -\frac{1}{1-\alpha} = \frac{1}{\alpha - 1}.$$

Integrál $\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx$ je tedy konečný a dle integrálního kritéria řada $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^\alpha}$ konverguje.

Je-li $\alpha = 1$, počítáme integrál $\int_1^\infty \frac{1}{x} dx$.

$$\int_1^\infty \frac{1}{x} dx = \lim_{y\to\infty} \int_1^y \frac{1}{x} dx = \lim_{y\to\infty} [\ln x]_1^y = \lim_{y\to\infty} (\ln y) - \ln 1 = +\infty$$

Vidíme, že tento integrál diverguje, takže dle integrálního kritéria diverguje i harmonická řada $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}$.

Závěr: řada $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^\alpha}$ konverguje pro $\alpha > 1$ a diverguje pro $\alpha \leq 1$.

Příklad 35: Rozhodněte, zda konverguje nebo diverguje řada:

$$\sum_{k=2}^\infty \frac{1}{k \cdot \ln^3 k}.$$

Snadno se přesvědčíme, že daná řada je opět řadou s kladnými členy. K vyšetření konvergence nebo divergence použijeme integrální kritérium. Budeme tedy zkoumat funkci $f : f(x) = \frac{1}{x \cdot \ln^3 x}$ na intervalu $\langle 2; \infty)$. Není těžké nahlédnout, že funkce f je nerostoucí na $\langle 2; \infty)$ a že

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x \cdot \ln^3 x} = 0.$$

Funkce f tedy splňuje předpoklady integrálního kritéria a my můžeme počítat integrál $\int_2^\infty f(x) dx$.

Primitivní funkci k funkci f budeme hledat substituční metodou.

$$\int \frac{1}{x \ln^3 x} dx \to \left| \begin{array}{c} \ln x = y \\ \frac{1}{x} dx = dy \end{array} \right| \to \int \frac{1}{y^3} dy = -\frac{1}{2y^2}$$

Z toho plyne, že

$$\int \frac{1}{x \ln^3 x} dx = -\frac{1}{2 \ln^2 x}.$$

Nyní spočítáme nevlastní integrál: $\int\limits_2^\infty \frac{1}{x\ln^3 x}dx$.

$$\int\limits_2^\infty \frac{1}{x\ln^3 x}dx = \lim_{t\to\infty}\left[-\frac{1}{2\ln^2 x}\right]_2^t =$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{2\ln^2 2} - \frac{1}{2\ln^2 t}\right) = \frac{1}{2\ln^2 2} - 0 = \frac{1}{2\ln^2 2}$$

Vidíme, že $\int\limits_2^\infty \frac{1}{x\ln^3 x}dx$ je konečný, takže dle integrálního kritéria je vyšetřovaná řada $\sum\limits_{k=2}^\infty \frac{1}{k\cdot\ln^3 k}$ konvergentní.

Příklad 36: Vyšetřete konvergenci nebo divergenci řady

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{\arctan^3 n}{(1+n^2)}.$$

Protože $\arctan n$ je kladný pro všechna $n > 0$, a výraz $1+n^2$ je též kladný, jde o řadu s kladnými členy. Budeme-li chtít vyšetřit konvergenci nebo divergenci této řady pomocí integrálního kritéria, musíme ověřit jeho podmínky pro funkci $f : f(x) = \frac{\arctan^3 x}{1+x^2}$.

1.
$$\lim_{x\to\infty}\frac{\arctan^3 x}{1+x^2} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty}\arctan^3 x}{\lim\limits_{x\to\infty}(1+x^2)} = 0$$

2. Pro vyšetření monotonie najdeme první derivaci funkce f.

$$f'(x) = \left(\frac{\arctan^3 x}{1+x^2}\right)' = \frac{\frac{3\arctan^2 x}{1+x^2}\cdot(1+x^2) - 2x\cdot\arctan^3 x}{(1+x^2)^2} =$$

$$= \frac{3\arctan^2 x - 2x\cdot\arctan^3 x}{(1+x^2)^2} = \frac{\arctan^2 x}{(1+x^2)^2}\cdot(3-2x\cdot\arctan x)$$

Aby funkce f byla nerostoucí na intervalu $\langle 1;\infty)$, musela by na tomto intervalu být $f'(x) \leq 0$. Vidíme, že tomu tak ale není. Znaménko první derivace určuje výraz $(3-2x\cdot\arctan x)$, neboť ostatní výrazy, které obsahuje předpis pro derivaci, jsou již kladné pro $\forall x \in \langle 1; \infty)$. Pro $x = 1$ je však výraz $(3 - 2x \cdot \arctan x)$ kladný, což je ve sporu s naším požadavkem. Protože jsou však funkce $2x$ a $\arctan x$ rostoucí na R a kladné na $(0; \infty)$, je funkce $(3-2x \cdot \arctan x)$ klesající. Pro $x = 2$ je již výraz $(3-2x \cdot \arctan x)$ záporný, protože

$$2 \cdot 2 \cdot \arctan 2 > 4 \cdot \arctan 1 = 4 \cdot \frac{\pi}{4} = \pi > 3.$$

Protože je funkce $(3 - 2x \cdot \arctan x)$ klesající, budou její hodnoty záporné pro všechna $x > 2$. To znamená, že i první derivace f' bude záporná a my na základě této skutečnosti můžeme tvrdit, že funkce $f : f(x) = \frac{\arctan^3 x}{1+x^2}$ je klesající na intervalu $\langle 2; \infty)$.

Pokud bude existovat integrál $\int\limits_2^\infty f(x)dx$, bude řada $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\arctan^3 n}{(1+n^2)}$ konvergentní. Nebude nám vadit, jestliže vyšetříme konvergenci řady jen od jistého n_0 počínaje, protože konvergence řady nezávisí na změně nebo vynechání konečného počtu členů.

Nyní, když jsme ověřili podmínky kritéria, můžeme vypočítat integrál

$$\int\limits_2^\infty \frac{\arctan^3 x}{1+x^2} dx.$$

Primitivní funkci k funkci f najdeme opět substituční metodou.

$$\int \frac{\arctan^3 x}{1+x^2} dx \to \left| \begin{array}{c} \arctan x = y \\ \frac{1}{1+x^2} dx = dy \end{array} \right| \to \int y^3 dy = \frac{y^4}{4}$$

Pokud se vrátíme k substituci, dostaneme:

$$\int \frac{\arctan^3 x}{1+x^2} dx = \frac{\arctan^4 x}{4}.$$

Hledaný nevlastní integrál tedy bude:

$$\int\limits_2^\infty \frac{\arctan^3 x}{1+x^2} dx = \lim_{t \to \infty} \left[\frac{\arctan^4 x}{4} \right]_2^t = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{4} \left(\arctan^4 t - \arctan^4 2 \right) =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{\pi}{2} \right)^4 - \frac{\arctan^4 2}{4}$$

Protože integrál je konečný, bude vyšetřovaná řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan^3 n}{(1+n^2)}$ konvergentní dle integrálního kritéria.

V předchozích příkladech jsme užívali integrálního kritéria k důkazu konvergence či divergence nekonečné číselné řady. Ukažme si ještě jedno použití integrálního kritéria. Protože tvrzení má tvar ekvivalence, můžeme jej využít také k důkazu existence nevlastního integrálu. Pokud totiž ukážeme, že $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f(k)$ konverguje, bude existovat i integrál $\int\limits_1^{\infty} f(x)dx$. Je to výhodné v případech, kdy potřebujeme zjistit, zda je daný nevlastní integrál konečný a nepotřebujeme znát jeho hodnotu.

Příklad 37: Rozhodněte, zda existuje integrál

$$\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2+1}}$$

Rozhodovat o existenci tohoto integrálu jeho výpočtem je v tomto případě komplikované, zkusme proto užít integrálního kritéria. Snadno se ověří, že $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x\sqrt[3]{x^2+1}} = 0$ a funkce $\frac{1}{x\sqrt[3]{x^2+1}}$ je klesající na intervalu $\langle 1; \infty)$. Proto stačí ukázat konvergenci řady $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\sqrt[3]{k^2+1}}$. Užijme srovnávacího a integrálního kritéria (věty 3.3). Dostaneme:

$$\frac{1}{k\sqrt[3]{k^2+1}} \le \frac{1}{k\sqrt[3]{k^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{k^5}} = \frac{1}{k^{\frac{5}{3}}}.$$

Protože $\frac{5}{3} > 1$ je řada $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\frac{5}{3}}}$ konvergentní dle věty 3.3 a dle srovnávacího kritéria je konvergentní i řada $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\sqrt[3]{k^2+1}}$, takže dle integrálního kritéria je konečný i integrál $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2+1}}$.

Příklad 38: Vyšetřete konvergenci integrálu

$$\int\limits_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}.$$

Výpočet tohoto integrálu přes primitivní funkci je v tomto případě již složitější. Proto zkusme užít integrální kritérium. Obě podmínky kritéria pro funkci $\frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}$ jsou splněny, protože funkce je klesající na $\langle 1; \infty)$ a $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}} = 0$. Vyšetřeme tedy konvergenci nebo divergenci řady $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k^2+k+1}}$. Obdobně jako v předchozím příkladě použijeme srovnávací kritérium, tentokrát k důkazu její divergence, neboť členy řady se chovají přibližně lineárně. Budeme je tedy srovnávat s harmonickou řadou $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$.

$$\frac{1}{\sqrt{k^2+k+1}} \geq \frac{1}{\sqrt{k^2+k^2+k^2}} = \frac{1}{\sqrt{3k^2}} = \frac{1}{\sqrt{3} \cdot k}$$

Protože harmonická řada $\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ diverguje, musí divergovat dle srovnávacího kritéria i řada $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k^2+k+1}}$ a dle integrálního kritéria diverguje i integrál $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}$.

Příklad 39: Rozhodněte, zda konverguje integrál

$$\int\limits_{1}^{\infty} \left(\frac{x+1}{3x+1}\right)^x dx.$$

Rozhodnout o existenci tohoto integrálu přímým výpočtem je v tomto případě nemožné. Pokusíme se tedy rozhodnout pomocí integrálního kritéria. Ověřme nejprve podmínky kritéria.

1) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) \stackrel{?}{=} 0$

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x+1}{3x+1}\right)^x = \lim_{x\to\infty} e^{x \cdot \ln\left(\frac{x+1}{3x+1}\right)}$$

Vypočítejme nejprve limitu exponentu.

$$\lim_{x\to\infty} \left[x \cdot \ln\left(\frac{x+1}{3x+1}\right)\right] = \lim_{x\to\infty} x \cdot \lim_{x\to\infty} \ln\left(\frac{x+1}{3x+1}\right) =$$
$$= \lim_{x\to\infty} x \cdot \ln\left(\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{3x+1}\right)\right) = \ln\left(\frac{1}{3}\right) \cdot \lim_{x\to\infty} x = -\infty$$

Tato limita existuje a z vlastností exponenciální funkce pak plyne, že hledaná limita $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{3x+1}\right)^x$ je rovna limitě $\lim\limits_{y\to-\infty} e^y = 0$.

2) Zbývá ukázat, že funkce $\left(\frac{x+1}{3x+1}\right)^x$ je nerostoucí na $\langle 1;\infty)$.
Pro vyšetření monotonie spočtěme první derivaci této funkce.

$$\left[\left(\frac{x+1}{3x+1}\right)^x\right]' = \left[e^{\left[x\cdot\ln\left(\frac{x+1}{3x+1}\right)\right]}\right]' =$$

$$= e^{\left[x\cdot\ln\left(\frac{x+1}{3x+1}\right)\right]}\cdot\left[\ln\left(\frac{x+1}{3x+1}\right) + x\cdot\frac{3x+1}{x+1}\cdot\frac{3x+1-3(x+1)}{(3x+1)^2}\right] =$$

$$= \left(\frac{x+1}{3x+1}\right)^x\cdot\left[\ln\left(\frac{x+1}{3x+1}\right) + \frac{-2x}{(x+1)(3x+1)}\right]$$

Protože funkční hodnoty $\left(\frac{x+1}{3x+1}\right)^x$ jsou kladné pro $\forall x \geq 1$, rozhodne o znaménku derivace výraz v hranatých závorkách. Snadno lze nahlédnout, že pro $\forall x \geq 1$ platí:

$$0 < \frac{x+1}{3x+1} < 1,$$

takže $\ln\left(\frac{x+1}{3x+1}\right) < 0$ pro tato x. Zároveň pro všechna $x \in \langle 1;\infty)$ je výraz $\frac{x}{(x+1)(3x+1)} > 0$, takže $\frac{-2x}{(x+1)(3x+1)} < 0$ a tudíž celá první derivace je záporná na intervalu $\langle 1;\infty)$. Z toho vyplývá, že funkce $\left(\frac{x+1}{3x+1}\right)^x$ je na tomto intervalu klesající, čímž jsme ověřili i druhou podmínku integrálního kritéria.

Vyšetřeme tedy nyní konvergenci nebo divergenci řady:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{3n+1}\right)^n.$$

Využijme Cauchyovo limitní odmocninové kritérium:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{3n+1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{3n+1} = \frac{1}{3}.$$

Limita je rovna $\frac{1}{3}$ a protože je $\frac{1}{3} < 1$ je řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{3n+1}\right)^n$ konvergentní dle limitního odmocninového kritéria a dle integrálního kritéria musí integrál $\int\limits_1^{\infty}\left(\frac{x+1}{3x+1}\right)^x dx$ také konvergovat.

3.3 Užití konvergence řady při výpočtu limity posloupnosti

Ve druhé kapitole jsme vyslovili a dokázali tzv. *nutnou podmínku konvergence* (Věta 2.2) a ukázali jsme, jak ji lze využít k důkazu divergence řady. Poznamenali jsme, že lze tuto větu použít i obráceně. Pokud totiž ukážeme, že řada $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje, bude limita posloupnosti $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$,určující tuto řadu, nulová. Předvedeme si toto užití nutné podmínky konvergence řady na příkladech.

Příklad 40: Vypočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{c^n} \qquad k \in N - \{0\} \quad c \in R \wedge c > 1.$$

Vyšetřeme konvergenci nebo divergenci řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^k}{c^n}$.
K tomu můžeme využít libovolné z kritérií konvergence uvedené v předchozí části. Zde bude nejvýhodnější užít odmocninové limitní kritérium (věta 3.9). Dostaneme:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^k}{c^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt[n]{n})^k}{c} = \frac{\left(\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}\right)^k}{c} = \frac{1}{c}.$$

Protože $c > 1$ je $\frac{1}{c} < 1$ a dle odmocninového limitního kritéria řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^k}{c^n}$ konverguje, takže dle nutné podminky konvergence musí být $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^k}{c^n} = 0$.

Příklad 41: Vypočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n!)^{k+1}} \qquad k \in N - \{0\}$$

Vypočítat tuto limitu přímo je obtížné, proto se pokusíme užít nutné podmínky konvergence řady. Analogicky jako v předchozím příkladě budeme zkoumat konvergenci řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n!)^{k+1}}$. Zde bude výhodné užít limitní podílové kritérium (věta 3.7)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{[(n+1)!]^{k+1}} \cdot \frac{(n!)^{k+1}}{n^n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\cdot(n+1)^n \cdot (n!)^{k+1}}{(n+1)^{k+1}\cdot(n!)^{k+1}\cdot n^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(n+1)^n}{(n+1)^{k+1}\cdot n^n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{(n+1)^k}\right] = \lim_{n\to\infty} \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{(n+1)^k}\right] = e\cdot 0 = 0$$

Protože je tato limita nulová a $0 < 1$, je řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n!)^{k+1}}$ konvergentní dle limitního podílového kritéria. Proto je dle nutné podmínky konvergence

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n!)^{k+1}} = 0$.

Je důležité si uvědomit, že pokud bude nekonečná řada určená danou posloupností divergentní, nemůžeme o limitě příslušné posloupnosti nic říci. Vezměme například posloupnosti $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ a $\left\{\frac{3n+1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$. Obě řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{n}$ jsou divergentní, přitom $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ a $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n+1}{n} = 3$.

Nutnou podmínku konvergence lze tedy použít k důkazu, že limita posloupnosti je nulová, pokud její členy určují konvergentní řadu. Nebo též k důkazu, že $\lim\limits_{\to\infty} a_n = \infty$ pokud jsou členy posloupnosti $a_n > 0$. Demonstrujme to na následujícím příkladě:

Příklad 42: Dokažte, že

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{n!} = \infty.$$

Uvažujme nekonečnou řadu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$. Jde o řadu s kladnými členy a užitím podílového limitního kritéria se ukáže, že tato řada konverguje. Dle nutné podmínky konvegence je $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$. Protože pro libovolné přirozené číslo (kromě nuly) je $\frac{n!}{n^n} > 0$, je dle věty o limitě posloupnosti a algebraických operacích $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^n}{n!} = \infty$.

Úkoly a cvičení:

1. Rozhodněte o konvergenci nebo divergenci řad:

   a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n}$ [konverguje] b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 a^n}{3n^3} \quad a \in R$ [konverguje]

   c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n \cdot \sqrt{n+1}}$ [konverguje] d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n(n+1)(n+2)(n+3)}}$ [konverguje]

   e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{100^n \cdot n^2}{n!}$ [konverguje] f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n! e^n}{n^{n+4}}$ [konverguje]

   g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\cos \frac{5}{n}\right)^{n^3}$ [konverguje] h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan(n^2+2)}{\ln^n n}$ [konverguje]

   i) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}$ [diverguje] j) $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n [\ln(\ln n)]^3}$ [konverguje]

   k) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3}{(2n+1)^3}$ [konverguje] l) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n^3+2n^2+3}}$ [diverguje]

   m) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$ [konverguje] n) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^7}{3^n+5^n}$ [konverguje]

   o) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n!}{n^n}$ [konverguje] p) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot n!}{n^n}$ [diverguje]

   q) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left[(\sqrt{2} - \sqrt[3]{2})(\sqrt{2} - \sqrt[5]{2}) \dots (\sqrt{2} - \sqrt[2n+1]{2})\right]$ [konverguje]

   Návod: Užijte vhodného kritéria pro konvergenci nebo divergenci řad s nezápornými členy

2. Rozhodněte zda konvergují integrály:

   a) $\int\limits_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x^3+5x-1}} dx$ [konverguje] b) $\int\limits_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{x^4-2x^3+5x}} dx$ [diverguje]

   c) $\int\limits_1^{\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^3} dx$ [konverguje] d) $\int\limits_1^{\infty} \frac{x^4 \cdot 7^{\frac{x}{2}}}{e^x} dx$ [konverguje]

   e) $\int\limits_1^{\infty} \frac{x^k \cdot \sin \frac{1}{x}}{1+x^m} dx \quad k, m \in N$ [konverguje pro $m \geq k+2$, jinak diverguje]

   Návod: Užijte integrální kritérium a dokažte konvergenci příslušné nekonečné řady.

3. Vypočtěte následující limity užitím nutné pomínky konvergence:

   a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{c^n}{n!} \qquad c \in R \wedge c > 1$

   b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n}$

4. Řady s libovolnými členy

4.1 Bolzano-Cauchyovo kritérium

Pokud je řada $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ řadou s libovolnými členy, nelze k vyšetření její konvergence nebo divergence použít žadného kritéria uvedeného v kapitole 3, protože její členy nemusí splňovat podmínku nezápornosti. Je tedy nutné použít k jejímu vyšetření jiných metod a kritérii. Bolzano-Cauchyovo kritérium umožňuje vyšteřit konvergenci nebo divergenci řady bez ohledu na vlastnosti jejích členů, protože využívá vlastností posloupnosti jejích částečných součtů. Proto uvedeme nejprve Bolzano-Cauchyovo kritérium pro konvergenci posloupnosti reálných čísel.

Věta 4.1:(Bolzano-Cauchyovo kritérium konvergence číselné posloupnosti)
Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje (má konečnou limitu) právě tehdy, když platí:

$$(\forall \epsilon > 0) \quad (\exists n_0 \in N); \; (\forall m, n \in N, \; m, n > n_0 : |a_m - a_n| < \epsilon.)$$

Důkaz:

Předpokládejme nejprve, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje, tedy existuje $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, kde $A \in R$. Budeme chtít ukázat, že potom již členy posloupnosti splňují výše uvedenou podmínku.

Uvažme libovolné $\epsilon > 0$. Pro toto ϵ najdeme $n_0 \in N$ tak, že pro $\forall n > n_0$ je $|a_n - A| < \frac{\epsilon}{2}$ dle definice limity. Nyní odhadneme $|a_m - a_n|$.

Dostáváme:

$$|a_m - a_n| = |a_m - A + A - a_n| \leq |a_m - A| + |a_n - A| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

pokud vezmeme $m, n > n_0$.

To je již požadovaná podmínka, takže první implikace je dokázána.

Nyní ukažme, že z platnosti této podmínky plyne existence vlastní limity. Nechť tedy $(\forall \epsilon > 0) \quad (\exists n_0 \in N); \ (\forall m, n \in N, \ m, n > n_0 : |a_m - a_n| < \epsilon.)$ Zvolme například $\epsilon = 1$. Pak dle předpokladu existuje $n_0 \in N$ tak, že pro $\forall m, n > n_0 : -1 < a_n - a_m < 1$. Vezmeme $m = n_0 + 1$, což znamená, že m bude pevné a člen a_m konstanta. Pak dostáváme:

$$-1 + a_m < a_n < 1 + a_m$$

Z toho plyne, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je omezená shora konstantou K, kde

$$K = max(a_1, a_2 \ldots, a_{n_0}, 1 + a_m)$$

a zdola konstantou L, kde

$$L = min(a_1, a_2 \ldots, a_{n_0}, -1 + a_m),$$

takže posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je omezená. Dle Weierstrassovy věty [8] lze z každé omezené posloupnosti vybrat konvergentní podposloupnost, tj. $\exists \{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, která má vlastní limitu. $(\lim\limits_{k \to \infty} a_{n_k} = A \quad A \in R)$ Stačí tedy ukázat, že limita této vybrané posloupnosti je rovna limitě celé posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Vezměme libovolné $\epsilon > 0$. Dle předpokladu $\exists n_0 \in N; \ \forall m, n \in N, \ m, n > n_0 : |a_m - a_n| < \frac{\epsilon}{2}$. Dále $\exists k_0$ tak, že $k_0 > n_0$ a pro $\forall k > k_0 : |a_{n_k} - A| < \frac{\epsilon}{2}$, což plyne z existence konečné limity vybrané posloupnosti $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$. Vezměme $k = k_0 + 1$ pevné, takže a_{n_k} je konstantní. Odhadneme $|a_n - A|$:

$$|a_n - A| = |a_n - a_{n_k} + a_{n_k} - A| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - A| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Nerovnost $|a_n - A| < \epsilon$ ovšem neznamená nic jiného, než že $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = A$ a důkaz je hotov.

Poznámka: Posloupnost, která splňuje předpoklady Bolzano-Cauchyova kritéria se nazývá cauchyovská.

Věta 4.2:(Bolzano-Cauchyovo kritérium konvergence řady)

Nekonečná řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje právě tehdy, když

$$(\forall \epsilon > 0) \quad (\exists n_0 \in N); \ (\forall m, n \in N, \ m, n > n_0 \quad m > n : \left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \right| < \epsilon.)$$

[8] Weierstrassova věta o vyprané posloupnosti: Z každé omezené posloupnosti reálných čísel lze vybrat posloupnost, která je konvergentní.

Důkaz:

Důkaz tohoto tvrzení je nasnadě. Stačí si totiž uvědomit, že

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\right| = \left|\sum_{k=1}^{m} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_k\right| = |s_m - s_n|,$$

kde s_m a s_n jsou m-tý a n-tý částečný součet řady. Protože členy posloupnosti částečných součtů $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ splňují podmínky Bolzano-Cauchyova kritéria konvergence posloupnosti, má tato posloupnost vlastní limitu, což znamená, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje a příslušná limita $\lim_{n\to\infty} s_n$ by byla jejím součtem.

Poznámka: Podmínku

$$(\forall \epsilon > 0) \quad (\exists n_0 \in N); \; (\forall m, n \in N, \; m, n > n_0 \quad m > n : \left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\right| < \epsilon)$$

lze nahradit ekvivalentní podmínkou

$$(\forall \epsilon > 0) \quad (\exists n_0 \in N); \; (\forall r \in N) r > 1 : \quad \left|\sum_{k=n_0+1}^{n_0+r} a_k\right| < \epsilon.$$

Nyní předvedeme použití Bolzano-Cauchyova kritéria konvergence řad na příkladech:

Příklad 1: Dokažte konvergenci řady

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}.$$

Užijeme k důkazu Bolzano-Cauchyovo kritérium. Musíme tedy ukázat, že pro $\forall \epsilon > 0 \quad \exists n_0 \in N$ tak, že pro $\forall m, n > n_0$ je $\sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k!} < \epsilon$. Nejprve upravme výraz $\left|\sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k!}\right|$, přičemž absolutní hodnotu můžeme vynechat, neboť jak celý výraz, tak každý jeho člen jsou vždy kladné.

$$\sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \ldots + \frac{1}{m!} =$$

$$= \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \ldots + \frac{1}{(n+1)(n+2)\ldots m)}\right)$$

Nyní každý dvojčlen $(n+k)$ ve jmenovatelích součtu v závorce nahradíme výrazem $(n+1)$, a tak celý výraz zvětšíme, protože $n+1 < n+k$ pro $k > 1$. Dostaneme:

$$= \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \ldots + \frac{1}{(n+1)(n+2)\ldots m)}\right) =$$

$$= \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \ldots + \frac{1}{(n+1)(n+2)\ldots(n+m-n)}\right) \leq$$

$$\leq \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+1)} + \ldots + \frac{1}{\underbrace{(n+1)(n+1)\ldots(n+1)}_{(m-n)-\text{krát}}}\right) =$$

$$= \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \ldots + \frac{1}{(n+1)^{m-n}}\right).$$

V závorce jsou členy geometrické posloupnosti s prvním členem $\frac{1}{n+1}$ a kvocientem také $\frac{1}{n+1}$. Těchto členů je $m-n$. Sečteme je užitím vztahu pro součet prvních n-členů geometrické posloupnosti. (V tomto případě (m-n)-členů.)

$$\frac{1}{n!}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \ldots + \frac{1}{(n+1)^{m-n}}\right) =$$

$$= \frac{1}{n!} \cdot \left(\frac{1}{n+1} \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{n+1}\right)^{m-n}}{1-\frac{1}{n+1}}\right) = \frac{1}{n!} \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{n+1}\right)^{m-n}}{n} \leq \frac{1}{n \cdot n!} \leq \frac{1}{n}$$

Toto je již jednoduchý odhad a zřejmě najdeme k libovolnému $\epsilon > 0$ takové n_0, aby $\frac{1}{n} < \epsilon$. Stačí vzít například $n_0 = \left[\frac{1}{\epsilon}\right]$ a podmínka Bolzano-Cauchyova kritéria je splněna. Proto je řada $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}$ konvergentní.

Příklad 2: Rozhodněte o konvergenci nebo divergenci řady

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}.$$

Ukážeme tedy druhý důkaz divergence harmonické řady. Budeme chtít dokázat negaci podmínky Bolzano-Cauchyova kritéria, kterou zformulujeme takto:

$$(\exists \epsilon > 0) \quad (\forall n_0 \in N) \quad (\exists m, n \in N; (m > n > n_0) \wedge \left| \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k} \right| \geq \epsilon.)$$

Odhadneme nejprve výraz $\left| \sum\limits_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k} \right|$. Absolutní hodnotu můžeme opět vynechat, protože všechny členy výrazu jsou kladné. Úpravou dostaneme:

$$\sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+(m-n)} \geq$$

$$\geq \underbrace{\frac{1}{m} + \frac{1}{m} + \ldots + \frac{1}{m}}_{(m-n)-\text{krát}} = \frac{m-n}{m}$$

Protože negace podmínky vyžaduje nalezení jednoho konkrétního $\epsilon > 0$ a jedné konkrétní dvojice m, n ke každému $n_0 \in N$, Položme $m = 2n$. Potom

$$\sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k} \geq \frac{m-n}{m} = \frac{2n-n}{2n} = \frac{1}{2}$$

pro všechna $n_0 \in N$ a $\frac{1}{2}$ je hledané ϵ. Tím je divergence harmonické řady $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ dokázána.

Příklad 3: Dokažte konvergenci řady:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{2^n}.$$

K důkazu konvergence použijeme opět Bolzano-Cauchyovo kritérium. Odhadněme výraz $\left| \sum\limits_{k=n+1}^{m} \frac{\sin k}{2^k} \right|$ pro $m > n, , n \in N$.

$$\left| \sum_{k=n+1}^{m} \frac{\sin k}{2^k} \right| = \left| \frac{\sin(n+1)}{2^{n+1}} + \frac{\sin(n+2)}{2^{n+2}} + \ldots + \frac{\sin(m)}{2^m} \right|$$

Protože $\sin x \in \langle -1; 1 \rangle$ pro $\forall x \in R$, můžeme sinus odhadnout jedničkou.

$$\left| \frac{\sin(n+1)}{2^{n+1}} + \frac{\sin(n+2)}{2^{n+2}} + \ldots + \frac{\sin(m)}{2^m} \right| \leq \left| \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \ldots + \frac{1}{2^m} \right|$$

V absolutní hodnotě je součet (m-n)-členů geometrické posloupnosti s prvním členem $\frac{1}{2^{n+1}}$ a kvocientem $\frac{1}{2}$. Užijeme vztah pro tento součet a dostaneme:

$$\left|\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{2^{n+2}}+\ldots+\frac{1}{2^m}\right| = \frac{1}{2^{n+1}}\cdot\frac{\left|1-\left(\frac{1}{2}\right)^{m-n}\right|}{1-\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{2}{2^{n+1}}\cdot\left|1-\left(\frac{1}{2}\right)^{m-n}\right| = \frac{1}{2^n}\left|1-\left(\frac{1}{2}\right)^{m-n}\right| \leq \frac{1}{2^n}.$$

Ke zvolenému $\epsilon > 0$ již z tohoto odhadu lze najít n_0 tak, aby $\forall m, n > n_0$ bylo $\frac{1}{2^n} < \epsilon$. Stačí vzít např. $n_0 = \left[\log_2 \frac{1}{\epsilon}\right] + 1$. Tento odhad získáme následující úvahou:

$$\frac{1}{2^{n_0}} < \epsilon \quad\Rightarrow\quad 2^{n_0} > \frac{1}{\epsilon} \quad\Rightarrow\quad n_0\cdot\log_2 2 > \log_2\frac{1}{\epsilon} \quad\Rightarrow\quad n_0 > \log_2\frac{1}{\epsilon}.$$

Je vidět, že důkaz konvergence nebo divergence užitím Bolzano-Cauchyova kritéria je myšlenkově jednoduchý, protože spočívá pouze v ověření příslušné podmínky. Jeho úskalím je, že najít rozumný odhad, se kterým je možné pracovat, nemusí být jednoduché a obzvláště v případech, kdy členy řady mají složitý tvar, se nám takový odhad pro ověření podmínky nemusí podařit najít. V tom případě nelze toto kritérium použít a musíme si poradit jinak.

4.2 Absolutní konvergence řady

Definice 4.1:(Absolutně konvergentní řada)

Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje *absolutně*, konverguje-li řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Poznámka: Jestliže řada konverguje, ale nekonverguje absolutně, říkáme že *konverguje neabsolutně* (relativně).

Věta 4.3:

Jestliže řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně, potom konverguje i neabsolutně.

Důkaz:

Protože řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutně konverguje, platí dle Bolzano-Cauchyova kritéria:

$$(\forall \epsilon > 0) \quad (\exists n_0 \in N); \ (\forall m, n \in N), \ (m, n > n_0) \quad m > n :$$

$$\sum_{k=n+1}^{m} |a_k| = |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \ldots + |a_m| < \epsilon$$

Z vlastnosti absolutní hodnoty víme, že

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_m| \leq |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \ldots + |a_m| < \epsilon,$$

takže i $|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_m| < \epsilon$ a dle Bolzano-Cauchyovy podmínky konverguje řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ neabsolutně.

Mezi všemi řadami s obecnými členy mají zvláštní postavení řady se střídajícími se znaménky u jejich členů, tj. pro každé přirozené n platí: $a_n \cdot a_{n+1} < 0$. Takové řady se nazýávají ***alternující řady***. Každou takovou řadu lze napsat ve tvaru $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$, kde $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost nezáporných čísel. K zjištění jejich neabsolutní konvergence může posloužit *Leibnizovo kritérium* pro alternující řady, které nyní uvedeme.

Věta 4.4: (Leibnizovo kritérium pro alternující řadu)

Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nerostoucí posloupnost reálných čísel. Pak platí:

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ konverguje právě tehdy, když $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Poznámka: V následujícím důkazu budeme předpokládat že první člen a_1 je nezáporný, což můžeme učinit bez újmy na obecnosti, protože pokud by byl první člen záporný, můžeme řadu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ napsat v ekvivalentním tvaru $-\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(-a_n)$ a vyšetřit konvergenci řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(-a_n)$, která má již první člen nezáporný. Na konvergenci nebo divergenci řady nebude mít tato úprava vliv, protože se obě řady liší pouze znaménkem.

Důkaz:

Důkaz rozdělíme na dvě části.

1. Ukážeme, že z konvergence řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ plyne, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. To je ovšem triviální, neboť tato skutečnost plyne přímo z nutné podmínky konvergence řady.

2. Nyní ukážeme, že z předpokladu $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ a z předpokladu $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nerostoucí plyne konvergence řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$.

   Budeme chtít ukázat, že tato řada má omezené částečné součty $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$.

   Sestrojme dvě posloupnosti částečných součtů: Posloupnost částečných součtů o sudém počtu členů $\{s_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$, která bude neklesající a posloupnost částečných součtů o lichém počtu členů $\{s_{2n+1}\}_{n=1}^{\infty}$, která bude nerostoucí.

$$s_{2n} = (\underbrace{a_1 - a_2}_{\geq 0}) + (\underbrace{a_3 - a_4}_{\geq 0}) + \ldots + (\underbrace{a_{2n-1} - a_{2n}}_{\geq 0})$$

$$s_{2n+1} = a_1 - (\underbrace{a_2 - a_3}_{\geq 0}) - (\underbrace{a_4 - a_5}_{\geq 0}) - \ldots - (\underbrace{a_{2n} - a_{2n+1}}_{\geq 0})$$

   $\{s_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ je neklesající, protože je posloupností součtů nezáporných členů. Členy $(a_n - a_{n+1}) \geq 0$, protože $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nerostoucí. Platí tedy:

$s_{2n+2} - s_{2n} = a_{2n+1} - a_{2n+2} \geq 0.$

$\{s_{2n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ je naopak nerostoucí (odečítáme kladné členy $(a_n - a_{n+1})$). Snadno se přesvědčíme, že: $s_{2n+1} - s_{2n-1} = -(a_{2n} - a_{2n+1}) \leq 0$ a z toho plyne, že $\{s_{2n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ je skutečně nerostoucí.

Navíc platí, že $s_{2n+1} = s_{2n} + a_{2n+1}$, což snadno nahlédneme, pokud si příslušné částečné součty rozepíšeme. Protože je dle předpokladu $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, je dle věty o limitě vybrané posloupnosti $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n+1} = 0$. Z toho ovšem plyne, že posloupnosti $\{s_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{s_{2n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ mají stejnou limitu, pokud existuje alespoň jedna z nich.

Limita $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ a posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je monotónní (nerostoucí), takže limita je jejím infimem dle věty o limitě monotónní posloupnosti. Navíc je $a_{2n+1} \geq 0$ pro $\forall n \in N$ a $s_{2n+1} = s_{2n} + a_{2n+1}$. Odtud:

$$s_{2n} \leq s_{2n+1} \leq s_{2n-1} \leq \ldots \leq s_1 = a_1.$$

Posloupnost $\{s_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ je omezená shora členem a_1 a protože je neklesající, musí existovat vlastní limita $\lim\limits_{n\to\infty} s_{2n} = s,\ s \in R, (s \leq a_1)$. Protože jsme navíc ukázali, že posloupnost $\{s_{2n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ musí mít stejnou limitu, jako posloupnost $\{s_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$, jsou částečné součty $\{s_k\}_{k=1}^{\infty}$ původní řady omezené a řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ konverguje.

Z právě dokázaného tvrzení plyne zajímavý **důsledek**:

Mějme řadu se střídavými znaménky $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}a_k, a_k \geq 0$. Pak platí:

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leq a_{n+1}.$$

(Tzn.: n-tý částečný součet se od součtu celé řady liší nanejvýš o první zanedbaný člen)

Důkaz:

Označme součet řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = s$. Pokud sestrojíme posloupnosti částečných součtů sudého a lichého počtu členů $\{s_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{s_{2n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ tak, jako v důkazu věty 4.4, bude platit:

$$s_{2n} \leq sup\,\{s_{2n}\} = s = inf\,\{s_{2n+1}\} \leq s_{2n+1}$$

Navíc z předchozího důkazu ještě víme, že $s_{2n+1} = s_{2n} + a_{2n+1}$. Rozdělme nyní důkaz na dvě části pro sudé a liché částečné součty.

1. Pro součty sudého počtu členů chceme ukázat, že

$$|s - s_{2n}| \leq a_{2n+1}$$

   Vyjdeme z výše uvedených nerovností:

$$s_{2n} \leq sup\{s_{2n}\} = s \leq s_{2n+1}$$
$$0 \leq s - s_{2n} = |s - s_{2n}| \leq s_{2n+1} - s_{2n} = a_{2n+1}.$$

   To už je požadovaná nerovnost. Rovnost $s - s_{2n} = |s - s_{2n}|$ platí z toho důvodu, že $\{s_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ je neklesající posloupnost se supremem s.

2. Pro částečné součty lichého počtu členů budeme chtít ukázat, že

$$|s - s_{2n-1}| \leq a_{2n}.$$

   Opět využijeme nerovností mezi částečnými součty a dostaneme:

$$s_{2n} \leq s \leq s_{2n-1}$$

$$s_{2n} - s_{2n-1} \leq s - s_{2n-1} \leq 0$$
$$s_{2n-1} - s_{2n} \geq s_{2n-1} - s \geq 0$$
$$s_{2n-1} - s_{2n} \geq |s_{2n-1} - s| \geq 0$$
$$-(-a_{2n}) \geq |s - s_{2n-1}| \quad \Rightarrow \quad a_{2n} \geq |s - s_{2n-1}|$$

   a jsme hotovi. (Rovnost $s_{2n-1} - s = |s_{2n-1} - s|$ plyne z toho, že $\{s_{2n-1}\}_{n=1}^{\infty}$ je nerostoucí posloupnost s infimem s.)

Leibnizovo kritérium je velmi účinným prostředkem k vyšetření konvergence řady se střídavými znaménky, protože vyžaduje pouze výpočet limity a důkaz monotonie příslušné posloupnosti. Předvedeme si jeho použití na příkladech.

Příklad 4: Rozhodněte o konvergenci řady:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$

Protože posloupnost $\left\{\frac{1}{k}\right\}_{k=1}^{\infty}$ je zřejmě klesající, stačí jen ověřit její limitu. Velmi snadno nahlédneme, že $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0$, takže dle Leibnizova kritéria je řada $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ konvergentní.

Poznámka: Tato řada však není absolutně konvergentní, protože $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^{k-1}}{k}\right| = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$, což je harmonická řada, která, jak víme, diverguje.

Příklad 5: Rozhodněte, zda konverguje nebo diverguje řada

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k}}{\sqrt{k}}.$$

zcela analogicky jako v předchozím příkladě lehce ukážeme, že posloupnost $\left\{\frac{1}{\sqrt{k}}\right\}_{k=1}^{\infty}$ je klesající a $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} = 0$, takže řada $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k}}{\sqrt{k}}$ neabsolutně konverguje dle Leibnizova kritéria a stejně jako v předchozím příkladě můžeme poznamenat, že tato řada nemůže absolutně konvergovat, protože $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$ diverguje, což bylo již dokázáno v kapitole 3. (Viz věta 3.3)

Příklad 6: Rozhodněte o konvergenci či divergenci řady:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^{n-1}}{n}\right)\right].$$

Pokud budeme chtít použít Leibnizovo kritérium bude sice platit, že $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^{n-1}}{n}\right) = 0$, ale druhá podmínka kritéria splněna nebude, protože posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde $a_n = \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^{n-1}}{n}\right)$, není nerostoucí. Je totiž: $a_{2n-1} > a_{2n}$, $a_{2n} < a_{2n+1}$. Proto Leibnizovo kritérium nemůžeme použít. Pokud však řadu upravíme, dostáváme:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^{n-1}}{n}\right)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^{2n-2}}{n}\right] =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} \right]$$

Protože $\frac{1}{n}$ jsou členy divergentní harmonické řady a $\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ jsou členy konvergentní řady, bude celá řada
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left[(-1)^{n-1} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^{n-1}}{n}\right)\right]$ také divergovat.

Řady s obecnými členy můžeme tedy dělit na tři skupiny. První skupinu tvoží absolutně konvergentní řady. Pokud je řada absolutně konvergentní, bude konvergentní i neabsolutně dle věty 4.3. Pokud řada nekonverguje absolutně, může konvergovat neabsolutně. Neabsolutně konvergentní řady tedy tvoří druhou skupinu. Pokud nekonverguje řada ani neabsolutně, jde o divergentní řadu. Ty budou tvořit třetí skupinu.

Řady		
	konvergentní	
divergentní	absolutně	neabsolutně

Z tohoto rozdělení zároveň plyne postup, který budeme používat pro vyšetřování řad s obecnými členy. Nejprve zjistíme, zda daná řada absolutně konverguje, protože budeme v podstatě vyšetřovat konvergenci řady s nezápornými členy, o kterých máme mnohem více poznatků. Pokud řada konverguje absolutně, jsme hotovi. Pokud ne, vyšetříme ještě neabsolutní konvergenci. Pokud řada nekonverguje ani neabsolutně, je divergentní. Předveďme si tento postup na příkladech.

Příklad 7: Rozhodněte o konvergenci nebo divergenci řady

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^3}.$$

(Pokud je řada konvergentní rozhodněte, zda absolutně nebo neabsolutně.)

Jde o řadu s obecnými členy, proto nejprve vyšetříme její absolutní

konvergenci.
$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^k}{k^3}\right| = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{|(-1)^k|}{k^3} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3}$$
Takto vzniká řada je řada s kladnými členy, proto můžeme k zjištění její konvergence využít kterékoliv kritérium z předchzí kapitoly. Užijeme li tvrzení věty 3.3 nebo integrálního kritéria, snadno ukážeme, že řada $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3}$ konverguje. Původní řada $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^3}$ je tudíž **absolutně** konvergentní a jsme hotovi.

Příklad 8: Vyšetřete konvergenci nebo divergenci řady
$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}(3k+1)}{2k^2+5}.$$

Protože jde o řadu s obecnými členy, budeme analogicky jako v předchozím příkladě vyšetřovat nejprve absolutní konvergenci této řady.
$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{k-1}(3k+1)}{2k^2+5}\right| = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{|(-1)^{k-1}|(3k+1)}{2k^2+5} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{3k+1}{2k^2+5}.$$
Dostáváme řadu s kladnými členy, proto použijeme k důkazu konvergence nebo divergence některé kritérium z kapitoly 3. Protože členy řady klesají přibližně lineárně, použijeme srovnávací kritérium a ukážeme její divergenci srovnáním s harmonickou řadou. Pro členy řady platí:
$$\frac{3k+1}{2k^2+5} \geq \frac{3k}{2k^2+5} \geq \frac{3k}{2k^2+5k^2} \geq \frac{3}{7k}.$$

Protože řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3}{7k} = \frac{3}{7}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ je divergentní, diverguje dle srovnávacího kritéria i řada $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{3k+1}{2k^2+5}$. Z toho plyne že původní řada $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}(3k+1)}{2k^2+5}$ nekonverguje absolutně. Protože jde o řadu se střídavými znaménky, pokusíme se ověřit podmínky Leibnizova kritéria a ukázat tak neabsolutní konvergenci této řady.
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{3k+1}{2k^2+5} = \lim_{n\to\infty}\frac{k\left(3+\frac{1}{k}\right)}{k^2\left(2+\frac{5}{k^2}\right)} = 0.$$

Protože posloupnost $\left\{\frac{3k+1}{2k^2+5}\right\}$ je klesající od členu $k=2$, je řada $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}(3k+1)}{2k^2+5}$ neabsolutně konvergentní dle Leibnizova kritéria.

Příklad 9: Vyšetřete absolutní a neabsolutní konvergenci nebo divergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} a^n}{\sqrt[5]{n^4}},$$

v závislosti na parametru $a \in R$.

Nejprve vyšetříme, pro která $a \in R$ řada absolutně konverguje. Budeme tedy vyšetřovat řadu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} a^n}{\sqrt[5]{n^4}} \right|$. Nejprve výraz upravíme:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} a^n}{\sqrt[5]{n^4}} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|(-1)^{n+1}|\, |a^n|}{\sqrt[5]{n^4}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a|^n}{\sqrt[5]{n^4}}$$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{|a|^n}{\sqrt[5]{n^4}}$ bude řada s *nezápornými* členy, proto k vyšetření její konvergence lze použít Cauchyovo limitní odmocninové kritérium.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|a|^n}{\sqrt[5]{n^4}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{|a|}{\sqrt[5]{(\sqrt[n]{n})^4}} = \frac{|a|}{1} = |a|$$

Dle tvrzení limitního odmocninového kritéria (věta 3.9) bude tato řada konvergentní pro $|a| < 1$ a divergentní pro $|a| > 1$.

Z předchozího výpočtu tedy vyplývá, že původní řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} a^n}{\sqrt[5]{n^4}}$ je absolutně konvergentní pro $a \in (-1; 1)$. Pokud $|a| > 1$ řada nekonverguje absolutně a pro $a = \pm 1$ nemůžeme pomocí užitého kritéria rozhodnout.
Rozeberme případ, kdy $|a| > 1$.
Snadno ukážeme, že v tomto případě řada nesplňuje nutnou podmínku konvergence, protože $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ nebude rovna nule. Uvažujme funkci $f : f(x) = \frac{|a|^x}{\sqrt[5]{x^4}}$ a vypočítejme limitu $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ užitím L'Hospitalova pravidla.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{|a|^x}{\sqrt[5]{x^4}} \overset{l'Hosp.}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{|a|^x \ln |a|}{\frac{4}{5}(x)^{-\frac{1}{5}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{5 \ln |a|}{4} \cdot |a|^x \sqrt[5]{x} = \infty$$

Dle Heineho věty je i $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a|^n}{\sqrt[5]{n^4}} = \infty$. To znamená, že členy řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} a^n}{\sqrt[5]{n^4}} \right|$ nesplňují nutnou podmínku konvergence. Z toho důvodu nemůže být splněna ani pro členy řady bez absolutních hodnot, neboť $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Proto řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}a^n}{\sqrt[5]{n^4}}$ diverguje pro $|a| > 1$.

Zbývá ještě vyšetřit případ $a = \pm 1$.

Pro $a = 1$ dostáváme řadu ve taru: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[5]{n^4}}$, což je řada se střídavými znaménky, proto zkusíme použít Leibnizovo kritérium. Posloupnost $\left\{\frac{1}{\sqrt[5]{n^4}}\right\}_{n=1}^{\infty}$ je (jak lze snadno ukázat) klesající. Dále $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{n^4}} = 0$, takže podmínky Leibnizova kritéria jsou splněny a řada je neabsolutně konvergentní.

Pro $a = -1$ dostáváme řadu: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(-1)^n}{\sqrt[5]{n^4}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n+1}}{\sqrt[5]{n^4}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{\sqrt[5]{n^4}}$.
Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{n^4}}$ je řadou s kladnými členy. Protože se od námi vyšetřované řady liší pouze znaménkem, stačí vyšetřit její konvergenci a výsledek půjde vztáhnout na řadu původní, protože konstantní násobek konvergenci řady nezmění (viz věta 2.3 b)).
Řadu přepíšeme takto: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{n^4}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{4}{5}}}$. Integrálním kritériem nebo užitím věty 3.3 dokážeme, že tato řada diverguje, protože $\frac{4}{5} < 1$.

Nyní výsledky shrňme:
Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}a^n}{\sqrt[5]{n^4}}$ **absolutně konverguje** pro $a \in (-1; 1)$, **neabsolutně konverguje** pro $a = 1$ a **diverguje** pro $a \in (-\infty; -1\rangle \cup (1; \infty)$.

Příklad 10: Vyšetřete konvergenci a divergenci řady:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{b^n \sqrt[3]{n^5}},$$

v závislosti na parametru $b \in R$.

Nejprve uvažme případ, kdy $b = 0$. V tomto případě totiž nemají členy řady smysl a tudíž není co vyšetřovat.
Pro $b \neq 0$, analogicky jako v předchozím příkladě, nejprve vyšetříme absolutní konvergenci dané řady.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{b^n \sqrt[3]{n^5}} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|(-1)|^n}{|b|^n \sqrt[3]{n^5}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|b|^n \sqrt[3]{n^5}}$$

Přidáním absolutních hodnot jsme dostali opět řadu s kladnými členy. Aplikujme limitní odmocninové kritérium.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{|b|^n \sqrt[3]{n^5}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{|b| \left(\sqrt[n]{n}\right)^{\frac{5}{3}}} = \frac{1}{|b| \cdot 1} = \frac{1}{|b|}$$

Dle tvrzení limitního odmocninového kritéria, bude řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|b|^n \sqrt[3]{n^5}}$ konvergovat, pokud $\frac{1}{|b|} < 1$, to znamená pokud $|b| > 1$. Je-li $|b| < 1$, pak $\frac{1}{|b|} > 1$ a řada diverguje, pro případ $|b| = 1$ nelze rozhodnout.

Zjistili jsme, že pro $b \in (-\infty; 1) \cup (1; \infty)$ původní řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{b^n \sqrt[3]{n^5}}$ konverguje absolutně, pro $b \in (-1; 1)$ nekonverguje absolutně a pro $b = \pm 1$ nelze rozhodnout pomocí použitého kritéria.

Probereme případ $|b| < 1$

Označíme-li $B = \frac{1}{b}$, pak $|B| > 1$ a my můžeme vyšetřovanou řadu přepsat do tvaru:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{b^n \sqrt[3]{n^5}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n B^n}{\sqrt[3]{n^5}}.$$

Ukážeme, že řady pro $|B| > 1$ nesplňují nutnou podmínku konvergence podobným způsobem, jako v předchozím příkladě.
Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{b^n \sqrt[3]{n^5}}$ bude tedy divergentní pro $b \in (-1; 1)$.

Zbývá jen rozhodnout, zda je řada konvergentní nebo divergentní pro $b = \pm 1$.

Je-li $b = 1$ dostáváme řadu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^5}}$. To je řada se střídavými znaménky, pokusíme se použít Leibnizovo kritérium. Snadno nahlédneme, že posloupnost $\left\{\frac{1}{\sqrt[3]{n^5}}\right\}_{n=1}^{\infty}$ je klesající a $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^5}} = 0$, takže podmínky Leibnizova kritéria jsou splněny a řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^5}}$ neabsolutně konverguje.

Je-li $b = -1$ dostaneme řadu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(-1)^n \sqrt[3]{n^5}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^5}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{5}{3}}}$.
Jde o řadu s kladnými členy a protože $\frac{5}{3} > 1$ bude tato řada konvergentní, což dokážeme integrálním kritériem nebo užitím věty 3.3. Řada

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{b^n \sqrt[3]{n^5}}$ tedy konverguje jak pro $b = 1$, tak pro $b = -1$. Pokud položíme v obecném předpisu řady $b = \pm 1$ a přidáme-li absolutní hodonotu k jejím členům dostaneme:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{(\pm 1)^n \sqrt[3]{n^5}} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|(-1)|^n}{|(\pm 1)|^n \sqrt[3]{n^5}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^5}},$$

což je totéž, jako kdybychom dosadili $b = -1$ bez absolutní hodnoty. Protože je výsledná řada konvergentní, neznamená to nic jiného, než že je řada *absolutně* konvergentní v bodech $b = \pm 1$, což jsme nemohli rozhodnout při vyšetřování absolutní konvergence limitním odmocninovým kritériem, ale až nyní, kdy jsme tyto hraniční body vyšetřili zvlášť.
Závěr: Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{b^n \sqrt[3]{n^5}}$ **absolutně konverguje** pro $b \in (-\infty; 1\rangle \cup \langle 1; \infty)$ a **diverguje** pro $b \in (-1; 1)$.

4.3 Přerovnávání řad

V tomto odstavci se budeme zabývat otázkou, jaký vliv bude mít na součet řady, pokud její členy sečteme v "jiném pořadí", než v řadě původní. Budeme tedy zkoumat, zda platí pro nekonečné řady komutativní zákon. Ukážeme, že takový zákon obecně pro nekonečné řady neplatí, ale že postačující podmínkou k tomu, aby i přerovnaná řada měla stejný součet jako původní, je absolutní konvergence příslušné řady.

Příklad 11: Uvažme řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}.$$

Tato řada je neabsolutně konvergentní, což jsme dokázali pomocí Leibnizova kritéria (viz příklad 4.) a lze ukázat, že součet této řady je roven $\ln 2$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots = \ln 2$$

Přerovnejme řadu následujícím způsobem:

$$1-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{6}-\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{10}-\tfrac{1}{12}+\ldots+\tfrac{1}{2n-1}-\tfrac{1}{2(2n-1)}-\tfrac{1}{2(2n-1)+2}=$$

$$1-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{6}-\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{10}-\tfrac{1}{12}+\ldots+\left(\tfrac{1}{2n-1}-\tfrac{1}{4n-2}-\tfrac{1}{4n}\right).$$

Utvoříme vybranou posloupnost částečných součtů

$$s_{3n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$

Částečné součty s_{3n} přerovnané řady jsou rovny $\frac{1}{2}s_{2n}$, kde s_{2n} je vybraná posloupnost částečných součtů původní řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$. Původní řada má ale součet $\ln 2$ a dle věty o limitě vybrané posloupnosti je i limita částečných součtů s_{2n} rovna $\ln 2$, takže částečné součty s_{3n} přerovnané řady konvergují k $\frac{1}{2}\ln 2$.

Vidíme, že obecně neplatí pro nekonečné řady komutativní zákon.

Abychom mohli o přerovnávání řad vyslovit některá obecná tvrzení, je nutné pojem přerovnané řady korektně zavést. To bude obsahem následující definice.

Definice 4.2:

Mějme dánu nekonečnou řadu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ a vzájemně jednoznačné zobrazení $\pi:(N-\{0\})\to(N-\{0\})$ (neboli permutaci na $N-\{0\}$), které každému $n\in N-\{0\}$ přiřazuje $k_n\in N-\{0\}$ (symbolicky: $\pi:n\leftrightarrow k_n$).

Potom řadu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{k_n}$ nazýváme *přerovnanou řadou* k řadě $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$. (Nebo říkáme, že $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{k_n}$ vznikla *přerovnáním* řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$.)

Pomocí členů dané řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ lze definovat dvě dílčí řady s nezápornými členy. První bude řada je utvořena tak, že ponecháme nezáporné členy původní řady a záporné nahradíme nulou. Druhou řadu vytvoříme tak, že záporné členy původní řady nahradíme jejich absolutní hodnotou a nezáporné nahradíme nulou. Důsledně je nyní zavedeme a označíme, protože budou hrát důležitou roli v dalším výkladu.

Označení

Nechť $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s obecnými členy. Potom označíme:

- $p_n = \frac{a_n+|a_n|}{2}$
- $q_n = \frac{|a_n|-a_n}{2}$.

Vidíme, že $p_n = a_n$, pokud $a_n \geq 0$ a $p_n = 0$, pokud $a_n < 0$. Dále $q_n = -a_n = |a_n|$, je-li $a_n \leq 0$ a $q_n = 0$, je-li $a_n > 0$.

Vytvoříme řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q_n$. Obě řady jsou řady s nezápornými členy a platí:
$|a_n| = p_n + q_n$
$a_n = p_n - q_n$

Věta 4.5:

Nechť řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje a má součet s. Pak:

1. Konverguje-li řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutně, potom konverguje řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ (její součet ozn. p) i řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q_n$ (součet ozn. q) a platí: $s = p - q$.

2. Konverguje-li $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ neabsolutně, potom obě řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ i $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q_n$ divergují.

Důkaz:

1. Pro $\forall n \in N - \{0\}$ platí: $p_n \leq |a_n|$. Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně, to znamená, že konverguje řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Proto dle srovnávacího kritéria konverguje i řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n$. Konvergence řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q_n$ se ukáže stejně, takže stačí dokázat, rovnost $s = p - q$.

   Pro libovolný člen původní řady platí: $a_n = p_n - q_n$. Označme n-té částečné součty řad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q_n$ takto:
   $\sum\limits_{k=1}^{n} p_k = \sigma_n$

$\sum\limits_{k=1}^{n} q_k = \tau_n$.

Utvoříme n-tý částečný součet řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} (p_k - q_k) = \sum_{k=1}^{n} p_k - \sum_{k=1}^{n} q_k = \sigma_n - \tau_n$$

Všechny tři řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q_n$ jsou konvergentní, takže existují limity částečných součtů. Dostáváme:

$$s_n = \sigma_n - \tau_n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sigma_n - \lim_{n\to\infty} \tau_n \Rightarrow s = p - q.$$

Tím je první část věty dokázána.

2. Pro spor předpokládejme, že řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ za daných předpokladů konverguje. Protože $a_n = p_n - q_n$ pro všechna $n \in N - \{0\}$ dostáváme rovnost $q_n = p_n - a_n$. Řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ konvergují, proto konverguje i řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q_n$ dle věty 2.3 a). To však znamená, že konverguje i řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$, neboť $|a_n| = q_n + p_n$ a obě řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ i $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q_n$ konvergují. To ovšem neznamená nic jiného, než že řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutně konverguje, což je spor s předpokladem tvrzení. Řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ musí proto divergovat. Zcela analogicky by se ukázala i divergence řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q_n$, takže důkaz tvrzení můžeme považovat za ukončený.

Věta 4.6:(O přerovnání absolutně konvergentní řady)

Nechť řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutně konverguje a má součet s. Pak každá řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{k_n}$, vzniklá přerovnáním řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje také absolutně a má týž součet s jako $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Důkaz:

Buď tedy

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = s$$

daná nekonečná absolutně konvergentní řada a

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n} = a_{k_1} + a_{k_2} + \ldots + a_{k_n} + \ldots$$

řada vzniklá přerovnáním členů původní řady. Dokážeme nejprve, že přerovnaná řada je absolutně konvergentní.

Protože řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutně konverguje, tak pro $(\forall \epsilon > 0)$ $(\exists n_0 \in N - \{0\})$ tak, že pro $\forall n > n_0$ bude zbytek řady s kladnými členy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ po n-tém členu menší než $\frac{\epsilon}{2}$.

$$|a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \ldots + |a_{n+m}| + \ldots < \frac{\epsilon}{2}$$

Potom bude ale tím spíše zbytek řady bez absolutních hodnot

$$|R_n| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Označme nyní s_m m-tý částečný součet přerovnané řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{k_n}$:

$$s_m = a_{k_1} + a_{k_2} + \ldots + a_{k_m}$$

Číslo m můžeme vzít tak velké, aby mezi členy částečného součtu s_m leželo všech prvních n členů původní řady $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$: Člen a_1 původní řady je při přerovnání na jiném místě. Vezmeme proto tolik členů přerovnané řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{k_n}$, aby v daném součtu byl obsažen člen a_1 původní řady. Pak budeme přibírat další členy přerovnané řady do té chvíle, kdy všechny členy $a_1, a_2, \ldots, a_n$ původní řady budou obsaženy v součtu s_m.
Potom úsek $|a_{k_{m+1}}| + |a_{k_{m+2}}| + \ldots + |a_{k_s}|$ kde s je libovolné přirozené číslo větší než m, je složen z absolutních hodnot členů původní řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, jejichž indexy jsou větší než n_0. Každý takový součet je menší než $\frac{\epsilon}{2}$. Tedy (dle Bolzano-Cauchyova kritéria) řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_{k_n}|$ konverguje, to jest: řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{k_n}$ konverguje absolutně.

Nyní dokažme, že součet přerovnané řady je roven součtu původní řady. Pro m-tý částečný součet přerovnané řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{k_n}$ ponechme označení s_m a n-tý částečný součet původní řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ označme t_n. Pro zbytek původní řady po n-tém členu zavedeme označení R_n jako v předchozí části důkazu. Odhadněme rozdíl mezi částečným součtem s_m a součtem původní řady s.

$$|s_m - s| = |s_m - (t_n + R_n)| \leq |s_m - t_n| + |R_n| \leq (|a_{\alpha_1}| + |a_{\alpha_2}| + \ldots + |a_{\alpha_s}|) + |R_n|$$

Ve sčítanci v závorce jsou absolutní hodnoty členů, které jsou v částečném součtu s_m, ale nejsou v částečném součtu t_n, proto jsou indexy $\alpha_i, i \in \{1, 2, \ldots, s\}$ větší než n. Ovšem takový součet je menší než $\frac{\epsilon}{2}$. Druhý sčítanec $|R_n|$ je též menší než $\frac{\epsilon}{2}$, takže pro $\epsilon > 0$

$$|s_m - s| \leq (|a_{\alpha_1}| + |a_{\alpha_2}| + \ldots + |a_{\alpha_s}|) + |R_n| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Odtud plyne, že

$$\lim_{m \to \infty} s_m = \sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n} = s$$

a my jsme dokázali, že přerovnaná řada konverguje k témuž součtu s, jako řada původní, což ukončuje celý důkaz.

Právě uvedená tvrzení mají obrovský význam. Pokud totiž dokážeme, že daná nekonečná řada je absolutně konvergentní, nebude součet vůbec záviset na tom, v jakém pořadí její členy sečteme. Absolutně konvergentní řadu můžeme sčítat při jakémkoliv přerovnání jejích členů. Pro absolutně konvergentní řady platí také *asociativní zákon*. To znamená, že členy absolutně konvergentní řady lze libovolně uzávorkovat a ve všech případech dojdeme k témuž součtu. To nám umožní sečíst některé řady, které nešlo sečíst pouze pomocí vztahu pro součet geometrické řady nebo výpočtem limity částečných součtů.

Příklad 12: Nalezněte součet řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{3} \right)^n \cdot \sin \left(\frac{2n\pi}{3} \right) \right].$$

Protože je pro všechna $n \in N - \{0\}$

$$\left| \left(\frac{1}{3} \right)^n \cdot \sin \left(\frac{2n\pi}{3} \right) \right| \leq \left(\frac{1}{3} \right)^n,$$

je řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{3} \right)^n \cdot \sin \left(\frac{2n\pi}{3} \right) \right]$ absolutně konvergentní dle srovnávacího kritéria, neboť $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3} \right)^n$ je konvergentní geometrická řada. Můžeme tedy členy řady libovolně přerovnat či seskupit, a najít tak její součet.

Pro lepší představu si nejprve rozepišme několik prvních členů:
$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{3}\right)^n \sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right)\right] = \left(\frac{1}{3}\right)^1 \sin\frac{2\pi}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 \sin\frac{4\pi}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^3 \sin\frac{6\pi}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^4 \sin\frac{8\pi}{3} +$
$+ \left(\frac{1}{3}\right)^5 \sin\frac{10\pi}{3} + \ldots$.
Funkce $\sin x$ je 2π-periodická, takže $\sin\frac{2\pi}{3} = \sin\frac{8\pi}{3}$, obdobně $\sin\frac{4\pi}{3} = \sin\frac{10\pi}{3}$.
Pro hodnoty funkce sinus platí: $\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ a $\sin\frac{6\pi}{3} = \sin 2\pi = 0$.
Obecně můžeme napsat:
$\sin\frac{2n\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ pro $n = 3k+1, k = 0, 1, 2, \ldots$
$\sin\frac{2n\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ pro $n = 3k+2, k = 0, 1, 2, \ldots$
$\sin\frac{2n\pi}{3} = 0$ pro $n = 3k, k = 1, 2, \ldots$ (zde jde k až od 1, protože původní řadu nesčítáme od nuly)

Původní řadu tedy můžeme rozepsat na tři geometrické řady, které budeme umět sečíst, následujícím způsobem:
$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{3}\right)^n \sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right)\right] = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{3k+1}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right] + \sum\limits_{k=0}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{3k+2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right] + \sum\limits_{k=1}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{3k}\cdot 0\right]$.
Třetí člen je suma samých nul a můžeme jej vynechat. Zbývá tedy určit součet řad $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{3k+1}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right] + \sum\limits_{k=0}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{3k+2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]$.

$\sum\limits_{k=0}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{3k+1}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right] = \frac{\sqrt{3}}{2}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{3k+1} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{3k} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{3}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{3k} =$
$\frac{\sqrt{3}}{6}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{27}\right)^k = \frac{\sqrt{3}}{6}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{27}} = \frac{\sqrt{3}}{6}\cdot\frac{27}{26} = \frac{9\sqrt{3}}{52}$.

$\sum\limits_{k=0}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{3k+2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right] = -\frac{\sqrt{3}}{2}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{3k+2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{3^2}\left(\frac{1}{3}\right)^{3k} =$
$= -\frac{\sqrt{3}}{2}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{9}\left(\frac{1}{3}\right)^{3k} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{9}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{3k} = -\frac{\sqrt{3}}{18}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{27}\right)^k =$
$-\frac{\sqrt{3}}{18}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{27}} = -\frac{\sqrt{3}}{18}\cdot\frac{27}{26} = -\frac{3\sqrt{3}}{52}$.

Nyní již stačí jen oba výsledky sečíst a dostaneme součet původní řady:
$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{3}\right)^n\cdot\sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right)\right] = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{3k+1}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right] + \sum\limits_{k=0}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{3k+2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right] =$
$\frac{9\sqrt{3}}{52} - \frac{3\sqrt{3}}{52} = \frac{6\sqrt{3}}{52} = \frac{3\sqrt{3}}{26}$.

Příklad 13: Nalezněte součet řady:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \dots.$$

Tato řada bude absolutně konvergentní, protože řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ je konvergentní geometrická řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$ s prvním členem 1 a kvocientem $\frac{1}{2}$. Abychom našli součet, nejprve upravíme záporné členy řady:

$$1+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\frac{1}{32}+\dots = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-2\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}-2\cdot\frac{1}{32}+\dots$$

Nyní řadu rozdělíme na dvě řady dílčí. První bude řada kladných členů (označme ji $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n$), druhá bude řada záporných členů (tu označíme $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q_n$). Dostaneme:

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} q_n = -2 \cdot \frac{1}{4} - 2 \cdot \frac{1}{32} - 2 \cdot \frac{1}{256} - \dots$$

Řada kladných členů $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ je geometrická řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$, proto s nalezením jejího součtu nebude problém. Řadu záporných členů $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q_n$ ještě upravíme:

$$-2 \cdot \frac{1}{4} - 2 \cdot \frac{1}{32} - 2 \cdot \frac{1}{256} - \dots = -2 \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{32} + \frac{1}{256} + \dots\right) =$$

$$= -\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{16} + \frac{1}{128} + \dots\right) = -\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^6} + \dots\right) = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{3n}}.$$

Dostáváme opět geometrickou řadu, tentokrát s prvním členem 1 a kvocientem $\frac{1}{2^3}$. Nyní obě řady sečteme.

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} q_n = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{3n}} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2^3}} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{8}{7} = -\frac{4}{7}$$

Součet původní řady nyní nalezneme jako součet těchto dvou dílčích řad.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} p_n + \sum_{n=1}^{\infty} q_n = 2 - \frac{4}{7} = \frac{10}{7}$$

Je na místě znovu zdůraznit, že takovéto rozdělování a přerovnávání členů řady pro výpočet jejich součtu lze provádět pouze v případě, že je tato řada absolutně konvergentní, protože potom se přerovnáním výsledný součet nezmění. Pokud řada konverguje neabsolutně, můžeme jejím přerovnáním součet změnit. Jak jsme ukázali v příkladě 11, řadu se střídavými znaménky $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ jsme přerovnali tak, že součet přerovnané řady byl poloviční v porovnání s původní řadou. Nabízí se otázka, kolik různých součtů můžeme přerovnáním neabsolutně konvergentní řady získat, zda je tento počet omezen, atd. Odpověď přináší následující věta.

Věta 4.7:(Riemannova)

Nechť řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje neabsolutně. Potom tuto řadu lze přerovnat tak, aby:

1. konvergovala k libovolnému $A \in R$
2. divergovala k $\pm\infty$
3. oscilovala.

Důkaz:

Buď nejprve A libovolné reálné číslo. Utvořme (analogicky jako ve větě 4.5) z členů dané neabsolutně konvergentní řady dvě divergentní řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q_n$, kde $p_n = \frac{a_n+|a_n|}{2}$ a $q_n = \frac{|a_n|-a_n}{2}$. Ty divergují dle věty 4.5.

Buď pro určitost $A > 0$. Vezměme z řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ nejmenší počet prvních členů, aby jejich součet převýšil číslo A. To je určitě možné vzhledem k divergenci řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ k $+\infty$. K získanému součtu těchto členů budeme postupně přibírat (odčítat) členy řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q_n$ počínaje prvním tak, že vezmeme nejmenší počet těchto členů, abychom dostali součet menší než A. To je opět možné díky divergenci řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q_n$. K získanému součtu budeme popořadě přibírat členy řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n$, dokud opět nedostaneme součet větší než A. Postupujeme-li takto bez omezení, dostaneme řadu sestavenou z členů řad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q_n$, tedy ze členů původní řady. Sestrojená řada konverguje a má součet A. Je-li totiž částečný součet větší než A, nepřevyšuje rozdíl mezi tímto součtem a číslem A poslední kladný člen vzatý z řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n$. Je-li obdobně částečný součet menší než A, nepřevyšuje rozdíl mezi tímto součtem a A absolutní hodnotu posledního členu vzatého z řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q_n$. Protože však řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje je dle nutné podmínky konvergence $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} p_n = \lim\limits_{n\to\infty} q_n = 0$, takže sestrojená řada konverguje k číslu A. Obdobně se vyřeší případ, kdy $A \leq 0$.

Nechť jsou dána dvě různá reálná čísla $A < B$. Analogicky, postupným vyčerpáváním řad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q_n$ je možné dostat součty větší než B a menší než A, takže sestrojená řada bude oscilovat.

Buď $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ libovolná rostoucí posloupnost reálných čísel, která diverguje k $+\infty$. Vezmeme z řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ pořadě tolik členů, aby jejich součet převyšoval číslo A_1. Potom přidáme první člen řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q_n$. Dále vezmeme ze zbývajících členů řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ tolik členů, abychom jako součet dostali číslo, které bude větší než A_2 a následně vezmeme druhý člen řady záporných členů $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q_n$. Postupujeme-li takto bez omezení, dostaneme řadu, která diverguje k $+\infty$. Je zřejmé, že zcela analogicky bychom sestavili řadu divergující k $-\infty$, takže rozbor možných případů je uzavřen.

Úkoly a cvičení:

1. Vyšetřete absolutní nebo neabsolutní konvergenci následujících řad:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(3n-2)\cdot 3^{2n}}$ [konverguje absolutně]

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{(n+1)(n+2)}$ [konverguje absolutně]

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ [konverguje neabsolutně]

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n-1)}{3n}$ [diverguje]

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\cdot n^5}{2e^n}$ [konverguje absolutně]

f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n)!}{(n!)^2}$ [diverguje]

g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln(n+1)}{n+1}$ [konverguje neabsolutně]

h) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{3k+7}{5k-1}\right)^k$ [konverguje absolutně]

i) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k \sin\left(\frac{1}{\sqrt[3]{k^4}}\right) \cos k$ [konverguje absolutně]

j) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n+3)}{2^{n-1}}$ [konverguje absolutně]

k) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\cdot a^{2n}}, a > 0$ [konverguje absolutně pro $a > 1$, neabsolutně pro $a = 1$, diverguje pro $a < 1$]

l) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\cdot c^n}{n\cdot \sqrt[4]{4n^3}}, c \in R$ [konverguje absolutně pro $c \in \langle -1; 1\rangle$, jinak diverguje]

m) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\cdot b^n}{3^n\cdot \sqrt[3]{n^2}}$ [konverguje absolutně pro $b \in \langle -3; 3\rangle$, neabsolutně pro $b = 3$, jinak diverguje]

2. Sečtěte řady:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right)}{2^n}$ $[-\frac{2}{7}]$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{3}{5^{n+1}}\right) + \frac{(-1)^n}{n^4}\right] + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^{n+1}}{n^4} - \left(\frac{4}{5^{n+2}}\right)\right]$ $[\frac{11}{100}]$

5. Součin řad

V kapitole 2 jsme zavedli pojem součtu nekonečných řad a násobku řady reálnou konstantou. Ukázali jsme, že pokud jednotlivé řady konvergují, konverguje i jejich součet a konstantní násobek (t. j. jejich lineární kombinace). Nyní přistoupíme k zavedení pojmu součinu řad, ukážeme, za jakých podmínek je tento součin konvergentní a jak zjistit jeho hodnotu.

Definice 5.1:
Nechť $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou nekonečné číselné řady. Řadu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$, kde $c_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_{n-k+1}$ nazveme *součinem řad* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$. (nebo též *součinovou řadou* pro řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$) [9]

Zavedení součinu tímto předpisem je přirozené. Pokud bychom násobili konečné součty $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ a $\sum\limits_{j=1}^{m} b_j$ dostaneme:

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) \cdot (b_1 + b_2 + \ldots + b_m) =$$

$$= a_1b_1 + a_1b_2 + \ldots + a_1b_m + a_2b_1 + \ldots + a_2b_m + \ldots + a_nb_1 + \ldots + a_nb_m.$$

Pro součin nekonečných řad dostáváme:

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_1b_1 & + & a_1b_2 & + & \ldots & + & a_1b_n & + & \ldots \\
a_2b_1 & + & a_2b_2 & + & \ldots & + & a_2b_n & + & \ldots \\
\vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \ldots \\
a_nb_1 & + & a_nb_2 & + & \ldots & + & a_nb_n & + & \ldots \\
\vdots & & \vdots & & \ldots & & \vdots & & \ldots
\end{array}$$

[9] Pokud meze sčítacího indexu začínají v nule, je součinová řada tvaru $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right)$

Tedy součin nekonečných řad znázorňujeme "nekonečnou maticí". Pro členy součinové řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ platí dle definice:

$c_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_{n-k+1}$.

Rozepišme si pro ukázku několik prvních členů:

$c_1 = a_1 b_1$
$c_2 = a_1 b_2 + a_2 b_1$
$c_3 = a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1$
$\vdots$
$c_n = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \ldots + a_n b_1$

Podíváme- li se na schéma v matici, sčítáme členy po vedlejších úhlopříčkách. Definice součinu je takto nejvýhodnější. Následující věta se zabývá otázkou konvergence a hodnoty součtu součinové řady.

Věta 5.1:

Nechť řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ absolutně konvergují. Označme $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = A$ a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = B$ jejich součty. Pak součinová řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_{n-k+1} \right)$ také absolutně konverguje a její součet je roven $A \cdot B$.

Důkaz:

Označme pro přehlednost $c_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_{n-k+1}$ tak, jako v definici 5.1. Budeme nyní zkoumat částečné součty řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |c_n|$ (označme je σ_n)

$$\sigma_n = |c_1| + |c_2| + \ldots + |c_n|$$

Největší z indexů i členů a_i, které se vyskytují v součtech $c_1, \ldots, c_n$ je n. Stejně tak je n největší z indexů j členů b_j, které se vyskytují v součtech $c_1, \ldots, c_n$.

Potom platí:

$$\sigma_n = |c_1|+|c_2|+\ldots+|c_n| \leq (|a_1|+\ldots+|a_n|)\cdot(|b_1|+\ldots+|b_n|) = \sum_{k=1}^{n} |a_k| \cdot \sum_{j=1}^{n} |b_j|$$

Protože řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ absolutně konvergují dle předpokladu věty, jsou částečné součty $\sum\limits_{k=1}^{n} |a_k|$ a $\sum\limits_{j=1}^{n} |b_j|$ omezené. Existují tedy kladné konstanty

K a L tak, že $\sum\limits_{k=1}^{n} |a_k| < K$ a $\sum\limits_{j=1}^{n} |b_j| < L$. Z toho plyne, že $\sigma_n < K \cdot L$ a částečné součty σ_n jsou proto omezené. Z omezenosti součtů σ_n již plyne, že řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |c_n|$ konverguje, takže řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_{n-k+1} \right)$ konverguje absolutně.

Aby byl důkaz úplný, ukážeme ještě, že součinová řada má součet $A \cdot B$. Při násobení n-tých částečných součtů řad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ po členech dostaneme n^2 součinů tvaru $a_i b_j$. V nekonečné matici, ve kterou jsme rozepsali součin nekonečných řad, by šlo o čtvercovou submatici, jejíž prvky $m_{ij} = a_i b_j,\ i, j = 1, 2, \ldots, n$. Z těchto prvků sestavíme řadu $\sum\limits_{k=1}^{\infty} d_k$ takto: Ke členu $a_1 b_1$ (matice 1×1) připojíme zbývající členy druhé čtvercové matice, pak připojíme zbývající členy třetí čtvercové matice, atd.

$$\sum_{k=1}^{\infty} d_k = a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_2 + a_2b_1 + a_1b_3 + a_2b_3 + a_3b_3 + a_3b_2 + a_3b_1 + \ldots$$

Vyšetřeme nyní konvergenci této řady. Označíme-li n-tý částečný součet $\sum\limits_{k=1}^{n} b_k = t_n$ a $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k = s_n$, potom součet prvních n^2 členů vyšetřované řady bude roven $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k \cdot \sum\limits_{k=1}^{n} b_k = s_n \cdot t_n$. Posloupnost těchto součinů představuje vybranou posloupnost částečných součtů σ_{n^2} vyšetřované řady. Protože řady $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ absolutně konvergují, jsou omezené částečné součty $\sum\limits_{k=1}^{n} |a_k|$ a $\sum\limits_{k=1}^{n} |b_k|$, takže je omezený i jejich součin. Označme n-tý částečný součet řady $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |d_k| = \sigma_n^*$. Pak zřejmě platí:

$$\sigma_n^* \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k| \cdot \sum_{k=1}^{n} |b_k|.$$

Protože částečné součty na pravé straně jsou omezené, jsou omezené i součty σ_n^* a řada $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |d_k|$ je proto konvergentní. Z toho plyne, že vyšetřovaná řada $\sum\limits_{k=1}^{\infty} d_k$ bude absolutně konvergentní a její součet najdeme jako $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_{n^2}$.

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_{n^2} = \lim_{n\to\infty} (s_n \cdot t_n) = \lim_{n\to\infty} s_n \cdot \lim_{n\to\infty} t_n = A \cdot B.$$

Protože je řada $\sum\limits_{k=1}^{\infty} d_k$ absolutně konvergentní, můžeme její členy libovolně přerovnat a uzávorkovat, aniž by se změnil její součet. Přerovnání a uzávorkování provedeme takto:

$$a_1b_1 + (a_1b_2 + a_2b_1) + (a_1b_3 + a_2b_2 + a_3b_1) + \ldots.$$

To je již dle definice součinová řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_{n-k+1}\right)$ a má stejný součet jako řada $\sum\limits_{k=1}^{\infty} d_k$, tedy $A \cdot B$. Tím je důkaz ukončen.

Podstatnou podmínkou pro to, aby součinová řada konvergovala je absolutní konvergence násobených řad. Pro neabsolutně konvergentní řady věta neplatí. Demonstrujeme to na dvou příkladech.

Příklad 1: Uvažujme řadu:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}.$$

Tato řada je dle Leibnizova kritéria neabsolutně konvergentní. Vynásobme ji se sebou samotnou. Dostaneme:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}} \cdot \frac{(-1)^{(n-k+1)-1}}{\sqrt{n-k+1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{k}\cdot\sqrt{n-k+1}} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}\cdot\sqrt{n-k+1}} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k\cdot(n-k+1)}}.$$

Označíme-li n-tý člen součinové řady c_n pak $c_n = (-1)^{n-1}\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k\cdot(n-k+1)}}$.
Pro tyto členy platí:

$$|c_n| = \frac{1}{\sqrt{1\cdot n}} + \frac{1}{\sqrt{2\cdot(n-1)}} + \frac{1}{\sqrt{3\cdot(n-2)}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n\cdot 1}} \geq$$

$$\geq \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n\cdot n}} + \frac{1}{\sqrt{n\cdot n}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n\cdot n}}}_{n\times} = \frac{n}{n} = 1$$

Protože $|c_n| \geq 1$ nebude splněna nutná podmínka konvergence, protože limita $\lim\limits_{n\to\infty} c_n \neq 0$. Z toho plyne že součinová řada není konvergentní.

Příklad 2: Vynásobme samu se sebou řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n+1)}.$$

Řada je neabsolutně konvergentní dle Leibnizova kritéria. Dle definice součinu dostaneme:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{\ln(k+1)} \cdot \frac{(-1)^{n-k+1}}{\ln((n-k+1)+1)} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\ln(k+1) \cdot \ln(n-k+2)}.$$

Pro n-tý člen c_n součinové řady platí : $c_n = (-1)^{n+1} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\ln(k+1) \cdot \ln(n-k+2)}$.

Pro vyšetření konvergence řady si tento člen rozepišme a odhadněme:

$$|c_n| = \frac{1}{\ln 2 \cdot \ln(n+1)} + \frac{1}{\ln 3 \cdot \ln n} + \frac{1}{\ln 4 \cdot \ln(n-1)} + \ldots + \frac{1}{\ln(n+1) \cdot \ln 2} \geq$$

$$\geq \underbrace{\frac{1}{\ln(n+1) \cdot \ln(n+1)} + \ldots + \frac{1}{\ln(n+1) \cdot \ln(n+1)}}_{n\times} = \frac{n}{\ln^2(n+1)}$$

Vypočteme limitu n-tého členu.

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\ln^2(n+1)}$$

Nejprve najdeme limitu $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{\ln^2(x+1)}$ reálné funkce reálné proměnné x která bude dle Heineho věty rovna hledané limitě. K výpočtu užijeme l'Hospitalova pravidla (předpoklady pro jeho použití si čtenář ověří):

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\ln^2(x+1)} \overset{l'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2\ln(x+1) \cdot \frac{1}{x+1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{2\ln(x+1)} \overset{l'H}{=}$$

$$\overset{l'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{x+1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{2} = +\infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\ln^2(n+1)} = +\infty.$$

V tomto případě dokonce sama posloupnost členů řady diverguje k $+\infty$, takže součinová řada nemůže být konvergentní.

V případě, že násobené řady konvergují absolutně, již bude součinová řada konvergentní a to také absolutně. Součin řad je pak užitečnou operací a to především při práci s funkčními řadami, jejichž výklad překračuje rámec této práce. Ukažme si některé příklady, jak součin řad najít a k jakým závěrům se lze dopracovat.

Příklad 3: Určete součin řad:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-a)^n}{n!}, \quad a \in R.$$

Užijeme-li limitního D'Alembertova podílového kritéria, snadno ukážeme, že obě řady jsou absolutně konvergentní pro libovolné reálné číslo a. Součin bude proto také absolutně konvergentní řada. Druhou z řad můžeme přepsat takto: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-a)^n}{n!} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n a^n}{n!}$. Rozepíšeme součinovou řadu dle definice. Dostaneme:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!} \cdot \frac{(-1)^{n-k} a^{n-k}}{(n-k)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k} a^n}{k!(n-k)!}.$$

Nyní rozšíříme zlomek výrazem $n!$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k} a^n}{k!(n-k)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k} a^n}{k!(n-k)!} \frac{n!}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k} n!}{k!(n-k)!}.$$

Rozšíření jsme provedli proto, že výrazy $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ představují kombinační čísla, takže řadu upravíme takto:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k} n!}{k!(n-k)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k}.$$

Součet $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k}$ ještě pro názornost rozepíšeme:

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} = (-1)^n \binom{n}{0} + (-1)^{n-1} \binom{n}{1} + \ldots + (-1)^0 \binom{n}{n}.$$

Tento součet je však pro všechna $n \neq 0$ nulový, neboť jej lze brát jako binomický rozvoj $(1-1)^n$. Pouze pro $n = 0$ je součet $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} = 1$, takže součinová řada je až na člen $n = 0$ tvořena nulovými členy. Její součet je tudíž roven $\frac{a^0}{0!} \cdot 1 = 1$, takže součin řad $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$ a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-a)^n}{n!}$ je pro libovolné reálné a roven jedné.

Poznámka: Kdybychom na R zavedli funkci $f : f(a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$, tak právě nalezený výsledek lze napsat takto: $f(a) \cdot f(-a) = 1$. Tuto vlastnost má exponenciální funkce. A lze skutečně ukázat v teorii funkčních řad, že řada $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$ pro všechna reálná x. Tím výklad trochu předbíháme, nicméně využijme této skutečnosti pro další procvičení práce se součinem řad.

Příklad 4: Nalezněte součinovou řadu pro řady:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^n}{n!}, \quad a, b \in R.$$

Obě řady jsou absolutně konvergentní pro libovolná reálná čísla a, b, což snadno ukážeme užitím limitního D'Alembertova podílového kritéria. Proto i jejich součinová řada bude absolutně konvergentní. Napišme jejich součin dle definice:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!} \cdot \frac{b^{n-k}}{(n-k)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!(n-k)!} a^k b^{n-k}.$$

Obdobně jako v předchozím příkladě rozšíříme zlomek výrazem $\frac{n!}{n!}$, abychom mohli zlomky s faktoriály nasat pomocí kombinačních čísel:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{n!} \cdot \frac{1}{k!(n-k)!} a^k b^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} a^k b^{n-k} =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}}_{\text{binomická věta}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (a+b)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a+b)^n}{n!}.$$

Pokud zavedeme funkci $f : f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ pro $x \in R$, můžeme výsledek předchozího výpočtu zapsat: $f(a) \cdot f(b) = f(a+b)$. Když uvážíme, že $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$ (jak jsme uvedli v předchozí poznámce), je příklad důkazem vztahu: $e^x \cdot e^y = e^{x+y}$ pro $x, y \in R$.

Úkoly a cvičení:

1. Rozhodněte a zdůvodněte, zda konverguje (pokud ano, rozepište první tři členy) součinová řada vytvořená z řad:

   a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{3^n}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$

   b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan n}{n^3}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\cos(n^2)}{2^n}$

   Návod: Vyšetřete absolutní konvergenci obou řad a užijte definice součinu.

2. Nalezněte součet řady $\sum\limits_{k=0}^{\infty} k \cdot q^k$, $|q| < 1$. $\left[\frac{q}{(1-q)^2}\right]$

   Návod: Zkoumejte řadu $\left(\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k\right)^2$

Literatura:

1) Zmeškalová, E., Petrášková, V.: Posloupnosti, České Budějovice, Jihočeská univerzita, 1999.

2) Jarník, V.: Diferenciální počet (I), Nakladatelství Československé akademie věd, Praha 1963.

3) Grebenča, M. K., Novoselov, S.I.: Učebnice matematické analysy (II), Nakladatelství Československé akademie věd, Praha 1953.

4) Kojecká, J., Rachůnková, I.: Řešené příklady z matematické analýzy III., Univerzita Palackého v Olomouci, Olomouc 1998.

5) Děmidovič, B. P.: Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy, Fragment, Havlíčkův Brod 2003.

6) Černý, I.: Úvod do inteligentního kalkulu, Academia, Praha 2002.