Jméno:

1	2	3	4	$\sum$

Zkoušková písemka z Matematické analýzy I
13. 9. 2024

Čas: 90 minut.

- *Nezapomeňte podepsat všechny papíry, které chcete odevzdat. Nemusíte odevzdávat papíry s pomocnými výpočty.*
- *Můžete psát i na papír se zadáním. Papír se zadáním je nutno podepsat a odevzdat, i když jste na něj nic nenapsali.*
- *Není povoleno používat kalkulačky, mobily či jinou elektroniku ani přinesené písemné materiály.*
- *Své odpovědi musíte zdůvodnit.*
- *Tvrzení z přednášky můžete používat bez důkazů, pokud není uvedeno jinak, je však nutno uvést, které tvrzení používáte.*

1. Definujme funkci $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ předpisem
$$f(x) = \begin{cases} \left|\frac{1+x}{x}\right| & \text{pro } x \neq 0 \\ 0 & \text{pro } x = 0. \end{cases}$$
   (a) [3 b.] V kterých bodech $\mathbb{R}$ je tato funkce spojitá? Pokud je v nějakém bodě nespojitá, je v tomto bodě aspoň spojitá zleva nebo zprava?
   (b) [3 b.] Určete, v kterých bodech má funkce f (vlastní či nevlastní) derivaci. Pokud v nějakém bodě derivaci nemá, určete zda má aspoň (vlastní či nevlastní) jednostranné derivace.
   (c) [4 b.] Najděte všechny lokální a globální extrémy této funkce a určete, o jaký druh extrému se jedná (zda globální či jen lokální, zda minimum nebo maximum). Určete též limity f pro $x \to +\infty$ a pro $x \to -\infty$, pokud existují.

2. (a) [3 b.] Definujte, co je to *hromadný bod* posloupnosti (a_n).
   (b) [4 b.] Nechť $(a_n)_{n=1}^\infty$, $(b_n)_{n=1}^\infty$ a $(c_n)_{n=1}^\infty$ jsou tři posloupnosti, splňující pro každé $n \in \mathbb{N}$ nerovnosti $a_n \geq b_n \geq c_n$. Jestliže je reálné číslo $H \in \mathbb{R}$ hromadným bodem (a_n) i (c_n), plyne z toho, že H je i hromadným bodem b_n?
   (c) [3 b.] Najděte posloupnost, jejíž množina hromadných bodů je přesně rovna $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, a zdůvodněte, proč má vaše posloupnost požadovanou vlastnost.

3. (a) [6 b.] Zformulujte a dokažte Lagrangeovu větu o střední hodnotě. (V důkazu můžete využívat jiné věty a lemmata z přednášky, aniž byste je dokazovali.)
   (b) [4 b.] Nechť $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce na $\mathbb{R}$ a nechť $A < B$ jsou dvě reálná čísla. Označme $I = \int_A^B f(x)\,dx$. Dokažte, že existuje $C \in (A, B)$ takové, že
$$f(C) = \frac{I}{B - A}.$$
   Zdá-li se vám to těžké, dokažte aspoň toto slabší tvrzení: pokud $I = 0$, tak existuje $C \in (A, B)$ takové, že $f(C) = 0$. (Nápověda: uvažujte primitivní funkci k funkci f a použijte Lagrangeovu, resp. Rolleovu větu.)

4. (a) [3 b.] Napište, jak se definuje součet nekonečné řady $\sum_{n=1}^\infty a_n$, kde a_n je nějaká reálná posloupnost. Vysvětlete, co znamená, že řada je *konvergentní*.
   (b) [3 b.] Nechť $f\colon [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ je monotónní funkce. Zformulujte tvrzení, které poskytuje horní a dolní odhad na konečný součet $f(1) + f(2) + \cdots + f(n)$ pomocí integrálu. Nemusíte to tvrzení dokazovat.
   (c) [4 b.] Rozhodněte, zda je řada $\sum_{n=1}^\infty \frac{\sin(1/n)}{n^2}$ konvergentní, a najděte co nejlepší horní a dolní odhad na její součet, nejlépe s využitím integrálu.