

Příklad 1 (7 bodů). Kamarád pro vás vymyslel hru. On hodí dvěma mincemi a vy pak hodíte tolika šestistěnnými kostkami, kolik jemu padlo líců plus jedna (tedy jednou až třemi kostkami).

- S jakou pravděpodobností hodíte celkem více než deset?
- S jakou pravděpodobností jste házeli jednou kostkou, pokud váš výsledek je tři a méně.
- Jaká je střední hodnota vašeho výsledku?
- * Je výhodnější vsadit na sudý, nebo na lichý výsledek?

Příklad 2 (5 bodů). Dokažte Čebyševovu nerovnost. Uvažujte náhodný výběr X_1, X_2, \dots . Využijte Čebyševovu nerovnost k důkazu konvergence výběrového průměru \bar{X}_n . (Nezapomeňte na předpoklady!)

Příklad 3 (4 body). Nechť ξ_1, ξ_2, \dots jsou nezávislé stejné rozdělené náhodné veličiny s rozdělením

$$P[\xi = k] = \frac{1}{10}, \quad \text{pro } k = 0, 1, 2, \dots, 9.$$

Definujme náhodnou veličinu

$$X = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \frac{1}{10^i}.$$

Určete distribuční funkci náhodné veličiny X .

Příklad 4 (8 bodů). Pojišťovna letos uzavřela 10000 smluv o náhradě škody. Každý klient zaplatí roční pojistné a nezávisle na ostatních během roku uplatní s pravděpodobností 0,008 nárok na pojistné plnění ve výši 200 000 korun. V následujícím využijte centrální limitní větu (použijte $u_{0,95} = 1,645$, $u_{0,975} = 1,96$ a $u_{0,99} = 2,33$):

- Určete 90% intervalový odhad počtu uplatněných škod (tedy interval, který obsáhne počet škod s danou pravděpodobností).
- Jaké pojistné by měla pojišťovna žádat, aby její ztráta v daném roce s pravděpodobností 0,99 nepřesáhla 1 milion korun?
- S jakou pravděpodobností při ročním pojistném 1650 Kč pojišťovna dosáhne vyššího než loňského zisku, který činil 1,3 milionu korun? (Výsledek stačí uvést ve formě distribuční funkce normálního rozdělení.)

Příklad 5 (6 bodů). Definujte náhodnou veličinu.

- Definujte rozdělení náhodné veličiny.
- Definujte distribuční funkci náhodné veličiny. Kdy lze rozdělení náhodné veličin odvodit z distribuční funkce.
- Vysvětlete rozdíl mezi diskrétní a absolutně spojitou náhodnou veličinou.
- Definujte hustotu náhodné veličiny.
- Definujte střední hodnotu a rozptyl náhodné veličiny. Napište jejich hlavní vlastnosti. Jak spočítáme tyto charakteristiky pro diskrétní a pro absolutně spojitou náhodnou veličinu?
- * Uvažujte čtyři hody kostkou. Odvoďte rozdělení a distribuční funkci počtu padlých šestek.

Příklad 6 (6 bodů). Definujte intervalový odhad parametru. Jaká je jeho interpretace? Jaký je teoretický postup konstrukce intervalového odhadu. Vysvětlete (se zdůvodněním!) obecný postup konstrukce intervalového odhadu s pomocí limitních vět. (Začnete od náhodného výběru a jeho parametrického rozdělení.)

Poznámky: Za každý příklad lze získat určený počet bodů, celkem 36. K úspěšnému napsání písemky je zapotřebí získat alespoň 19 bodů. Tam, kde je hvězdička, lze získat dva body navíc.

Ne vždy musí být výsledek jednoduše vyjádřitelný (jedna hodnota, jednoduchá funkce). Pokuste se výsledek dostat do co nejkompaktnějšího tvaru (například nekonečná řada, určitý integrál, ...).

Oddělujte, prosím, zřetelně jednotlivé otázky a jejich podotázky. Výsledky přehledně запиšte. **Podepište všechny odevzdávané papíry a vyznačte jejich počet**