Lineární algebra II (pro fyziky)
Tenzory

Dalibor Šmíd

MFF UK

Je-li T tenzor typu (p, q), pak dosazením vektoru či kovektoru do některého argumentu získáme vektor nebo kovektor stupně $p + q - 1$. Nechť např. $g \in T^0_2(V)$ je bilineární forma a $v \in V$, pak je zobrazení

$$\begin{aligned} g(\cdot, v) :&V \to \mathbb{F} \\ &u \mapsto g(u, v) \end{aligned}$$

lineární forma a podobně $g(v, \cdot)$. Vzhledem k bázi je $g(u, v) = g_{ij} u^i v^j$, souřadnice obou lineárních forem tedy budou

$$\begin{aligned} [g(\cdot, v)]_B &= (g_{1j} v^j, \ldots, g_{nj} v^j) \\ [g(v, \cdot)]_B &= (g_{i1} v^i, \ldots, g_{in} v^i) \end{aligned}$$

Podobně z tenzoru $T := T^i_j e_i \otimes e^j \in T^1_1(V)$ dostaneme dosazením $v \in V$ vektor $T(\cdot, v) := T^i_j e_i e^j(v) = T^i_j v^j e_i$ se souřadnicemi

$$[T(\cdot, v)]^B := (T^1_j v^j, \ldots, T^n_j v^j)^T$$

Každému $T \in T^1_1(V)$ tedy lze přiřadit operátor $\mathbb{T}$ předpisem

$$\mathbb{T}v := T(\cdot, v),$$

jehož reprezentace $[\mathbb{T}]^B_B = (T^i_j)^n_{i,j=1} \equiv [T]_B$. Toto přiřazení je kanonický izomorfismus mezi $T^1_1(V)$ a $\operatorname{End} V$.

Podobně k $g \in T^0_2(V)$ je přiřazen $\flat_g :\in \operatorname{Hom}(V, V^*)$, definovaný

$$\flat_g v := g(\cdot, v)$$

Budeme předpokládat, že g je symetrická regulární bilineární forma, pak je $\flat_g$ izomorfismus, nazývá se *spuštění indexu*. Pokud (V, g) je unitární prostor, pak se předpokládá, že spuštění indexu přísluší skalárnímu součinu (*metrickému tenzoru*) g a souřadnice kovektoru $\flat_g v$ bývají označeny místo $(\flat_g v)_i = g_{ij} v^j$ pouze v_i. Ze symetrie g a interpretace v jako prvku $(V^*)^*$ pak

$$(\flat_g v)(u) = g(u, v) = g(v, u) = v(g(\cdot, u)) = (v \circ \flat_g)(u)$$

Z rovnosti $\flat_g v = v \circ \flat_g$ můžeme definovat spouštění indexů pro libovolný tenzor $T^p_q(V)$ s $p > 0$. Například pro $T \in T^3_1(V)$ je $T(\flat_g \cdot, \cdot, \flat_g \cdot, \cdot)$ tenzor typu $(1,3)$ vzniklý spuštěním prvního a třetího indexu. Jeho souřadnice jsou

$$T_a{}^b{}_{cd} := T(\flat_g e_a, e^b, \flat_g e_c, e_d) = T(g_{ai} e^i, e^b, g_{cj} e^j, e_d) = g_{ai} g_{cj} T^{ibj}{}_d$$

Píšeme $T_a{}^b{}_{cd}$ místo T^b_{acd}, abychom dokázali rozlišit, které indexy byly spuštěny a které ne.

Inverzní operace ke spuštění se nazývá *zdvižení indexu* a značí $\sharp_g$. Lze ji též definovat pomocí *duálního metrického tenzoru* $g^{-1} \in T^2_0(V)$, určeného ♣ předpisem

$$g^{-1} = g^{ij} e_i \otimes e_j, \text{ kde } g^{ij} g_{jk} = \delta^i_k$$

Je-li $\alpha \in V^*$ pak

$$\sharp_g \alpha := g^{-1}(\cdot, \alpha) = g^{ij} e_i e_j(\alpha) = g^{ij} \alpha_j e_i \in V,$$

tedy $(\sharp_g \alpha)^i = g^{ij} \alpha_j$. Podobně jako u $\flat_g$ pak $\sharp_g \alpha = \alpha \circ \sharp_g$.

Zpět k operátorům. Stopa $\mathbb{T} \in \operatorname{End}(V)$ je rovna

$$\operatorname{Tr}\mathbb{T} = \sum_{i=1}^{n}([\mathbb{T}]_B)_{ii} \equiv T^i_i = (T^a_b e_a \otimes e^b)(e^i, e_i) \equiv T(e^i, e_i)$$

Na volbě báze B nezáleží ♣ a Tr můžeme chápat jako zobrazení z $T^1_1(V)$ do skalárů $T^0_0(V) := \mathbb{F}$. Konstrukci lze zobecnit:

Definice

Nechť V je vektorový prostor, $(e_i)_1^n$ je báze V, $p > 0$, $q > 0$, $a \in \{1, \ldots, p\}$, $b \in \{1, \ldots, q\}$. Zobrazení

$$\begin{aligned} C_{ab} : T^p_q(V) &\to T^{p-1}_{q-1}(V) \\ T &\mapsto T(\ldots, \underset{a}{e^i}, \ldots, \underset{b}{e_i}, \ldots) \end{aligned}$$

se nazývá *kontrakce* tenzoru (někdy též *zúžení* nebo *stopa*) přes a-tý kontravariantní a b-tý kovariantní index.

Na unitárním prostoru lze zkombinovat kontrakci a zdvihání/spouštění indexu. Pokud g je metrický tenzor a např. $T \in T^0_3(V)$ trilineární forma, pak

$$T_{ij}{}^{i} e^j = g^{ik} T_{ijk} e^j = C_{11} T(\cdot, \cdot, \sharp_g \cdot) \in T^0_1(V)$$

Ze symetrie g plyne, že $T^i{}_{ji}$, tedy kovektor výše lze zapsat i jako $C_{12} T(\sharp_g \cdot, \cdot, \cdot)$. Kovektory

$$T_i{}^i{}_j e^j \equiv C_{11} T(\cdot, \sharp_g \cdot, \cdot) \text{ nebo } T_j{}^i{}_i e^j \equiv C_{12} T(\cdot, \sharp_g \cdot, \cdot)$$

se ale od něj obecně liší.

Pokud $v \in V$, $\alpha \in V^*$, lze hodnotu $\alpha(v) = \alpha_i v^i$ chápat jako kontrakci $C_{11}(v \otimes \alpha)$ tenzorového součinu. Analogicky lze pomocí tenzorového součinu a kontrakcí zapsat hodnotu libovolného tenzoru stupně $p + q$ na (ko-)vektorech $v, \ldots, w$:

$$T(v, \ldots, w) = \underbrace{(C \circ \ldots \circ C)}_{p+q} (T \otimes v \otimes \ldots \otimes w),$$

Definice

Nechť $T \in T_q^0(V)$. Pak definujeme *úplnou symetrizaci*, resp. *úplnou antisymetrizaci* tenzoru T předpisem $\forall v_1, \ldots, v_q \in V$

$$[\pi_S(T)](v_1, \ldots, v_q) := \frac{1}{q!} \sum_{\rho \in S_q} T(v_{\rho(1)}, \ldots, v_{\rho(q)}), \text{ resp.}$$

$$[\pi_A(T)](v_1, \ldots, v_q) := \frac{1}{q!} \sum_{\rho \in S_q} \operatorname{sgn}(\rho) T(v_{\rho(1)}, \ldots, v_{\rho(q)})$$

Pro případ bilineární formy definice říká, že

$$[\pi_S(T)]_{ab} = \frac{1}{2}(T_{ab} + T_{ba}) =: T_{(ab)}$$
$$[\pi_A(T)]_{ab} = \frac{1}{2}(T_{ab} - T_{ba}) =: T_{[ab]}$$

Zde jsme zavedli tradiční závorkovou notaci pro symetrizaci a antisymetrizaci indexů.

Vlastnost $T_{ab} = T_{(ab)} + T_{[ab]}$ znamená, že každý tenzor typu $(0, 2)$ je možné (jednoznačně) rozložit na jeho symetrickou a antisymetrickou část

$$\begin{aligned} T &= T_{ab} e^a \otimes e^b = T_{(ab)} e^a \otimes e^b + T_{[ab]} e^a \otimes e^b \\ &= T_{(ab)} \frac{1}{2} (e^a \otimes e^b + e^b \otimes e^a) + T_{[ab]} \frac{1}{2} (e^a \otimes e^b - e^b \otimes e^a) \\ &= T_{(ab)} e^{(ab)} + T_{[ab]} e^{[ab]}, \end{aligned}$$

kde $\binom{n+1}{2}$ tenzorů $e^{(ab)}$ tvoří bázi prostoru všech symetrických bilineárních forem $S_2(V)$ a $\binom{n}{2}$ tenzorů $e^{[ab]}$ bázi prostoru všech antisymetrických bilineárních forem $\Lambda_2(V)$. Analogicky ♣

$$\dim S_q(V) = \binom{n+q-1}{q}, \quad \dim \Lambda_q(V) = \binom{n}{q}.$$

Pro $q > 2$ ale $\dim S_q(V) + \dim \Lambda_q(V) < \dim T_q^0(V)$, takže už neplatí, že každá q-lineární forma je součtem úplně symetrické a úplně antisymetrické formy.