

# I. MECHANIKA

## 2. Dynamika hmotného bodu



# Obsah

---

- Pojem dynamika, síla, superpozice sil.
- Druhy silových interakcí.
- Newtonovy zákony – formulace, setrvačnost, hybnost, zobecnění druhého zákona, moment síly, moment hybnosti.
- Galileiho princip relativity.
- Inerciální a neinerciální vztažné soustavy.
- Síly při různých druzích pohybu.
- Rovnost setrvačné a gravitační hmotnosti.
- Disipativní síly.
- Newtonovy pohybové rovnice.
- Pojem diferenciální rovnice.
- Pohyb v neinerciální soustavě.
- Právě a zdánlivé síly.
- Otáčivá vztažná soustava, odvození odstředivého zrychlení a Coriolisovy síly.

# Dynamika

---

- zkoumá příčiny pohybu
- dynamis = síla
- k pohybu vede vzájemné působení těles – projevuje se silami

# Síla

---

- vektorová veličina (velikost, směr, orientace, působíště)
- míra vzájemného působení (interakce) těles
  - deformační účinky
  - pohybové účinky
- vzájemné působení
  - přímým dotykem
  - na dálku prostřednictvím silových polí

<u>interakce</u>	<u>dosah</u>	<u>rel. síla</u>
gravitační – univerzálně mezi všemi hmotnými objekty	nekonečný	1
elektromagnetická – mezi objekty s elektrickým nábojem	nekonečný	$10^{36}$
slabá – mezi elementárními částicemi (leptony, kvarky)	$10^{-18}$ m	$10^{25}$
silná – drží nukleony a kvarky v jádře (i elektricky odpuzující)	$10^{-15}$ m	$10^{38}$

# Historie - impetus, hybnost, energie

---

Aristoteles	když přestane působit síla, pohyb (vzhledem k zemi) se zastaví
Jan Filoponos	šíp letí zásluhou jakési vnitřní energie (impetus), kterou na něj přenesl luk impetus se spontánně vyčerpává
Avicenna	impetus se vyčerpává odporem vzduchu
Jean Buridan	pokud nepůsobí odporová síla, pohyb trvá nekonečně dlouho impetus je úměrný počáteční rychlosti a množství látky (hmotnosti)
Nicolas Oresme	nelze dokázat, že Země je nehybná a nebe se otáčí – princip relativity pohybu zvyšování impetu působením síly je doprovázeno zrychlením
Galileo Galilei	objekty si udržují svou rychlost, dokud na ně nepůsobí síla princip relativity - myšlenkový experiment: Pozorování v uzavřené kabině lodi budou stejná, ať je loď v klidu nebo se pohybuje rovnoměrně po přímce.
René Descartes	zákon zachování hybnosti při rázech
Isaac Newton	formulace pohybových zákonů absolutní čas a prostor
Gottfried W. Leibniz	zákon zachování kin. energie (vis viva)

# Klasická mechanika – deduktivní věda

---

axiomy

- **Galileiho princip relativity**
- **Newtonovy zákony**

předpokládáme:

- **čas je absolutní** – plyne stejně ve všech vztažných soustavách nezávisle na rychlostech
- **současnost je absolutní** – ve všech soustavách plyne čas stejně
- **délky a hmotnosti** nezávisí na rychlosti, kterou se těleso pohybuje vzhledem ke vztažné soustavě, v níž vážíme a měříme délku
- **rychlost může být libovolná** (i větší než rychlost světla)

**Galileiho princip relativity:**

Fyzikální zákony mají stejný tvar ve všech souřadnicových soustavách, které jsou navzájem v klidu nebo rovnoměrném přímočarém pohybu (svázány Galileiho transformací)

# Galileiho transformace

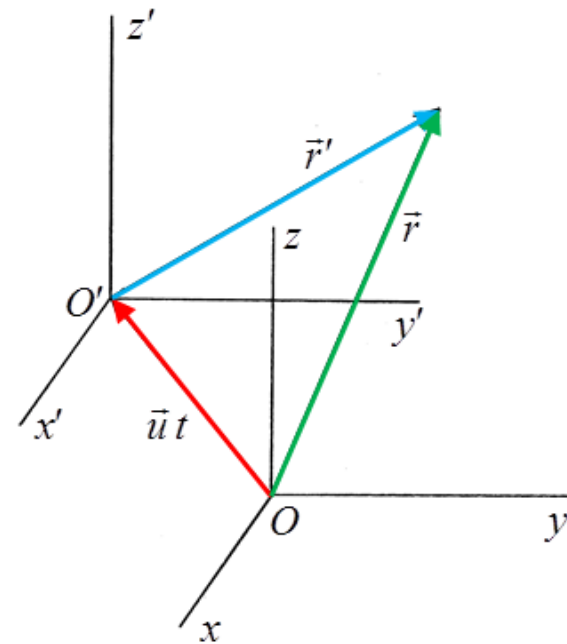
mezi souřadnicemi stejné bodové události v soustavách souřadnic pohybujících se vzájemně ve směru osy  $x$  rychlostí  $u$  (předp. **absolutní prostor a absolutní čas**)

$$\begin{array}{l} x' = x - ut \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{array} \quad \text{resp.} \quad \begin{array}{l} x'_1 = x_1 - ut \\ x'_2 = x_2 \\ x'_3 = x_3 \\ t' = t \end{array}$$

obecnější zápis G.t. pro případ vzájemné rychlosti  $\vec{u}$  souřadnicových soustav

$$\begin{array}{l} \vec{r}' = \vec{r} - \vec{u}t \\ t' = t \end{array}$$

pro popis vzájemného vztahu rychlostí  $\dot{\vec{r}}'$  a  $\dot{\vec{r}}$ , jimiž se stejný bod pohybuje v obou vztažných soustavách, dostaneme derivováním G.t. vztah vyjadřující **klasické skládání rychlostí**  $\dot{\vec{r}}' = \dot{\vec{r}} - \vec{u}$  resp.  $\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}' + \vec{u}$



# Pohybové zákony

## Lex. I.

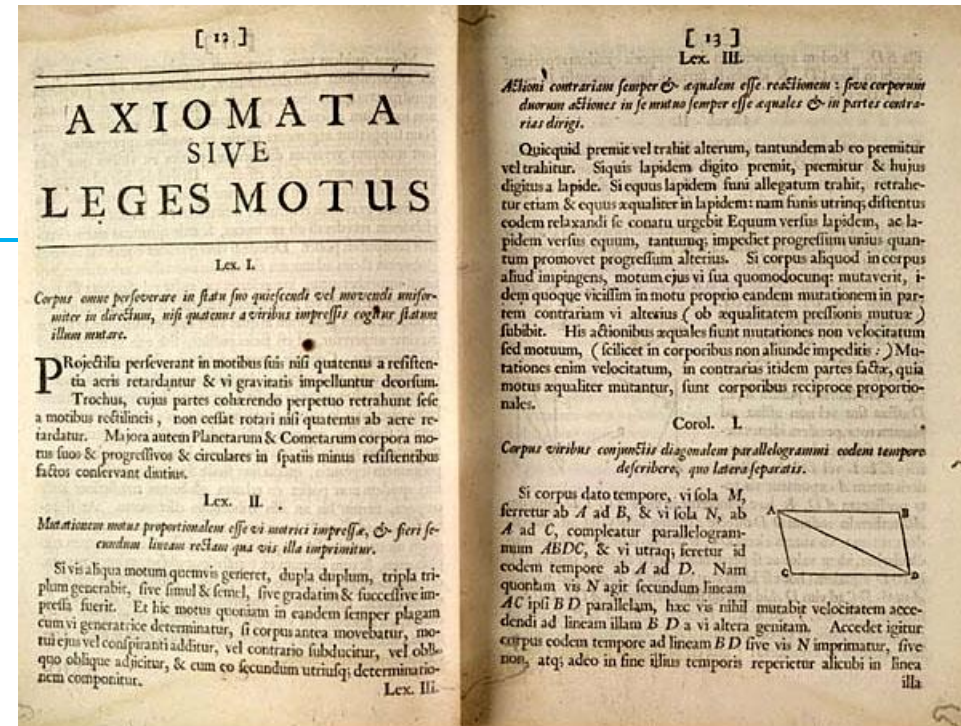
*Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus a viribus impressis cogitur statum illum mutare.*

## Lex. II.

*Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressæ, & fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur.*

## Lex. III.

*Actioni contrariam semper & æqualem esse reactionem: sive corporum duorum actiones in se mutuo semper esse æquales & in partes contrarias dirigi.*



Isaac Newton, *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*, Londini 1687

**Zákon I.** Každé těleso setrvává ve svém stavu, buď na místě nebo v rovnoměrném pohybu po přímce, dokud není vnějšími silami nuceno tento stav změnit.

**Zákon II.** Změna hybnosti je úměrná působící síle a má s ní stejný směr.

**Zákon III.** Každá akce vyvolává stejně velkou reakci, neboli vzájemné síly mezi dvěma tělesy mají vždy stejnou velikost a opačný směr.



# I. Newtonův zákon – zákon setrvačnosti

---

**Inerciální vztažnou soustavou nazveme takovou soustavu, kde platí:**

**Každé těleso setrvává ve svém stavu, buď na místě nebo v rovnoměrném přímočarém pohybu (vzhledem ke zvolené vztažné soustavě), dokud není vnějšími silami nuceno tento stav změnit. Existuje alespoň jedna inerciální vztažná soustava.**

- vyděluje význačnou třídu vztažných soustav – inerciální s.s.
- druhá věta (vychází z originální Newtonovy) platí nejen pro hmotný bod, nýbrž také pro celé těleso, které obecně koná rotační pohyb
- existenční tvrzení na konci jen zdánlivě samozřejmé; nalezení inerciální s.s. není triviální

# Galileiho princip relativity

---

zaveden pojem inerciální s.s.  $\Rightarrow$  GPR lze formulovat kompaktněji:

**Fyzikální zákony mají stejný tvar ve všech inerciálních vztažných soustavách.**

$\Rightarrow$  Všechny inerciální soustavy souřadnic (i.s.s.) jsou rovnocenné.

Pozn:

- **souřadnicová soustava  $\rightarrow$  vztažná soustava, vztažný systém, soustava souřadná**  $\Rightarrow$  konkrétní souřadnicové osy nejsou podstatné
- vztažnou soustavu určí aspoň 3 body neležící v přímce, tj. nestačí jediný vztažný bod (např. počátek s.s.), což nevyloučí rotaci s.s.

# Princip superpozice

---

neboli princip skládání sil

**Pohybové účinky několika současně působících sil jsou stejné jako účinek jediné síly dané jejich vektorovým součtem.**

- plyne ze zkušenosti
- Newton ho uvádí ve vysvětlivkách k pohybovým zákonům

# I. Newtonův zákon – symbolický zápis

---

V inerciální vztažené soustavě platí:  $\sum \vec{F} = 0 \Leftrightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} = 0$

Součtem sil se rozumí výslednice všech vnějších sil vyvolaných vzájemným působením těles (tzv. síly skutečné neboli pravé).

# Neinerciální vztažná soustava

---

V neinerciální vztažné soustavě platí:  $\left( \sum \vec{F} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} \neq 0 \right) \wedge \left( \frac{d\vec{v}}{dt} = 0 \Rightarrow \sum \vec{F} \neq 0 \right)$

Součtem sil se rozumí výslednice všech vnějších sil vyvolaných vzájemným působením těles (tzv. síly skutečné neboli pravé).

V neinerciální s.s. se tělesa pohybují se zrychlením, když na ně nepůsobí (pravé) vnější síly.

Vždy je možno nalézt dodatečnou sílu  $\vec{F}_s$  (tzv. **setrvačnou** nebo též zdánlivou), jejímž započtením se dosáhne formálně stejné relace jako v případě i.s.s., tj.

$$\vec{F}_s + \sum \vec{F} = 0 \Leftrightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} = 0.$$

## II. Newtonův pohybový zákon – zákon síly

Časová změna hybnosti tělesa je úměrná působící síle a má s ní stejný směr.

**Hybnost** je vektorová veličina  $\vec{p} \equiv m\vec{v}$  (anglicky linear momentum, translational momentum)

Rychlost se měří vůči inerciální vztažné soustavě definované dříve.

**Symbolické vyjádření 2.NZ:** 
$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v})$$

Konstanta úměrnosti uvedená ve slovním znění je rovna jedné, díky vhodné definici jednotky síly.

V běžných případech se počet částic v tělese s časem nemění, tudíž se zachovává i hmotnost pohybujícího se tělesa.

$$\left. \begin{aligned} \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) &= \frac{dm}{dt}\vec{v} + m\frac{d\vec{v}}{dt} \\ \frac{dm}{dt} &= 0 \end{aligned} \right\} \vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$$

# Důsledky principu superpozice

necht' na h.b. postupně působí síly

$$\vec{F}_1 \text{ až } \vec{F}_n$$

NZ → vyvolají zrychlení

$$\vec{a}_1 \text{ až } \vec{a}_n$$

současné působení sil

$$\vec{F}_1 \text{ až } \vec{F}_n$$

NZ → ? (Co když „zapnutí“ síly  $\vec{F}_2$  se zároveň nějak změní působení síly  $\vec{F}_1$ ?)

Princip superpozice → současné působení všech sil je rovno působení výslednice vektorového součtu

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$$

aplikujme tedy 2.NZ na výslednici i jednotlivé síly

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \sum_{i=1}^n \frac{d\vec{p}_i}{dt}$$

neboli

$$\vec{a} = \sum_{i=1}^n \vec{a}_i$$

⇒ Tvrzení o **skládání pohybů**: Pohyb tělesa pod vlivem výslednice  $\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$  je součtem pohybů, které by těleso vykonalo postupným působením jednotlivých sil  $\vec{F}_i$  bez ohledu na jejich pořadí (vektorový součet je komutativní).

# Momenty pro popis rotačního pohybu

---

- vztaženy k libovolnému bodu O v prostoru (momentový bod)
- momentový bod nemusí ležet na ose otáčení
- momenty jsou axiální vektory

**Moment síly**  $\vec{M}$  (anglicky torque, moment of force)

- otáčivý účinek síly
- působíště síly  $\vec{F}$  vzhledem k bodu O určeno polohovým vektorem  $\vec{r}$
- moment síly  $\vec{M}$  vzhledem k bodu O definován vztahem  $\vec{M} \equiv \vec{r} \times \vec{F}$

**Moment hybnosti** (impulsmoment, točivost)  $\vec{b}$  (anglicky angular momentum, moment of momentum, rotational momentum)

- míra rotačního pohybu tělesa
- moment hybnosti  $\vec{b}$  vzhledem k bodu O definován vztahem  $\vec{b} \equiv \vec{r} \times \vec{p}$



## II. NZ – zobecnění pro rotační pohyb

---

Zobecnění 2. NZ pro rotační pohyb:  $\vec{M} = \frac{d\vec{b}}{dt}$

Odvození:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{b}}{dt} &= \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times m\vec{v}) = m \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{v}) = \\ &= m \left\{ \underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{v}}_{\vec{v} \times \vec{v} = 0} + \vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt} \right\} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M} \end{aligned}$$

# III. Newtonův zákon – akce a reakce

---

**Vzájemná silová působení dvou různých těles jsou stejně velká a opačně orientovaná.**

**Symbolické vyjádření 3. NZ:**

$$\vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB}$$

(těleso A působí na B silou  $\vec{F}_{AB}$ ; těleso B působí na A silou  $\vec{F}_{BA}$ )

- akce a reakce působí na různá tělesa
- obě síly působí na přímce spojující hmotné body nebo těžiště těles (centrální síly)
- nezáleží na typu interakce ani na vzájemném pohybu
- reakce je vždy okamžitá

předpokládají se vzájemné

- malé rychlosti (ve srovnání s rychlostí světla) – jinak dochází k aberaci (vlivem skládání rychlostí se body navzájem jeví na jiných pozicích než skutečně jsou)
- malé vzdálenosti – silovou reakci lze pokládat za okamžitou (rychlost přenosu informace omezena rychlostí světla)

# Působení sil při různých typech pohybu

---

- rovnoměrný přímočarý pohyb

$$\vec{a} = 0 \Rightarrow \vec{F} = 0$$

- přímočarý rovnoměrně zrychlený

$$\vec{a} = \vec{k}_1 \Rightarrow \vec{F} = m\vec{k}_1$$

- rovnoměrný kruhový (dostředivá síla)

$$\vec{a} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \Rightarrow \begin{cases} \vec{F} = m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \\ \vec{F} = -m\vec{\omega}^2 \vec{r} \\ |\vec{F}| = m\omega^2 |\vec{r}| \end{cases}$$

- volný pád (tíhová síla)

$$\vec{a} = \vec{g} \Rightarrow \vec{F}_G = m\vec{g}$$

# Setrvačná hmotnost

---

3.NZ → stanovení hmotnosti těles ze vzájemné silové interakce

Princip:

- stanovíme zrychlení  $\vec{a}_1$  a  $\vec{a}_2$
- musí platit  $m_1\vec{a}_1 = -m_2\vec{a}_2$
- pokud  $m_1$  známe, dostaneme  $m_2$  pomocí trojčlenky  $m_2 = \frac{|\vec{a}_1|}{|\vec{a}_2|} m_1$
- máme-li referenční hmotnost, můžeme též určovat velikost síly  $|\vec{F}|$

takto určená hmotnost se nazývá **setrvačnou hmotností**

(kvantifikuje odpor, který těleso klade snaze o změnu jeho rychlosti)

# Tíhové zrychlení na povrchu Země

Experimentálně zjištěno, že na stejném místě zemského povrchu:

- všechna tělesa padají se stejným zrychlením nezávisle na hmotnosti
- působí na ně tíhová síla  $\vec{F}_G$  úměrná jejich hmotnosti  $\vec{F}_G = m\vec{g}$
- konstanta úměrnosti má rozměr zrychlení, označuje se **tíhové zrychlení**

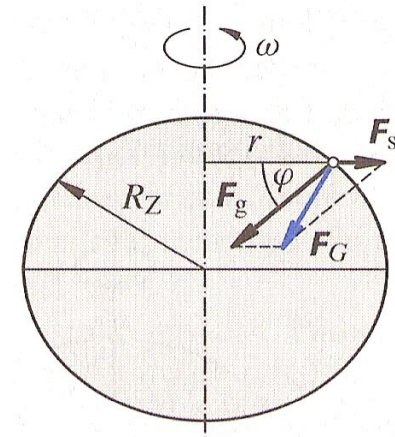
Tíhová síla  $\vec{F}_G$  má několik složek:

- gravitační síla – vzájemné gravitační přitažlivé působení planety Země a tělesa
- síla plynoucí ze skutečnosti, že vztažná soustava spojená pevně s povrchem Země není inerciální – odstředivá síla

Odhad odstředivého zrychlení působícího (v neinerciální s.s.) na těleso na rovníku:

$$a_s = \omega^2 r = \left( \frac{2\pi}{24 \times 60 \times 60 s} \right)^2 \times 6378 \times 10^3 m = 0.034 ms^{-2} \approx \frac{g}{300}$$

Tíhová síla může být v závislosti na zeměpisné šířce až o 1/300 menší než gravitační síla.



# Gravitační hmotnost

---

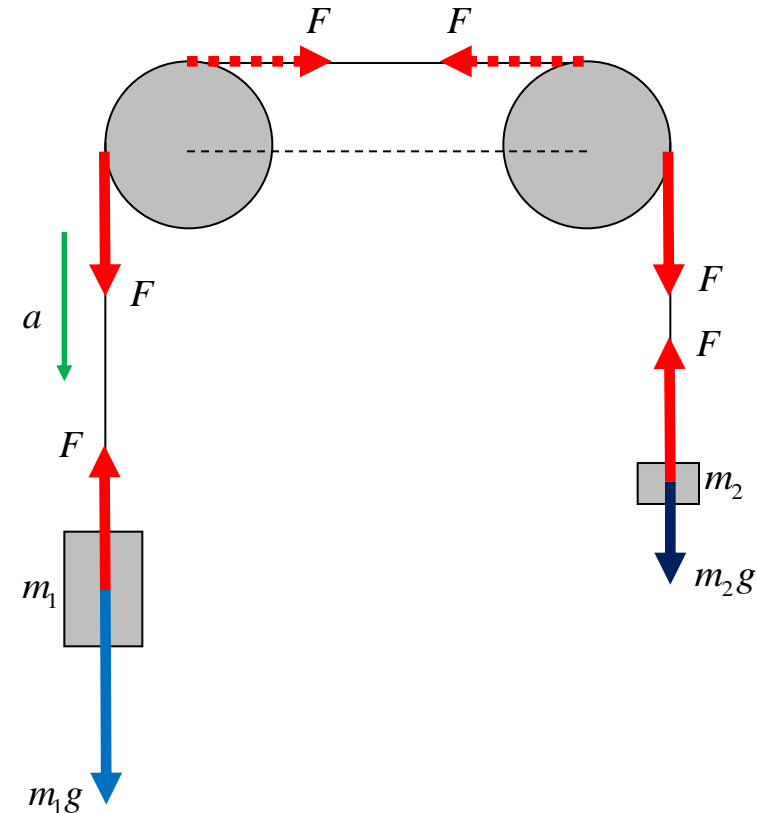
- při zanedbání odstředivé síly – procedura vážení porovnává **gravitační hmotnost** různých těles na základě gravitačního působení  $\frac{m_1}{m_2} = \frac{\vec{F}_{g1}}{\vec{F}_{g2}}$
- ve skutečnosti vážení porovnává tíhovou sílu  $\frac{m_1}{m_2} = \frac{\vec{F}_{G1}}{\vec{F}_{G2}}$
- na první pohled není významné, protože jak tíhové, tak gravitační zrychlení působí na všechna tělesa stejně
- jenže **každá ze složek tíhové síly je odvozena od jiného typu hmotnosti**
- rovnost setrvačné a gravitační hmotnosti je v rámci klasické mechaniky experimentálním faktem (Loránd Eötvös 1848-1919, Maďarsko), až v obecné teorii relativity je to základní princip

# Zdánlivá hmotnost tělesa při zrychleném pohybu

- nehmotné kladky, nehmotné závěsy, tělesa hmotnosti  $m_1$  a  $m_2$ , platí  $m_1 > m_2$
- pohyb v jednom směru  $\Rightarrow$  skalární značení
- těžší těleso klesá  $\Rightarrow$  kladný směr zrychlení  $a$
- levé těleso – tíhová síla  $m_1g$  a tahová síla vlákna  $F$
- 2. NZ  $\Rightarrow$   $m_1g - F = m_1a$
- pravé těleso – tíhová síla  $m_2g$  a tahová síla vlákna  $F$
- 2. NZ  $\Rightarrow$   $F - m_2g = m_2a$
- $\Rightarrow$  tahová síla vlákna  $F = m_1(g - a)$
- a zároveň  $F = m_2(g + a)$
- z rovnosti sil  $\Rightarrow$  zrychlení  $a$ 

$$m_1(g - a) = m_2(g + a) \quad m_1g - m_1a = m_2g + m_2a$$

$$m_1g - m_2g = m_1a + m_2a \quad a = g \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}$$
- vlákna zprostředkují interakci těles a kladek – 3. NZ  $\Rightarrow$  vyznačené síly působící na kladky mají velikost  $F$ 
  - síly vyznačené čárkovaně kompenzovány konstrukcí
  - svislé síly lze určovat vážením



- síla  $F = \frac{2m_1m_2}{m_1 + m_2}g$
- $m_1 > m_2 \Rightarrow m_1g > F > m_2g$

**Závěr:** Zdánlivá hmotnost ( $F/g$ ) tělesa pohybujícího se zrychleně je při pohybu dolů menší a při pohybu nahoru větší než skutečná hmotnost tělesa  $m$ .

# Poggendorffovy váhy

vlákna zprostředkují interakci těles a kladek

3. NZ  $\Rightarrow$  vyznačené síly působící na kladky mají všechny velikost příslušné tahové síly

- pravá kladka (nehybná) – tahová síla  $m_1g$
- levá kladka (blokována) – tahová síla  $m_1g$
- levá kladka (volná) – tahová síla  $F$

čárkovaně vyznačené síly kompenzovány konstrukcí vah

experiment:

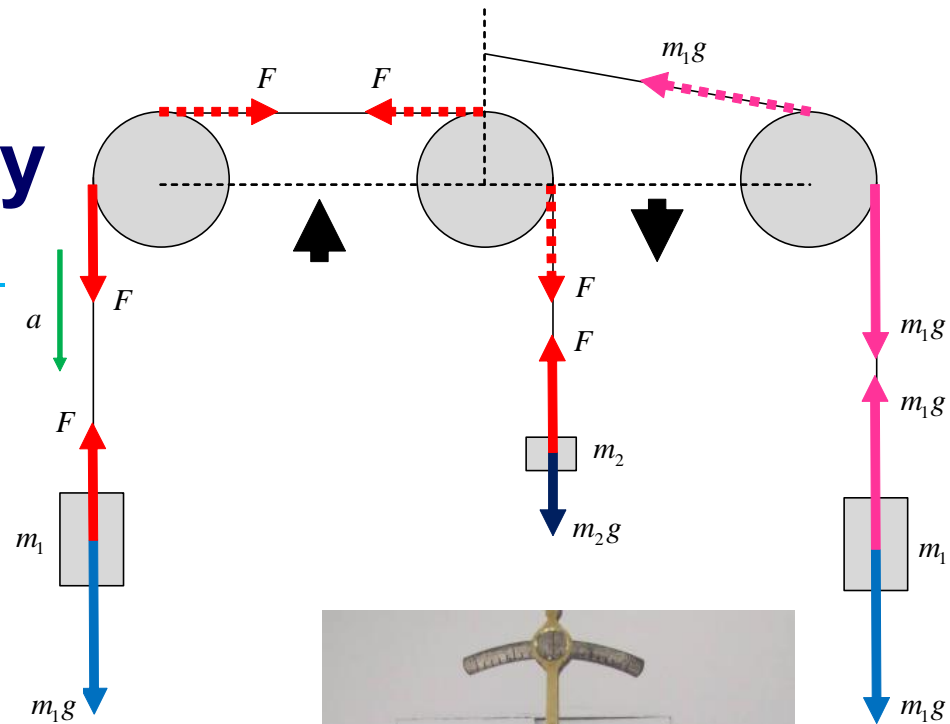
*výchozí stav:*

otáčení levé kladky blokováno nití

závaží na obou koncích vah hmotnost  $m_1 \Rightarrow$  **váhy vyvážený**

*blokování odstraněno:*

ustaví se silové působení podle nákresu  $\Rightarrow$  zdánlivá hmotnost tělesa pohybujícího se dolů zrychleně je menší než skutečná hmotnost tělesa  $m_1 \Rightarrow$  **levá strana vah se zvedne**





# Poggendorffovy váhy

druhý experiment:

*výchozí stav:*

levá strana blokována, obě závaží hm.  $m_2$

⇒ **váhy vyváženy**

*blokování odstraněno:*

zdánlivá hmotnost tělesa pohybujícího se nahoru zrychleně je větší než skutečná hm.

tělesa  $m_2$  ⇒ **levá strana vah klesne**

třetí experiment:

*výchozí stav:*

levá strana blokována, nalevo závaží hm.  $m_1$ ,

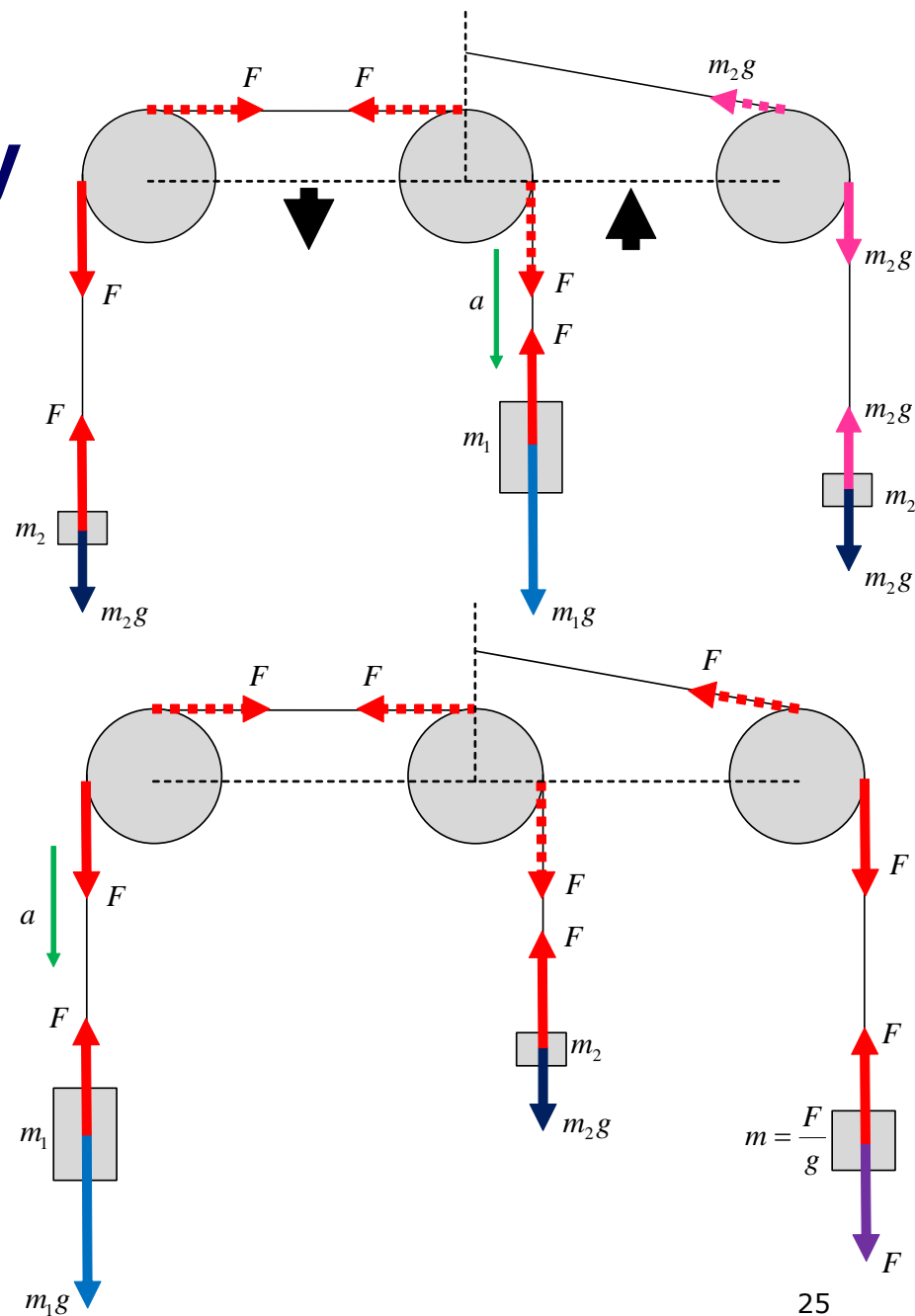
napravo závaží hm.  $\frac{2m_1m_2}{m_1 + m_2}$  ⇒ **váhy nejsou**

**vyváženy, levá strana vah klesla**

*blokování odstraněno:*

zdánlivá hmotnost tělesa pohybujícího se

zrychleně je  $\frac{2m_1m_2}{m_1 + m_2}$  ⇒ **váhy vyváženy**



# Disipativní síly

- odpor prostředí
- síla míří proti směru pohybu
- **vnitřní tření** – vzájemný posuv částí tělesa – viskozita a anelasticita
- **vnější tření** – dotyk těles – tření smykové a valivé

malé rychlosti:

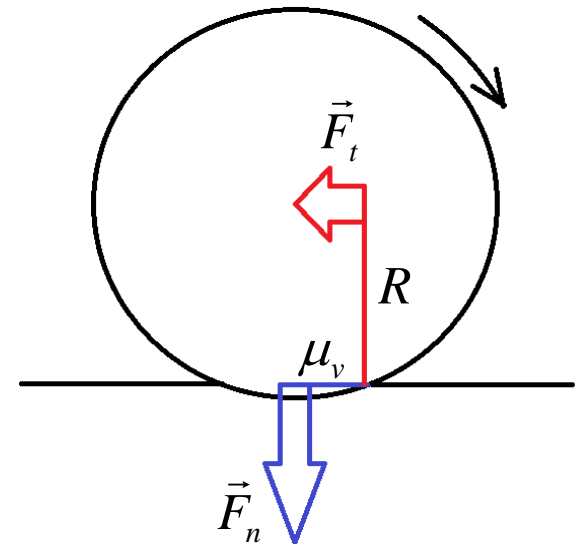
**smykové tření:**  $|\vec{F}_t| = \mu_s |\vec{F}_n|$  (1. Amontonsův z.)

Guillaume Amontons (1663 – 1705, Francie)

- $\mu_s$  ... součinitel smykového tření
- $\vec{F}_n$  ... normálová síla působící na podložku
- $\vec{F}_t$  ... třecí síla; nezávisí na ploše styku těles (2. A. z.) a rychlosti (3. A.z.)

**valivé tření:**  $|\vec{F}_t| = \frac{\mu_v |\vec{F}_n|}{R}$

- $\mu_v$  ... součinitel valivého tření
- $\vec{F}_n$  ... normálová síla působící na podložku
- $R$  ... poloměr válce valícího se po makroskopicky rovinné podložce
- $\vec{F}_t$  ... třecí síla; působí v hm. středu válce



# Disipativní síly – Stokesův vztah

odpor prostředí závisí na rychlosti (obecně nelineárně, dokonce i nemonotónně!)

**lineární závislost na rychlosti (Stokesův vztah pro laminární obtékání koule):**  $|\vec{F}_t| = 6\pi\eta r|\vec{v}|$

- $\vec{v}$  ... rychlost tělesa
- $\eta$  ... dynamická viskozita tekutiny
- $r$  ... poloměr koule

při působení konstantní silou  $\vec{F}_0$  (např. volný pád koule v tekutině) dojde

k ustavení rovnováhy sil při rychlosti  $|\vec{v}_{\text{stac}}| = \frac{|\vec{F}_0|}{6\pi\eta r}$

# Disipativní síly – Newtonův vztah

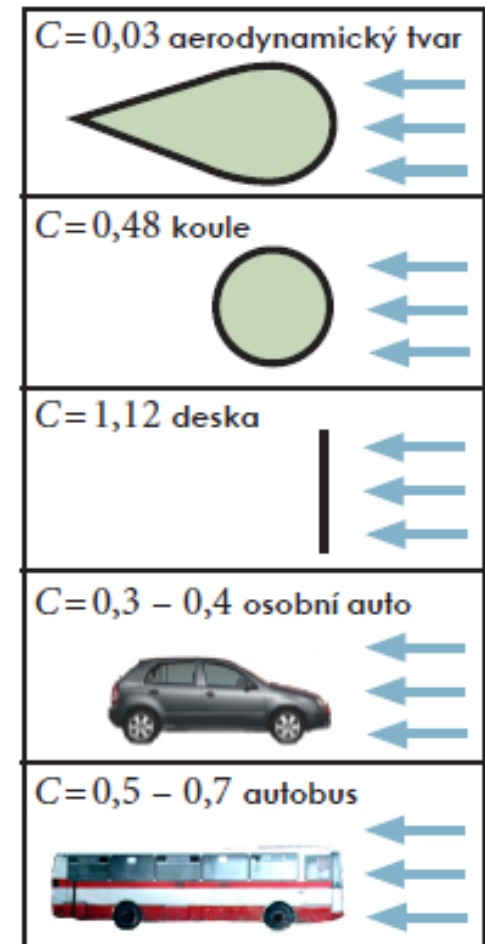
kvadratická závislost na rychlosti (Newtonův vztah

pro turbulentní obtékání):  $|\vec{F}_t| = \frac{1}{2} C \rho S \vec{v}^2$

- $\vec{v}$  ... rychlost tělesa
- $C$  ... rychlostní součinitel odporu (zohledňuje tvar celého tělesa)
- $\rho$  ... hustota tekutiny
- $S$  ... účinný průřez (plošný obsah průmětu tělesa do roviny kolmé k vzájemné rychlosti)

při působení konstantní silou  $\vec{F}_0$  (např. volný pád ve vzduchu) dojde k ustavení rovnováhy sil

při rychlosti  $|\vec{v}_{\text{stac}}| = \sqrt{\frac{2|\vec{F}_0|}{C\rho S}}$



# Limity Newtonovy mechaniky

---

- při rychlostech srovnatelných s rychlostí světla neplatí předpoklady (absolutnost toku času a současnosti, nezávislost délky a hmotnosti na rychlosti, rychlost bez limitu)
- Newtonova mechanika pak není použitelná
- toto kritérium ale nevyplývá z poznání, že rychlost světla je konečná
- už sám Newton odhadl rychlost světla na 16násobek zemského průměru za sekundu (cca 200 000 km/s)
- dokud bylo světlo chápáno jako proud částic (Newtonova korpuskulární teorie světla), nic se nedělo
- když začalo být světlo chápáno jako vlnění, vznikla přirozeně představa éteru jako nezbytného média, o němž se také přirozeně předpokládalo, že je nehybný vůči absolutnímu prostoru
- zároveň použití vlnových principů umožňuje měřit i velmi malé odchylky rychlosti šíření světla (např. v různých hmotných prostředích); nabízela se možnost identifikovat pohyb vůči absolutnímu prostoru
- Michelsonův-Morleyův experiment postupně vedl k poznání, že **rychlost světla je stejná ve všech inerciálních soustavách**, které se navzájem pohybují  $\Rightarrow$  Galileův princip relativity musel být nahrazen **Einsteinovým principem relativity**
- Einstein podobně jako Newton mohl stavět na pracích jiných: Většina matematického aparátu speciální teorie relativity byla již tehdy publikována jinými autory (Hendrik Lorentz, Henri Poincaré), ale teprve Einstein se odvážil zcela reformovat pojetí času a prostoru.

# Newtonovy pohybové rovnice

---

- 2.NZ propojuje trajektorii pohybu h.b. se silovým působením – známe-li jedno, můžeme určit druhé
- zápis  $m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F} \left( t, \vec{r}, \frac{d\vec{r}}{dt} \right)$  – 3 pohybové rovnice – **soustava diferenciálních rovnic 2. řádu**
- předpokládá se, že síla nezávisí na vyšších derivacích polohového vektoru (nemusí platit např. v případě odporových sil)
- řešení je často omezeno **počátečními podmínkami** (poloha  $\vec{r}(t_0)$  a rychlost  $\vec{v}(t_0)$  ve výchozím čase)
- případně na ně mohou být kladena i jiná omezení – **okrajové podmínky**
- **jednoznačnost řešení** → ze zadaných počátečních podmínek je jednoznačně určen pohyb h.b. (determinismus klasické mechaniky)

# Pojem diferenciální rovnice

---

- obsahuje derivaci neznámé funkce
- soustava musí obsahovat tolik rovnic, kolik je neznámých funkcí
- terminologie:
  - explicitní funkce, resp. explicitně zadaná funkce:  $y = f(x)$
  - implicitní funkce:  $F(x, y) = 0$
- dif. rovnice 2. řádu v implicitním tvaru:  $F(x, y, y', y'') = 0$
- dif. rovnice 2. řádu v explicitním tvaru:  $y'' = f(x, y, y')$
- funkce, která diferenciální rovnici identicky vyhovuje, se nazývá její **řešení** nebo také **integrál** (počet integračních konstant odpovídá řádu rovnice)
  - implicitní  $\Phi(x, y, C_1, \dots, C_n) = 0$
  - explicitní  $y = \varphi(x, C_1, \dots, C_n)$
- v průběhu řešení často jako mezikrok získáme **první integrál**
  - implicitní  $F(x, y, y') = 0$
  - explicitní  $y' = f(x, y)$

# Příklady pohybových rovnic

**pohyb v gravitačním poli:**  $\vec{F} = (0,0,-mg)$

- pohybové rovnice:  $m \frac{d^2 x_1}{dt^2} = 0$ ,  $m \frac{d^2 x_2}{dt^2} = 0$ ,  $m \frac{d^2 x_3}{dt^2} = -mg$
- explicitní formulace:  $\frac{d^2 x_1}{dt^2} = 0$ ,  $\frac{d^2 x_2}{dt^2} = 0$ ,  $\frac{d^2 x_3}{dt^2} = -g$
- první integrály:  $\frac{dx_1}{dt} = k_1$ ,  $\frac{dx_2}{dt} = k_2$ ,  $\frac{dx_3}{dt} = -gt + k_3$
- obecné řešení:  $x_1 = k_1 t + d_1$ ,  $x_2 = k_2 t + d_2$ ,  $x_3 = -\frac{gt^2}{2} + k_3 t + d_3$
- počáteční podmínky:  $\vec{v}(t=0) = (v_{10}, v_{20}, v_{30})$ ,  $\vec{r}(t=0) = (x_{10}, x_{20}, x_{30})$
- porovnáním s poč. podmínkami:  $x_1 = v_{10}t + x_{10}$ ,  $x_2 = v_{20}t + x_{20}$ ,  $x_3 = -\frac{gt^2}{2} + v_{30}t + x_{30}$
- **vrh svislý**  $\vec{v}(t=0) = (0,0,v_{30})$
- **vrh vodorovný**  $\vec{v}(t=0) = (v_{10},v_{20},0)$
- **vrh šikmý**  $\vec{v}(t=0) = (v_{10},v_{20},v_{30})$



# Příklady pohybových rovnic

---

**harmonický pohyb:**  $F = -kx$

- pohybová rovnice:  $m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx$
- explicitní formulace:  $\frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{k}{m} x$
- obecné řešení:  $x = A \sin \left( \underbrace{\sqrt{\frac{k}{m}}}_{\omega} t + \alpha \right)$

# Příklady pohybových rovnic

**zpomalující pohyb v tekutině:**  $F = -k \frac{dx}{dt}$

- pohybová rovnice:  $m \frac{d^2x}{dt^2} = -k \frac{dx}{dt}$

- explicitní formulace:  $\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m} \frac{dx}{dt}$

- první integrál:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m} \frac{dx}{dt} \rightarrow \frac{dv}{dt} = -\frac{k}{m} v \rightarrow \int \frac{dv}{v} = -\frac{k}{m} \int dt \rightarrow \ln v = -\frac{k}{m} t + C \rightarrow \frac{dx}{dt} = v_0 \exp\left(-\frac{k}{m} t\right)$$

- obecné řešení (druhý integrál):  $x = -\frac{mv_0}{k} \exp\left(-\frac{k}{m} t\right) + C$

- porovnání s počáteční polohou:  $x(t=0) = 0 \rightarrow 0 = -\frac{mv_0}{k} + C \rightarrow C = \frac{mv_0}{k}$

- řešení:  $x = \frac{mv_0}{k} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{k}{m} t\right) \right]$

# Vzájemný pohyb vztažných soustav

---

budeme vyšetřovat důsledky vzájemného pohybu vztažných soustav

- **rovnoměrný** vzájemný pohyb vztažných soustav
  - Galileova transformace
- **zrychlený přímočarý** pohyb soustavy vůči i.s.s.
  - zrychlující dopravní prostředek
  - padající výtah (setrvačná síla kompenzuje tíhovou sílu  $\Rightarrow$  stav beztlíže)
- **rotace** soustavy vůči inerciální s.s.
  - kolotoč, rotující vesmírná stanice  $\Rightarrow$  umělá gravitace
  - vztažná soustava spojená se Zemí

# Rovnoměrný vzájemný pohyb soustav

- inerciální soustava  $\mathbf{S}$  s počátkem  $O$ , hmotný bod má polohu  $\vec{r}$
- inerciální soustava  $\mathbf{S}'$  s počátkem  $O'$ , hmotný bod má polohu  $\vec{r}'$
- soustava  $\mathbf{S}'$  se pohybuje vzhledem k  $\mathbf{S}$  konstantní rychlostí  $\vec{u}$
- vektor  $\vec{q}$  je polohový vektor počátku  $O'$  soustavy  $\mathbf{S}'$  vzhledem k soustavě  $\mathbf{S}$

$$\vec{q} = \vec{u}t$$

$$\dot{\vec{q}} = \vec{u}$$

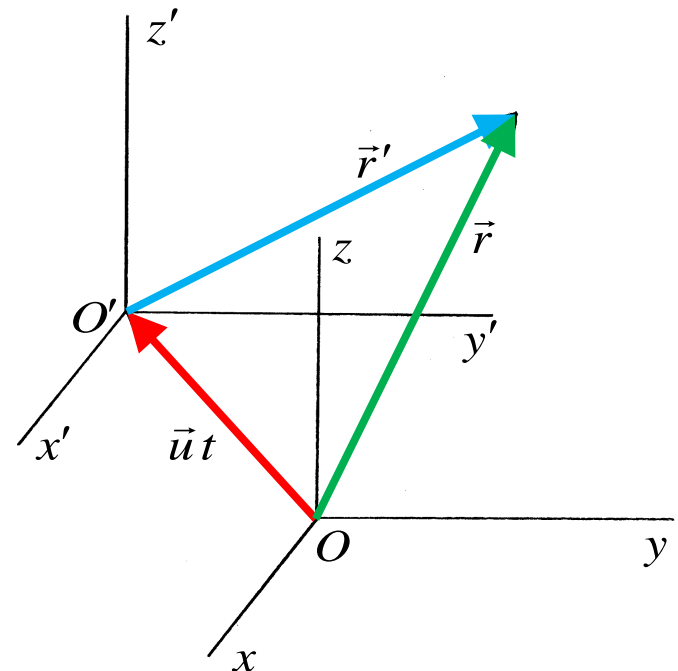
$$\ddot{\vec{q}} = \dot{\vec{u}} = \vec{a}_{O'} = 0$$

$$\vec{r} = \vec{u}t + \vec{r}'$$

$$\vec{v} = \vec{u} + \vec{v}'$$

$$\vec{a} = \vec{a}'$$

- **Galileiho transformace** souřadnic
- **teorém skládání rychlostí**
- zrychlení a tedy i síly v obou soustavách jsou stejné – **Galileiho princip relativity**



# Zrychlený pohyb soustavy vůči i.s.s.

---

- necht' v inerciální s.s. působí na hmotný bod celková síla  $\vec{F}$
- $\vec{F}$  je výslednicí sil, které jsou důsledkem interakce s jinými hmotnými objekty (tyto síly se nazývají **silami skutečnými či pravými**)
- ukážeme dále, že v neinerciální s.s. působí na stejný h.b. síla  $\vec{F}' = \vec{F} + \vec{F}_s$ , kde  $\vec{F}_s = -m\vec{a}_u$  je tzv. **setrvačná síla**
- k této síle neexistuje reakce; není důsledkem interakce s jinými hm. objekty
- vyjádříme tzv. **unášivé zrychlení**  $\vec{a}_u$  pro zrychlenou a rotující soustavu

Důsledky:

- a) v neinerciálních systémech neplatí NZ bez doplnění setrvačných sil
- b) při řešení úloh je třeba buď důsledně pracovat v inerciální soustavě nebo důsledně používat setrvačné síly

# Zrychlený pohyb soustavy vůči i.s.s.

- inerciální soustava  $\mathbf{S}$  s počátkem  $O$ , hmotný bod má polohu  $\vec{r}$
- **neinerciální** soustava  $\mathbf{S}'$  s počátkem  $O'$ , hmotný bod má polohu  $\vec{r}'$
- vektor  $\vec{q}$  je polohový vektor počátku  $O'$  soustavy  $\mathbf{S}'$  vzhledem k soustavě  $\mathbf{S}$
- soustava  $\mathbf{S}'$  se pohybuje vzhledem k  $\mathbf{S}$  se zrychlením  $\vec{a}_{O'}$

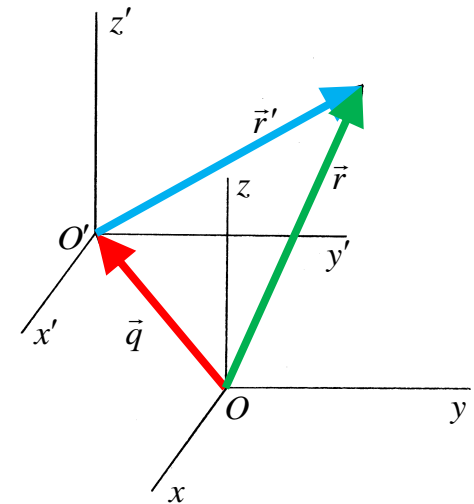
$$\ddot{\vec{q}} = \vec{a}_{O'}$$

$$\vec{q} = \frac{1}{2} \vec{a}_{O'} t^2 + \vec{u}_{O'} t + c_{O'}$$

$$\vec{r} = \frac{1}{2} \vec{a}_{O'} t^2 + \vec{u}_{O'} t + c_{O'} + \vec{r}'$$

$$\vec{v} = \underbrace{\vec{a}_{O'} t + \vec{u}_{O'}}_{\vec{u}_u} + \vec{v}'$$

$$\vec{a} = \vec{a}_{O'} + \vec{a}'$$



- skládání rychlostí – **unášivá rychlost**  $\vec{u}_u$  narůstá
- zrychlení  $\vec{a}'$  v n.s.s.  $\mathbf{S}'$  se liší o hodnotu  $-\vec{a}_{O'}$  od zrychlení  $\vec{a}$  působícího v i.s.s.  $\mathbf{S}$
- v  $\mathbf{S}'$  působí na h.b. síla  $\vec{F}' = m\vec{a}' = m(\vec{a} - \vec{a}_{O'}) = \vec{F} + \vec{F}_s \Rightarrow \vec{F}_s = -m\vec{a}_{O'} \Rightarrow \vec{a}_u = \vec{a}_{O'}$

# Časové derivace v rotující soustavě

- odvození pro libovolný vektor  $\vec{A}$
- na počátku obě s.s. splývají

v nehybné s.s.

- za čas  $dt$  z polohy  $\vec{A}_1$  do  $\vec{A}_2$
- změna vektoru  $d\vec{A} = \vec{A}_2 - \vec{A}_1$
- zároveň se rotující s.s. otočí o úhel  $\omega dt$  a její osy se přesunou  $x_1 \rightarrow \tilde{x}_1 \wedge x_2 \rightarrow \tilde{x}_2$

v rotující s.s.

- za čas  $dt$  z polohy  $\vec{A}'_1$  do  $\vec{A}'_2$
- změna vektoru  $d'\vec{A} = \vec{A}'_2 - \vec{A}'_1$

diferenciály se liší

$$d'\vec{A} = d\vec{A} + d\vec{R}$$

rozdíl určen pootočením

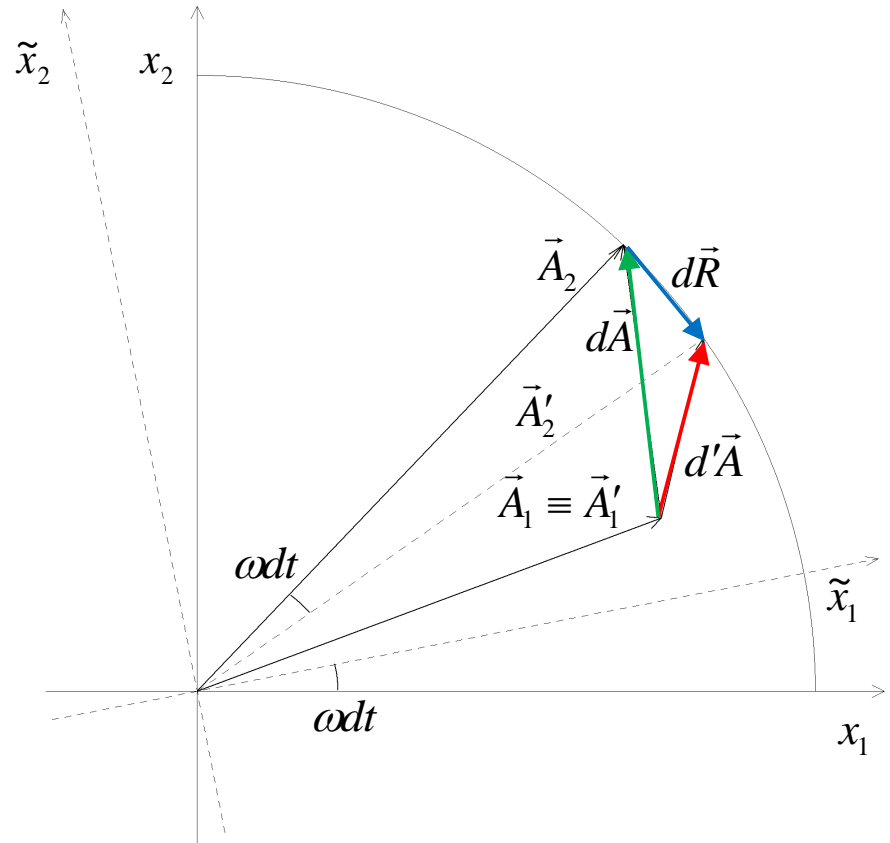
$$d\vec{R} = -\vec{\omega} dt \times \vec{A}$$

dosazením

$$d'\vec{A} = d\vec{A} - \vec{\omega} \times \vec{A} dt$$

vztah mezi derivacemi

$$\frac{d'\vec{A}}{dt} = \frac{d\vec{A}}{dt} - \vec{\omega} \times \vec{A}$$



případně

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{d'\vec{A}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{A}$$

# Rotující neinerciální vztažná soustava

pro libovolný vektor  $\vec{A}$  platí

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{d'\vec{A}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{A}$$

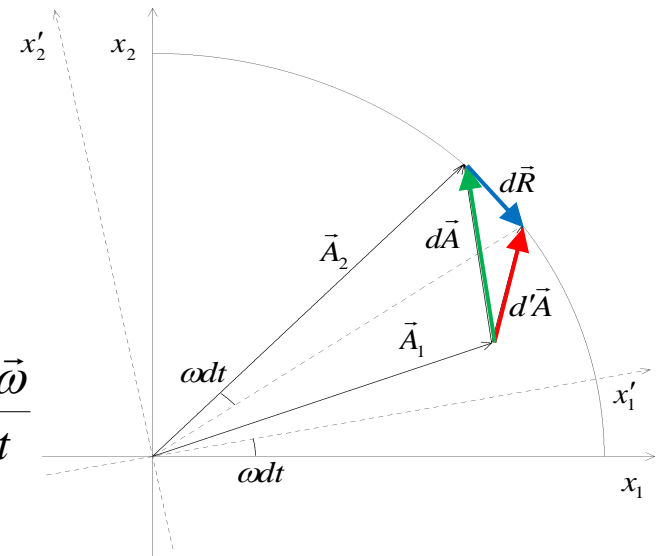
aplikujeme na různé vektory:

$$A = \vec{\omega}: \quad \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d'\vec{\omega}}{dt} + \underbrace{\vec{\omega} \times \vec{\omega}}_0 \quad \rightarrow \quad \vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d'\vec{\omega}}{dt}$$

$$A = \vec{r}: \quad \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d'\vec{r}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{r} \quad \rightarrow \quad \vec{v} = \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$\vec{a} = \frac{d'}{dt}(\vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}) + \vec{\omega} \times (\vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}) =$$

$$A = \vec{v}: \quad \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d'\vec{v}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{v} \quad \rightarrow \quad = \frac{d'\vec{v}'}{dt} + \left( \underbrace{\frac{d'\vec{\omega}}{dt}}_{\vec{\varepsilon}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d'\vec{r}}{dt} \right) + \vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$





# Zrychlení v rotující vztažené soustavě

získali jsme vztah pro zrychlení

$$\vec{a} = \underbrace{\frac{d'\vec{v}'}{dt}}_{\vec{a}'} + \left( \underbrace{\frac{d'\vec{\omega}}{dt}}_{\vec{\varepsilon}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt}}_{\vec{v}'} \right) + \vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

přehledněji

$$\vec{a} = \vec{a}' + \underbrace{\vec{\varepsilon} \times \vec{r} + 2\vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})}_{\vec{a}_u}$$

vyjádříme všechny veličiny na pravé straně v rotující soustavě:

- $\vec{r}' = \vec{r}$  (vyjádření téhož vektoru v různých bázích)
- vektory  $\vec{\omega}$  a  $\vec{\varepsilon}$  leží ve směru společné osy  $\Rightarrow \vec{\omega}$  a  $\vec{\varepsilon}$  jsou společné pro obě soustavy

unášivé zrychlení

$$\vec{a}_u = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}' + 2\vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$$

# Setrvačné síly v rotující vztažné soustavě

- transformace rychlosti musí zohlednit otáčení neinerciální soustavy  $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}'$ ; druhý člen vychází z časové derivace báze rotující soustavy
- podobně ve výrazu pro zrychlení  $\vec{a} = \vec{a}' + \vec{\varepsilon} \times \vec{r}' + 2\vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$  přibýly členy, které obsahují derivace této báze
- unášivé zrychlení má tvar  $\vec{a}_u = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}' + 2\vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$
- celková setrvačná síla je  $\vec{F}_s = -m(\vec{\varepsilon} \times \vec{r}' + 2\vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}'))$
- síla  $\vec{F}_\varepsilon = -m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' = -m\vec{\varepsilon} \times \vec{r}'$  souvisí s úhlovým zrychlením  $\vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega}}$  otáčivého pohybu neinerciální soustavy
- **odstředivá síla**  $\vec{F}_{OD} = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$  působí v rotující soustavě jak na pohybující se tak i na nehybný hmotný bod, který neleží na ose otáčení; odstředivá síla působí kolmo k ose otáčení
- **Coriolisova síla**  $\vec{F}_C = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}'$  působí v rotující soustavě na hmotný bod, jehož rychlost  $\vec{v}'$  není rovnoběžná s osou rotace

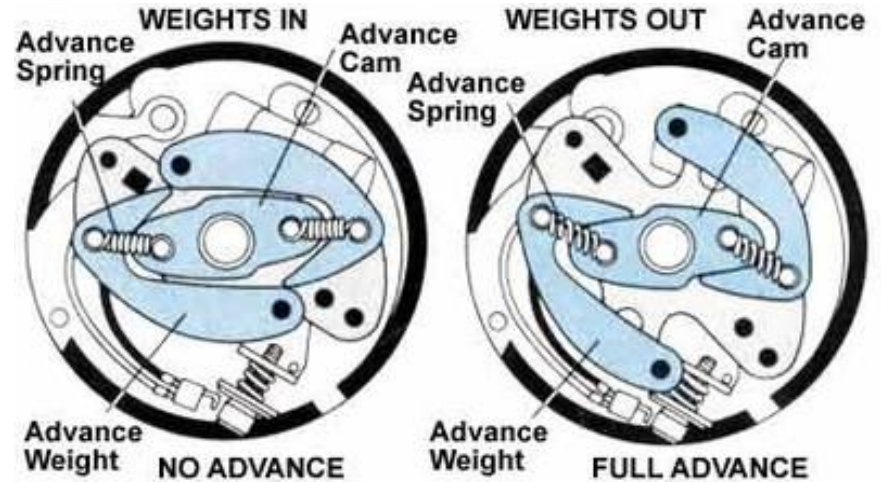
# Působení odstředivé síly

---

- **setrvačná síla** – projevuje se v neinerciální (rotující) soustavě
- nesměšovat se silou dostředivou (souhrnně označuje skutečné síly, které v inerciální soustavě způsobí pohyb tělesa po zakřivené dráze)
- napíná řetěz z hlediska pozorovatele na kolotoči
- drží satelit proti gravitační síle z hlediska pozorovatele v n.s.s. spojené se satelitem
- drží Zemi, aby nespadla do Slunce jeho gravitační přitažlivostí, z hlediska pozorovatele v n.s.s. spjaté se Zemí
- 2001: Vesmírná odyssea
  - imitace gravitace otáčením lodi
  - při poloměru 10 m je nutná úhlová rychlost  $1\text{s}^{-1}$ , tj. otočení za cca 6.28 s

# Odstředivý regulátor

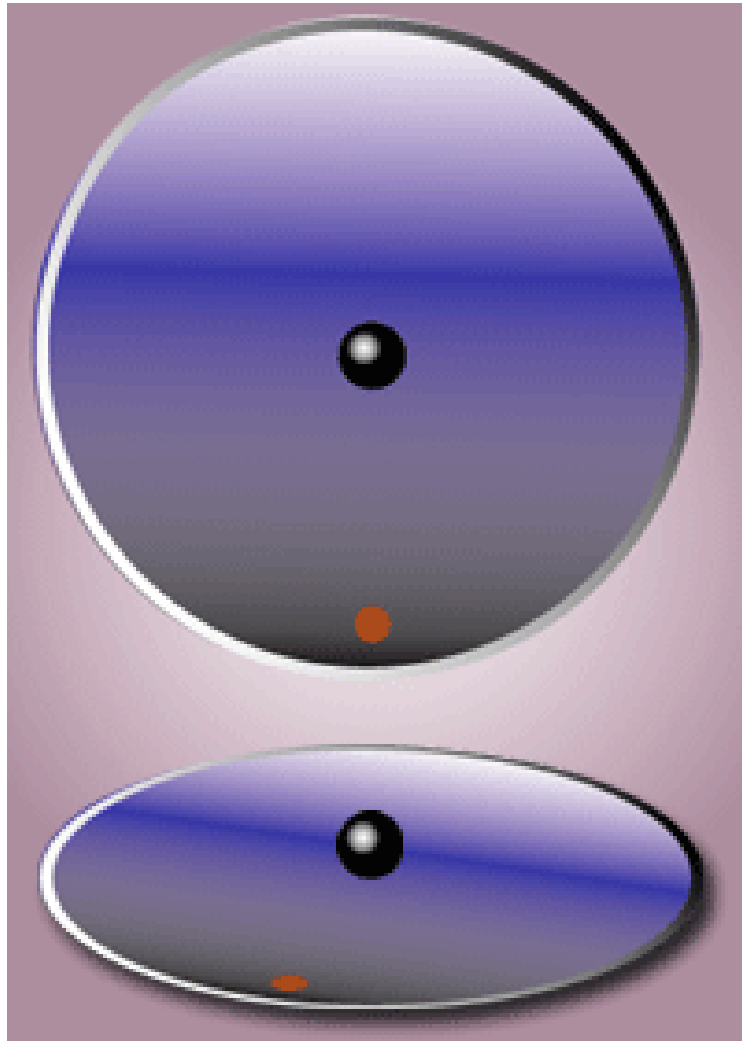
- parní stroj
- regulace předstihu v rozdělovači benzínového motoru



[http://en.wikipedia.org/wiki/Centrifugal\\_governor](http://en.wikipedia.org/wiki/Centrifugal_governor)  
Boulton & Watt engine of 1788 , Science Museum London  
(foto Dr. Mirko Junge)

<http://cr4.globalspec.com/thread/73663/Spark-ignition-timing>

# Působení Coriolisovy síly



červená tečka – neinerciální pozorovatel

horní obrázek – z hlediska inerciálního pozorovatele:

- kotouč se otáčí
- kulička se pohybuje po přímé dráze

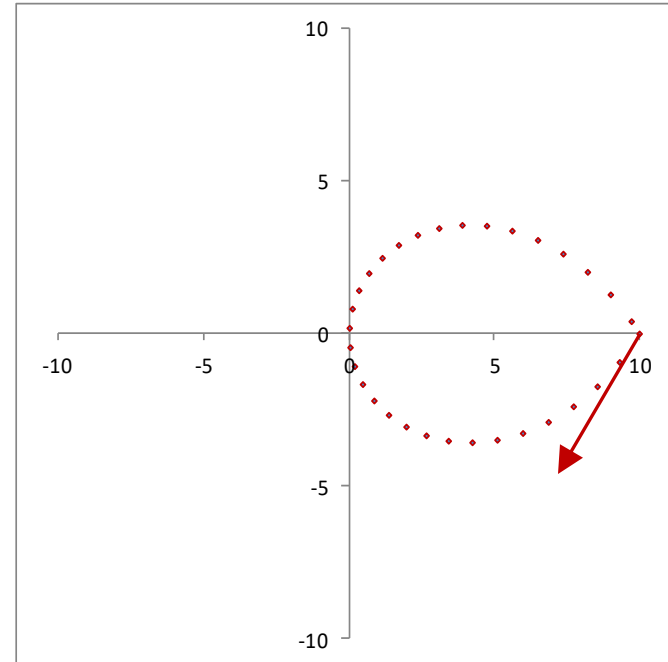
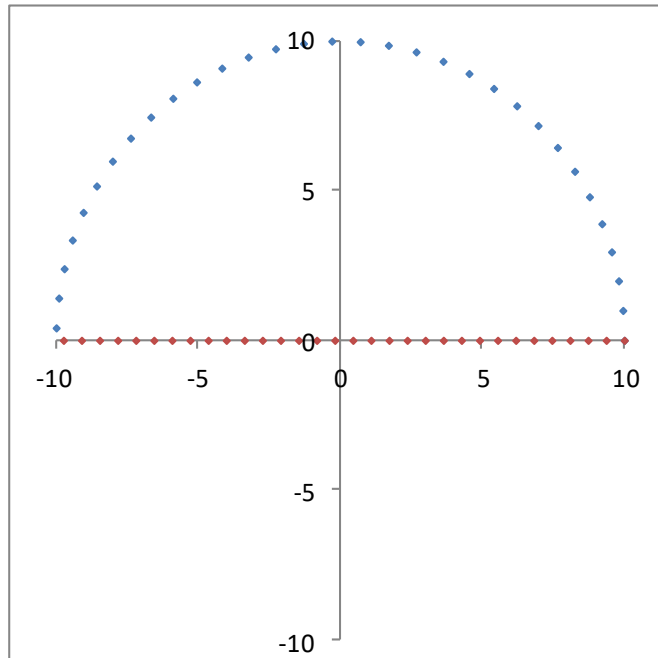
dolní obrázek – z hlediska neinerciálního pozorovatele:

- kotouč stojí
- kulička se pohybuje po zakřivené dráze

# Působení Coriolisovy síly

2001: Vesmírná odyssea

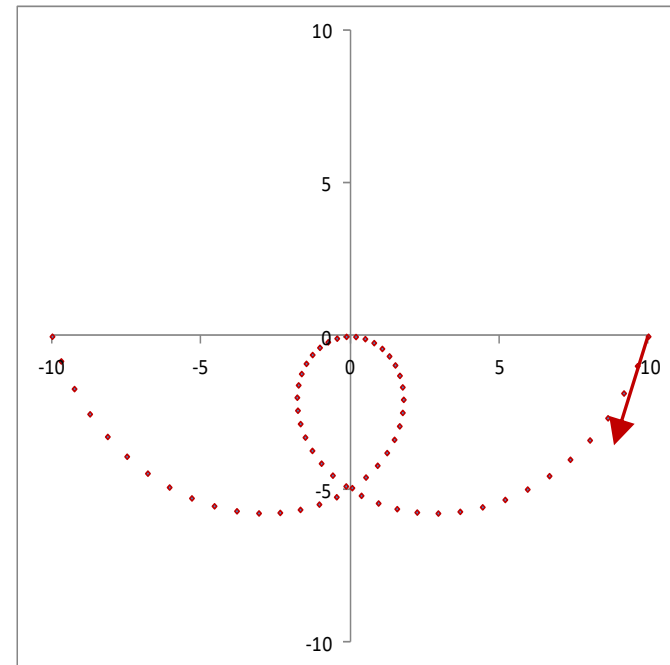
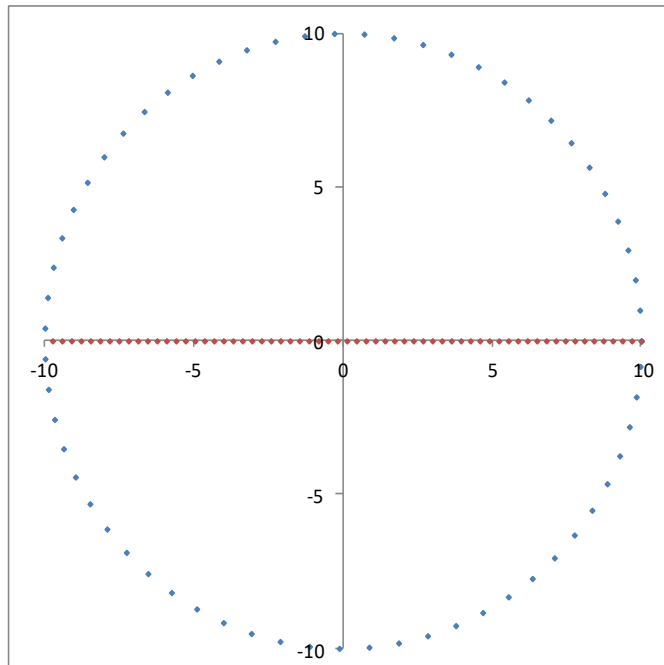
- předmět vyvrstěn napříč válcem rychlostí  $20/3.14 \text{ m/s} = 6.36 \text{ m/s}$
- i.s.s.: proletí po přímé trajektorii napříč průměrem za dobu půlotáčky
- n.s.s.: komplikovaná trajektorie díky působení Coriolisovy síly



# Působení Coriolisovy síly

2001: Vesmírná odyssea

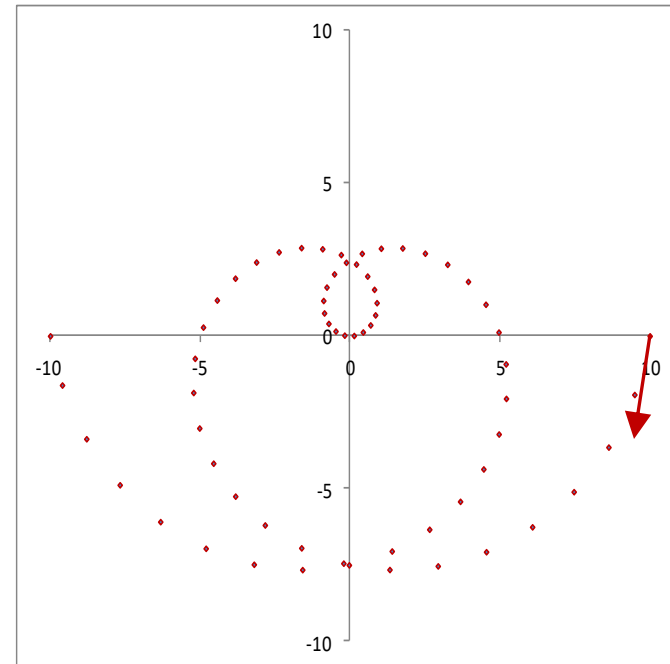
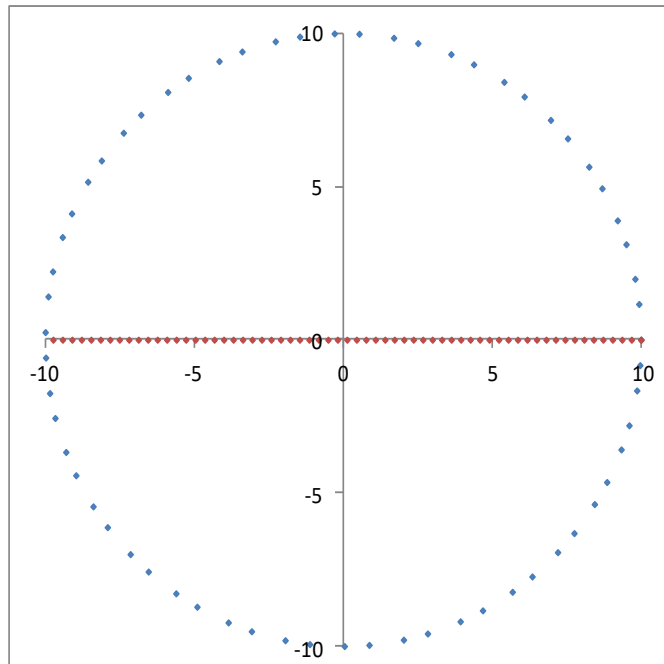
- předmět vyvrstěn napříč válcem rychlostí  $20/6.28 \text{ m/s} = 3.18 \text{ m/s}$
- i.s.s.: proletí po přímé trajektorii napříč průměrem za dobu jedné otáčky
- n.s.s.: komplikovaná trajektorie díky působení Coriolisovy síly



# Působení Coriolisovy síly

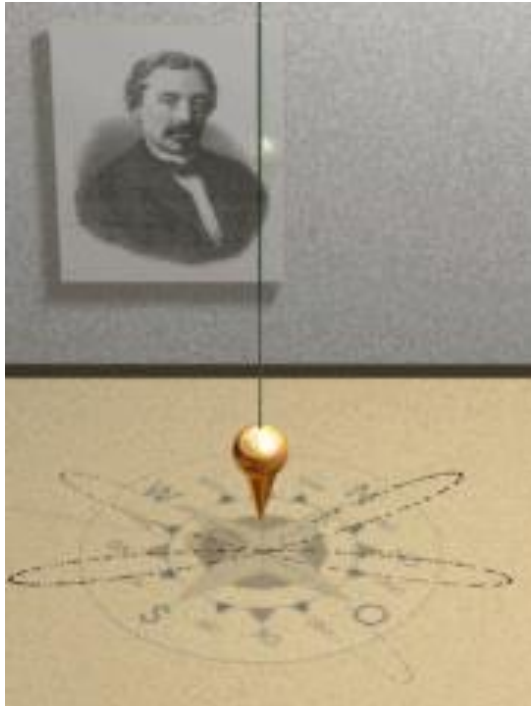
2001: Vesmírná odyssea

- předmět vyvrstěn napříč válcem rychlostí  $20/(2 \times 6.28) \text{ m/s} = 1.59 \text{ m/s}$
- i.s.s.: proletí po přímé trajektorii napříč průměrem za dobu dvou otáček
- n.s.s.: komplikovaná trajektorie díky působení Coriolisovy síly

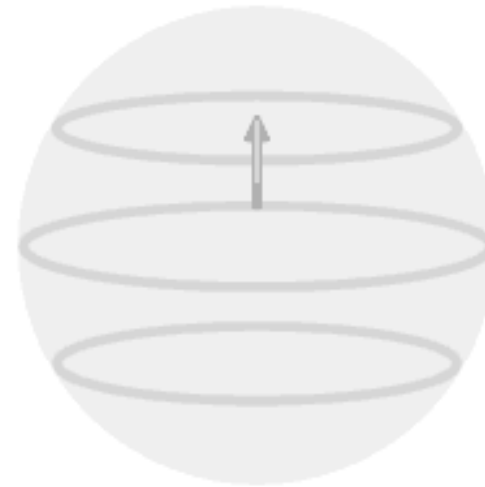




# Foucaultovo kyvadlo

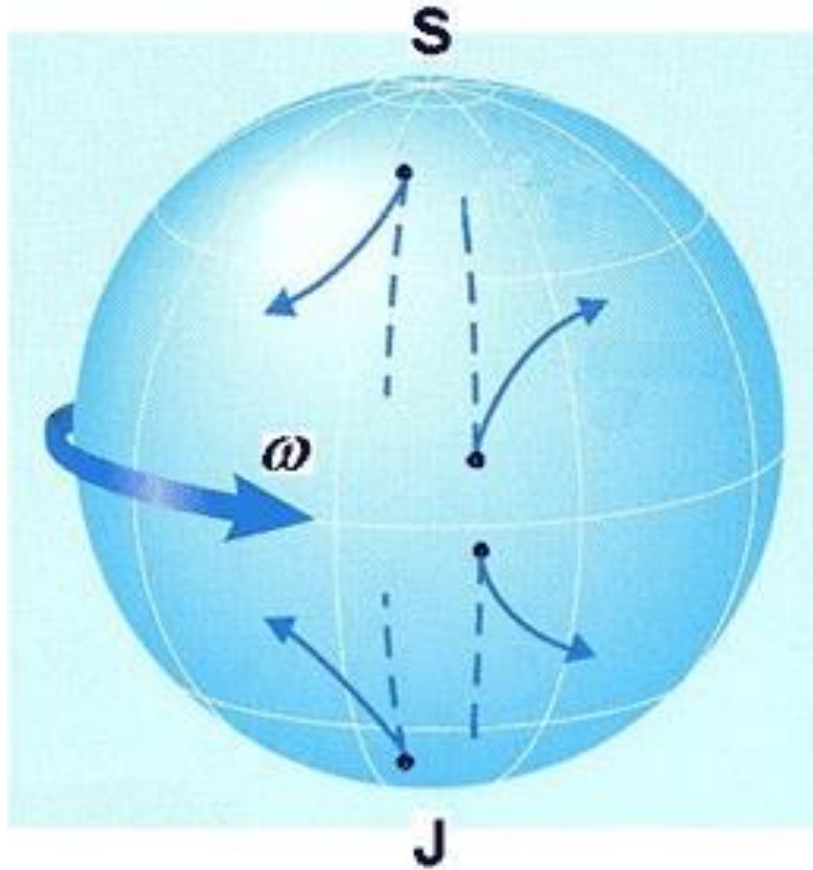


zobrazená rychlost stáčení  
odpovídá době rotace n.s.s.  
přibližně 30 sekund



rovina kyvu se na zeměpisné šířce  $\varphi$   
vzhledem k Zemi stáčí o úhel  $2\pi \sin \varphi$   
za 1 den; na  $30^\circ$  severní šířky (na  
obrázku) to dělá půl otáčky denně

# Působení Coriolisovy síly – příklady



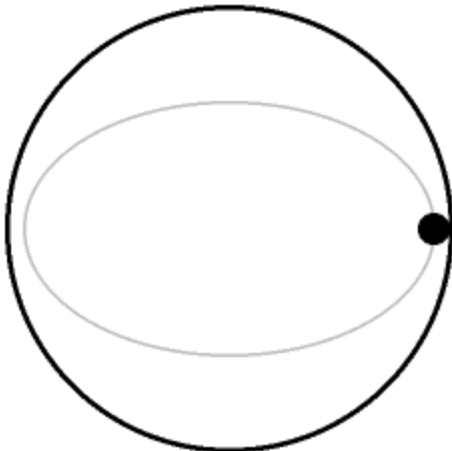
- atmosférické cyklóny
- koleje
- vodní toky
  
- hydrodynamické stroje
  - turbíny
  - kompresory
  
- vír ve výlevce?

# Působení Coriolisovy síly – model

---

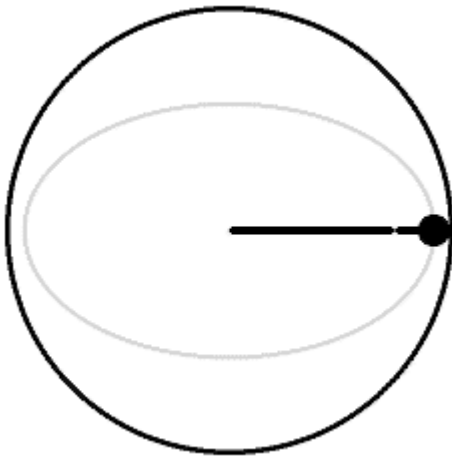


Pohyb v parabolickém potenciálu – eliminuje odstředivou sílu při vhodné rychlosti rotace a umožní odděleně působení Coriolisovy síly.



Při vhodné zvolené rychlosti otáčení se kulička pohybuje po uzavřené eliptické dráze.

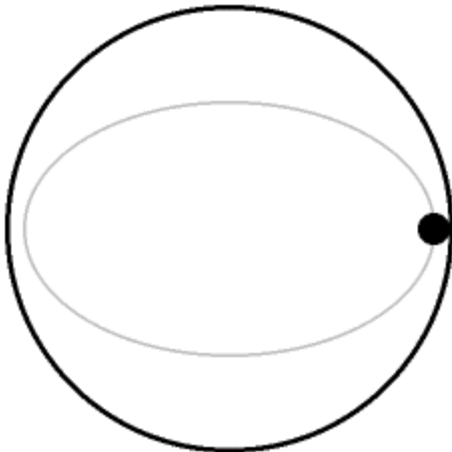
# Působení Coriolisovy síly – model



Pozorovatel v i.s.s. ví, že dostředivá síla je výslednicí reakce podložky a tíhové síly.

V ustáleném stavu „v klidu“ kulička rotuje (díky tření) spolu s kotoučem ve vzdálenosti určené rychlostí otáčení – mezní případ elipsy.

Častěji ale kulička harmonicky kmitá v obou směrech kolem rotující rovnovážné polohy – právě díky parabolickému průběhu potenciálu. Jde tedy o složení dvou pohybů.

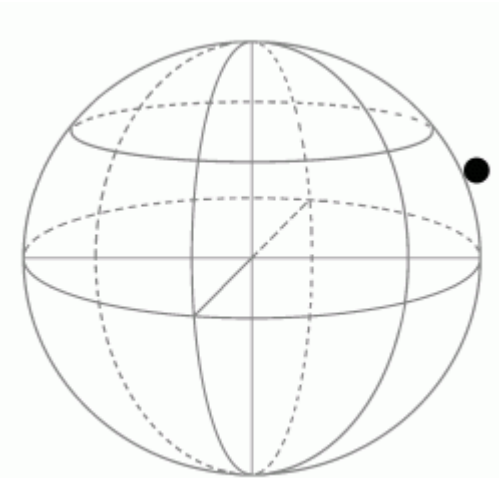


Kamera na okraji rotující misky (pozorovatel v n.s.s.) zaznamená jinou trajektorii – kulička se pohybuje jen v malé boční oblasti misky. To lze vysvětlit jen pomocí setrvačné Coriolisovy síly.

# Působení Coriolisovy síly v atmosféře



Rotace cyklón v atmosféře vypadá z hlediska laboratorní n.s.s. také podivně



Obrázek ukazuje trajektorii balónu obíhajícího cyklónu pozorovanou z i.s.s.

Vidíme, že jde opět o ustálené kmity, jejichž perioda je sladěna s otáčením Země.

# Praktické realizace inerciální vztažné soustavy

---

## Galileova soustava

- počátek v hmotném středu sluneční soustavy
- osy směřují k definovaným stálicím (stálice ve vzdálenosti  $\cong 10^{16}$  m nahrazují s vysokou přesností volné hmotné body)
- lze pokládat za inerciální v.s.

## „rotující soustava s počátkem ve Slunci“

- počátek ve středu Slunce
- jedna osa směřuje do středu Země
- druhá osa leží v rovině oběžné dráhy Země kolem Slunce
- otáčí se vůči Galileově - neinerciální
- odstředivé zrychlení v oblasti oběžné dráhy Země

$$a_{s2} = \omega^2 r = \left( \frac{2\pi}{365 \times 24 \times 60 \times 60s} \right)^2 \times 150 \times 10^9 m = 0.006 ms^{-2} \approx \frac{g}{1600}$$

- ve většině případů lze také pokládat za inerciální v.s.

# Praktické realizace inerciální vztažné soustavy

---

## „rotující soustava s počátkem v Zemi“

- počátek ve středu Země
- jedna osa směřuje do středu Slunce
- druhá osa leží v rovině oběžné dráhy Země kolem Slunce
- platí přibližně totéž co v předchozím případě
- zatímco Slunce se pohybuje rovnoměrně přímočaře, Země se pohybuje po vlnovce

## laboratorní soustava pevně spojená se Zemí

- odstředivé zrychlení na rovníku vyvolané rotací Země kolem osy

$$a_{s1} = \omega^2 r = \left( \frac{2\pi}{24 \times 60 \times 60s} \right)^2 \times 6378 \times 10^3 m = 0.034 ms^{-2} \approx \frac{g}{300}$$

- přesněji bychom měli použít dobu trvání hvězdného dne, tj. 86164 s
- v běžných případech lze pokládat za inerciální