Zkoušková písemka z Matematické analýzy 1, ZS 2021-22

Písemka číslo 3, verze 1.2.2022

(1) Spočtěte limitu (pokud existuje) posloupnosti $\{a_n\}$ zadané jako

$$a_n = \frac{\sqrt[3]{7n^3 + 9n^2 + n} - \sqrt[3]{n^3 + n}}{\sqrt[n]{(3n)^n + n! - 10n^4}}, \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

(2) Spočtěte jednostranné derivace a derivace funkce f ve všech bodech, kde existují, pokud

$$f(x) = \begin{cases} (\cos x) \cdot \operatorname{arccotg}(\operatorname{tg} x), & x \notin \{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\}, \\ 0, & x \in \{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\}\,. \end{cases}$$

(3) Uvažujme reálnou funkci f danou jako

$$f(x) = \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^3 - 1}}\,.$$

- Nalezněte definiční obor funkce f.
- Spočtěte limity v krajních bodech definičního oboru f.
- Spočtěte derivaci f na $(1, \infty)$.
- Dokažte, že f nabývá na $(1, \infty)$ svého minima.
- Zjistěte, zdali existuje okolí ∞, kde je f konvexní.
- Nalezněte asymptotu f v ∞, existuje-li.

(4) Nechť $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňuje $\lim_{x\to c} f(x) = 0$ pro každé $c \in \mathbb{R}$. Rozhodněte, zda platí některé z následujících tvrzení:
(a) Platí $f(\mathbb{R}) = \{0\}$.
(b) Funkce f je spojitá na $\mathbb{R}$.
(c) Funkce f je omezená na $\mathbb{R}$.
(d) Funkce f je omezená na každém omezeném intervalu v $\mathbb{R}$.

III. 1.

$a_n = \frac{b_n}{c_n}$, kde $b_n = \sqrt[3]{7n^3+9n^2+n} - \sqrt[3]{n^3+n} =$

$$= \frac{7n^3+9n^2+n-n^3-n}{(7n^3+9n^2+n)^{2/3} + \left((7n^3+9n^2+n)(n^3+n)\right)^{1/3} + (n^3+n)^{2/3}} =$$

$$= \frac{n^3\left(6+\frac{9}{n}\right)}{n^2\left[\left(7+\frac{9}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^{2/3} + \left(\left(7+\frac{9}{n}+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\right)^{1/3} + \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{2/3}\right]} =$$

$= n\,\frac{e_n}{f_n}$, kde $e_n \to 6$, $f_n \to 7^{2/3}+7^{1/3}+1$

$$c_n = \sqrt[n]{(3n)^n + n! - 10n^4} = (3n)\underbrace{\sqrt[n]{1+\frac{n!}{(3n)^n}-\frac{10n^4}{(3n)^n}}}_{g_n \to 1}$$

Tedy pro velká n platí: $3n\sqrt[n]{\frac{1}{2}} \le c_n \le 3n\sqrt[n]{2}$

Proto $n\frac{e_n}{f_n}\cdot\frac{1}{3n\sqrt[n]{2}} \le a_n \le n\frac{e_n}{f_n}\cdot\frac{1}{3n\sqrt[n]{\frac{1}{2}}}$

$$\searrow \quad \frac{6}{(7^{2/3}+7^{1/3}+1)\cdot 3} \quad \swarrow$$

Tedy $a_n \to \frac{2}{7^{2/3}+7^{1/3}+1}$

Bodování:

- b_n ... úprava .... +4
  vytknutí správných členů ... +3
- c_n ... odhady shora a zdola ... +3
- a_n ... montáž dohromady ... +2
- závěr .... +2

III. 2

$$f(x) = \begin{cases} (\cos x)\, \operatorname{arccotg}(\operatorname{tg} x), & \dots\ x \notin \{\frac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\} \\ 0 & \dots\ x \in \{\frac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\} \end{cases}$$

Pak $\lim_{x \to \frac{\pi}{2} + k\pi} f(x) = 0$ (nulová · omezená), tedy f spojitá na $\mathbb{R}$.

· $f'(x) = (-\sin x)\, \operatorname{arccotg}(\operatorname{tg} x) + \cos x \dfrac{-1}{1+\operatorname{tg}^2 x} \cdot \dfrac{1}{\cos^2 x} =$

$= \text{—} \ // \text{—} \ \dfrac{\cos x}{\cos^2 x \left(1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\right)} =$

$= \text{—} \ // \text{—} \ - \cos x, \quad x \notin \{\frac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$

· $f'_-(\frac{\pi}{2} + k\pi) = \lim_{x \to (\frac{\pi}{2} + k\pi)_-} f'(x) = (-1)\cdot(0) - 0 = 0$, k sudé

· $f'_+(\frac{\pi}{2} + k\pi) = \lim_{x \to (\frac{\pi}{2} + k\pi)_+} f'(x) = (-1)\,\pi - 0 = -\pi$, k sudé

· $f'_-(\frac{\pi}{2} + k\pi) = \lim_{x \to (\frac{\pi}{2} + k\pi)_-} f'(x) = (1) \cdot 0 - 0 = 0$, k liché

· $f'_+(\frac{\pi}{2} + k\pi) = \lim_{x \to (\frac{\pi}{2} + k\pi)_+} f'(x) = 1 \cdot \pi - 0 = \pi$, k liché

Bodování:
- spojitost ... +2
- f' mimo body ... +4
- chování v bodech ... +8

III.3

$$f(x) = \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^3-1}}$$

a) $D(f) = \mathbb{R} - \{1\}$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2}{x\sqrt[3]{1-\frac{2}{x^3}}} = \infty \qquad \lim\limits_{x\to 1_+} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to 1_-} f(x) = -\infty \qquad \lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$

c) $f'(x) = \left(x^2(x^3-1)^{-1/3}\right)' = 2x(x^3-1)^{-1/3} + x^2\left(-\frac{1}{3}\right)(x^3-1)^{-4/3}3x^2 =$

$= (x^3-1)^{-4/3}\left[2x(x^3-1) - x^4\right] = (x^3-1)^{-4/3}\left[x^4 - 2x\right] =$

$= (x^3-1)^{-4/3}\, x\,(x^3-2)\ , \ x \in (1,\infty)$

Tedy f': <0 na $(1, \sqrt[3]{2})$, >0 na $(\sqrt[3]{2}, \infty)$, proto f klesá na $(1, \sqrt[3]{2}]$, f roste na $[\sqrt[3]{2}, \infty)$

Tedy v $\sqrt[3]{2}$ nabývá f svého minima na $(1,\infty)$

d) $f''(x) = \left((x^3-1)^{-4/3}(x^4-2x)\right)' = \left(-\frac{4}{3}\right)(x^3-1)^{-\frac{7}{3}}3x^2(x^4-2x) +$

$+ (x^3-1)^{-4/3}(4x^3-2) =$

$= (x^3-1)^{-\frac{7}{3}}\left[-4\cdot x^2(x^4-2x) + (x^3-1)(4x^3-2)\right] =$

$= (x^3-1)^{-7/3}\left[-4x^6 + 8x^3 + 4x^6 - 2x^3 - 4x^3 + 2\right]$

$= (x^3-1)^{-7/3}\left[2x^3+2\right]\ , \ x \in (1,\infty)$

Tedy $f'' > 0$ na $(1,\infty)$ dostáváme f konvexní na $(1,\infty)$

e) $\cdot \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt[3]{x^3-1}} = \lim \frac{x}{x\sqrt[3]{1-\frac{2}{x^3}}} = 1$

$\cdot\ f(x) - x = \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^3-1}} - x = \frac{1}{(x^3-1)^{1/3}}\left(x^2 - x\sqrt[3]{x^3-1}\right) =$

$$= \frac{x^2 - x^2 \sqrt[3]{1-\frac{2}{x^3}}}{x \sqrt[3]{1-\frac{2}{x^3}}} = \frac{x\left(1-\sqrt[3]{1-\frac{2}{x^3}}\right)}{\sqrt[3]{1-\frac{2}{x^3}}} = \frac{x}{\sqrt[3]{1-\frac{2}{x^3}}} \cdot \frac{1}{x^3} \cdot \frac{1}{1+\left(1-\frac{2}{x^3}\right)^{1/3}+\left(1-\frac{2}{x^3}\right)^{2/3}} \to 0$$

Tečn. asymptota f: $y = 1 \cdot x + 0$

Bodování:

- $D(f)$ ... 1
- limity ... 2
- f' ... 4
- minima ... 3
- f'' ... 4
- konvexita ... 3
- asymptota ... 3

III. 4.

Ať $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňuje $\lim_{x \to c} f(x) = 0$, $c \in \mathbb{R}$.

a) Ne, neboť funkce $f(x) = \begin{cases} n & \dots x = n, n \in \mathbb{N} \\ 0 & \dots \text{jinak} \end{cases}$ to vyvrací.

b), c) Opět ne, viz a)

d) Ať $[a, b]$ je omezený interval a nechť f tam není omezená.

Indukcí najdeme $\{x_n\} \subset [a, b]$, že $|f(x_{n+1})| > \max\{n+1, |f(x_n)|\}$

Pak $\{x_n\}$ je prostá posloupnost a $|f(x_n)| \to \infty$.

Ať $x \in [a, b]$ splňuje $x = \lim_{k \to \infty} x_{n_k}$ pro vybranou $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$.

(Bolzano-Weierstrass). Pokud $x \in \{x_{n_k};\ k \in \mathbb{N}\}$, z prostoty $\{x_n\}$

existuje pouze jediné k_0, že $x = x_{n_{k_0}}$. Pak uvažujme $\{x_{n_k}\}_{k = k_0 + 1}^{\infty}$.

Pokud $x \notin \{x_{n_k};\ k \in \mathbb{N}\}$, necháme původní posloupnost $\{x_{n_k}\}$.

Pak máme:
- $x_{n_k} \xrightarrow[k \to \infty]{} x$
- $x_{n_k} \neq x$
- $|f(x_{n_k})| \to \infty$

} Heine ⇒ spor s $\lim_{z \to x} f(z) = 0$

Bodování:

a), b), c) } +6

d) … +6