Jméno:

1	2	3	4	$\sum$

Zkoušková písemka z Matematické analýzy I

10. 6. 2026

Čas: 90 minut.

- *Podepište všechny papíry, které chcete odevzdat. Nemusíte odevzdávat papíry s pomocnými výpočty.*
- *Můžete psát i na papír se zadáním. Papír se zadáním je nutno podepsat a odevzdat, i když jste na něj nic nenapsali.*
- *Během písemné části zkoušky nemůžete odcházet ze zkouškové místnosti. Můžete ovšem písemnou část ukončit před časovým limitem.*
- *Nejsou povoleny kalkulačky, hodinky či jiná elektronika, ani přinesené písemné materiály.*
- *Své odpovědi musíte zdůvodnit.*
- *Je-li výsledkem aritmetický výraz, jako třeba* $(x-5)^2 + 10x + \binom{6}{2} - 3$, *nemusíte ho zjednodušovat.*
- *Tvrzení z přednášky můžete používat bez důkazů, pokud není uvedeno jinak. Musíte však uvést, které tvrzení používáte.*

---

1. Definujme funkci $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ předpisem

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(2 - \frac{1}{x}\right) & \text{pro } x \neq 0 \\ 0 & \text{pro } x = 0, \end{cases}$$

kde $\exp(x)$ označuje exponenciální funkci, též značenou e^x.

(a) [3 b.] V kterých bodech $\mathbb{R}$ je funkce f spojitá? Pokud je v nějakém bodě nespojitá, je v tomto bodě aspoň spojitá zleva nebo zprava?

(b) [3 b.] Určete limity funkce f v $-\infty$ a v $+\infty$. Rozhodněte, zda má f nějaké lokální či globální extrémy, a pokud ano, určete typ extrému (zda minimum či maximum, zda globální či jen lokální).

(c) [4 b.] Najděte maximální otevřené intervaly, na nichž je f konvexní či konkávní, a pro každý nalezený interval určete, zda je tam f konvexní, nebo zda je tam konkávní.

2. (a) [3 b.] Nechť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel. Napište, jak je definován součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a co to znamená, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je *konvergentní.*

(b) [4 b.] Najděte příklad posloupnosti $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ takové, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je konvergentní, ale řada $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n b_n$ konvergentní není. Zdůvodněte, proč má vaše posloupnost požadované vlastnosti.

(c) [3 b.] Je řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+7}{n^2}$ konvergentní?

3. (a) [3 b.] Definujte, co to znamená, že funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ má v bodě A *ostré lokální maximum.*

(b) [3 b.] Zformulujte Lagrangeovu větu o střední hodnotě. Nemusíte ji dokazovat.

(c) [4 b.] Nechť $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je funkce spojitá na $\mathbb{R}$, která má v každém bodě derivaci. Nechť platí $f(0) = 0$ a nechť pro každé $x > 0$ platí $f'(x) \geq 2$. Dokažte, že pro každé $x > 0$ platí $f(x) \geq 2x$.

4. (a) [3 b.] Definujte horní a dolní Riemannovu sumu a horní a dolní Riemannův integrál. Napište, co to znamená, že funkce je riemannovsky integrovatelná.

(b) [7 b.] Zformulujte a dokažte větu o riemannovské integrovatelnosti monotónních funkcí. Pokud váš důkaz využívá nějaká další tvrzení z přednášky, tak je zformulujte, ale nemusíte je dokazovat.