Jméno:

1	2	3	4	$\sum$

Zkoušková písemka z Matematické analýzy I
15. 7. 2024

Čas: 90 minut.

- *Nezapomeňte podepsat všechny papíry, které chcete odevzdat. Nemusíte odevzdávat papíry s pomocnými výpočty.*
- *Můžete psát i na papír se zadáním. Papír se zadáním je nutno podepsat a odevzdat, i když jste na něj nic nenapsali.*
- *Není povoleno používat kalkulačky a jinou elektroniku ani přinesené písemné materiály.*
- *Své odpovědi musíte zdůvodnit.*
- *Tvrzení z přednášky můžete používat bez důkazů, pokud není uvedeno jinak, je však nutno uvést, které tvrzení používáte.*

1. Uvažujme funkci $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovanou předpisem $f(x) = x \cdot |x-3|^3$.
   (a) [3 b.] Má funkce f derivaci v bodě $x = 3$? Pokud ano, čemu se rovná? Pokud ne, má v tomto bodě aspoň jednostranné derivace?
   (b) [3 b.] Najděte body, v nichž f nabývá své extrémy, a určete jejich typ (tj. zda je extrém globální nebo jen lokální, zda je to maximum nebo minimum).
   (c) [4 b.] Najděte maximální intervaly, na nichž je funkce f konvexní, a maximální intervaly, na nichž je konkávní.

2. (a) [3 b.] Napište definici pojmu *hromadný bod* a pojmu *limes superior* posloupnosti čísel (a_n).
   (b) [4 b.] Rozhodněte, zda je pravdivé následující tvrzení:
   Jestliže $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je libovolná posloupnost reálných čísel a $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost definovaná vztahem $b_n = |a_n|$, pak platí
   $$\limsup_{n\to\infty} b_n = |\limsup_{n\to\infty} a_n|.$$
   (c) [3 b.] Spočítejte limitu posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ definované jako
   $$a_n = n^2 \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right).$$

3. (a) [3 b.] Napište, jak je definována *derivace* funkce f v bodě $A \in \mathbb{R}$.
   (b) [3 b.] Zformulujte Lagrangeovu větu o střední hodnotě. Nemusíte ji dokazovat.
   (c) [4 b.] Nechť f a g jsou dvě funkce, které obě mají v každém bodě $\mathbb{R}$ vlastní derivaci, a nechť pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $f'(x) < g'(x)$. Předpokládejme dále, že platí $f(0) = g(0)$. Dokažte, že pro každé $x > 0$ platí $f(x) < g(x)$. (Nápověda: zde vám může pomoci uvažovat funkci $g(x) - f(x)$.)

4. (a) [3 b.] Najděte příklad funkce $f\colon (0,1) \to \mathbb{R}$, která není na $(0,1)$ newtonovsky integrovatelná, ale funkce $|f(x)|$ na $(0,1)$ newtonovsky integrovatelná je.
   (b) [3 b.] Zformulujte pravidlo ‘per partes’ pro výpočet primitivní funkce. Nemusíte ho dokazovat.
   (c) [4 b.] Najděte primitivní funkci k funkci $f(x) = |x| \cdot e^x$ na $\mathbb{R}$. (Dejte pozor, aby vámi nalezená primitivní funkce opravdu fungovala na celém $\mathbb{R}$, tedy i v okolí bodu 0.)