MATEMATICKÁ ANALÝZA 2, LETNÍ SEMESTR 2024–2025
ZADÁNÍ PÍSEMNÉ ČÁSTI ZKOUŠKY - VARIANTA E

LUBOŠ PICK

Příklad E1. Vyšetřete konvergenci číselné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \arccos\left(\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n}\right)+1}\right)\cos(\pi n).$$

(10 bodů)

Příklad E2. Rozhodněte, zda funkce f definovaná předpisem

$$f(x)=\max\{e^{-x},\sqrt[3]{x},2\}$$

má primitivní funkci na $\mathbb{R}$, a pokud ano, spočtěte ji. **(10 bodů)**

Příklad E3. Vyšetřete konvergenci Newtonova integrálu

$$\int_0^1 \frac{(e^{1-x}-1)^{\alpha}\arccos x}{\sqrt{\arcsin x}}\,dx$$

v závislosti na hodnotě parametru $\alpha\in\mathbb{R}$. **(10 bodů)**

Příklad E4. Uvažujte funkci $F\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ definovanou předpisem

$$F(x,y)=(\log(1+2x^2+3y^2)(|x|+|y|),\operatorname{sign}(x-y)\sqrt{3x^2+2y^2})\quad \text{pro } [x,y]\in\mathbb{R}^2.$$

(a) Rozhodněte, zda existuje $F'(1,3)$ a pokud ano, spočtěte ji.
(b) Rozhodněte, zda existuje $F_1'(0,0)$ a pokud ano, spočtěte ji.
(c) Rozhodněte, zda existuje $\frac{\partial F_2}{\partial y}(0,0)$, a pokud ano, spočtěte ji. **(10 bodů)**

Příklad E5. Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou posloupnosti reálných čísel. Rozhodněte o platnosti následujících výroků. Řešení odůvodněte buď důkazem výroku, nebo protipříkladem na jeho platnost.

(a) Jestliže $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, potom $\sum_{n=1}^{\infty}\max\{a_n,b_n\}$ konverguje.
(b) Jestliže $\sum_{n=1}^{\infty}\max\{a_n,b_n\}$ konverguje, potom alespoň jedna z řad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje.

(10 bodů)

$\boxed{E1}$ $\quad \sum \arccos\left(\dfrac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n}\right)}{1+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n}\right)}\right)\cdot\cos(\pi n).$

Řešení. Pro každé $n\in\mathbb{N}$ platí $\cos(\pi n)=(-1)^n$.

Označme $\quad b_n = \dfrac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n}\right)}{1+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n}\right)}$ pro $n\in\mathbb{N}$. Potom

$$b_n = 1 - \frac{1}{1+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n}\right)}, \quad n\in\mathbb{N}.$$

Funkce tg je rostoucí na $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, a tedy je posloupnost $\{b_n\}$ rostoucí. Protože $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-}\operatorname{tg} x=\infty$, platí dle Heineovy věty a VOAL $\lim b_n = 1$, přičemž $b_n<1$ pro každé $n\in\mathbb{N}$. Položme

$$a_n = \arccos b_n, \quad n\in\mathbb{N}.$$

Potom $\{a_n\}$ je klesající posloupnost, neboť $\{b_n\}$ je rostoucí a funkce arccos je klesající na $[-1,1]$.

Dle Heineovy věty a VOLSF (P) platí $\lim a_n = 0$.

Dle Leibnizovy věty tedy řada $\sum(-1)^n a_n$ (což je zadaná řada) konverguje.

Hodnocení

$\lim a_n = 0$	...	4
$a_n \downarrow$	...	4
závěr	...	2

E2

~~D3~~ $f(x) = \max\{e^{-x}, \sqrt[3]{x}, 2\}$

<u>Řešení:</u> Označme

$g(x) = e^{-x}$, $h(x) = \sqrt[3]{x}$, $k(x) = 2$ pro $x \in \mathbb{R}$.

Funkce $g-k$ je klesající na $\mathbb{R}$ a platí

$$g(x) = k(x) \iff x = \log\tfrac{1}{2},$$

takže $g(x) \geq k(x)$ právě tehdy, když $x \in (-\infty, \log\tfrac{1}{2}]$.

Funkce $h-k$ je rostoucí na $\mathbb{R}$ a platí

$$h(x) = k(x) \iff x = 8,$$

takže $h(x) \geq k(x)$ právě tehdy, když $x \in [8, \infty)$.

Protože $\log\tfrac{1}{2} < 8$ (například proto, že $\log\tfrac{1}{2} < 0$ a $8 > 0$), plyne odtud, že

$$h(x) \leq k(x) \leq g(x) \quad \text{pro} \quad x \in (-\infty, \log\tfrac{1}{2}],$$
$$h(x) \leq k(x) \ \&\ g(x) \leq k(x) \quad \text{pro} \quad x \in [\log\tfrac{1}{2}, 8],$$
$$g(x) \leq k(x) \leq h(x) \quad \text{pro} \quad x \in [8, \infty).$$

Tedy

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \in (-\infty, \log\frac{1}{2}], \\ 2, & x \in [\log\frac{1}{2}, 8], \\ \sqrt[3]{x}, & x \in [8, \infty). \end{cases}$$

Protože funkce g, h, k jsou spojité na $\mathbb{R}$ a platí

$$\lim_{x \to \log\frac{1}{2}-} f(x) = \lim_{x \to \log\frac{1}{2}+} f(x) = 2,$$

$$\lim_{x \to 8-} f(x) = \lim_{x \to 8+} f(x) = 2,$$

je f spojitá na $\mathbb{R}$, a tedy má primitivní funkci na $\mathbb{R}$.

Dále jest

$$\int f(x)\,dx \overset{c}{=} \begin{cases} -e^{-x} & \text{na } (-\infty, \log\frac{1}{2}), \\ 2x & \text{na } (\log\frac{1}{2}, 8), \\ \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} & \text{na } (8, \infty). \end{cases}$$

Pro $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$, která určíme později, položme

$$F(x) = \begin{cases} -e^{-x} + C_1 & \text{pro } x \in (-\infty, \log\frac{1}{2}) \\ 2x + C_2 & \text{pro } x \in [\log\frac{1}{2}, 8] \\ \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + C_3 & \text{pro } x \in (2, \infty). \end{cases}$$

Položme $C_2 = 0$. Budeme hledat C_1 a C_3 tak, aby byla F spojitá na $\mathbb{R}$. Jest

$$\lim_{x \to \log\frac{1}{2}-} F(x) = -2 + C_1, \quad \lim_{x \to \log\frac{1}{2}+} F(x) = 2\log\frac{1}{2}.$$

Tedy $C_1 = 2(\log\frac{1}{2} + 1)$. Dále jest

$$\lim_{x \to 8-} F(x) = 16, \quad \lim_{x \to 8+} = 12 + C_3.$$

Tedy $C_3 = 4$. Dostáváme

$$F(x) = \begin{cases} -e^{-x} + 2\left(\log\frac{1}{2} + 1\right), & x \in \left(-\infty, \log\frac{1}{2}\right), \\ 2x, & x \in \left[\log\frac{1}{2}, 8\right], \\ \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + 4, & x \in (8, \infty). \end{cases}$$

Potom je $F'(x) = f(x)$ pro každé

$$x \in \left(-\infty, \log\frac{1}{2}\right) \cup \left(\log\frac{1}{2}, 8\right) \cup (8, \infty)$$

a F je spojitá v bodech $\log\frac{1}{2}$ a 8. Z věty o lepení tedy plyne, že $\int f(x)\,dx \stackrel{c}{=} F(x)$ pro $x \in \mathbb{R}$.

Hodnocení ~~...~~ E2

existence primitivní funkce na $\mathbb{R}$ ... 5

výpočet primitivní funkce na intervalech $\left(-\infty, \log\frac{1}{2}\right)$, $\left(\log\frac{1}{2}, 8\right)$ a $(8, \infty)$ ... 1

konstrukce primitivní funkce na $\mathbb{R}$ a výpočet konstant 5

lepení a závěr 1

| B3 | Vyšetřete konvergenci $\int_0^1 \underbrace{\frac{(e^{1-x}-1)^\alpha \arccos x}{\sqrt{\arcsin x}}}_{f(x)}\,dx$ pro $\alpha \in \mathbb{R}$. B3/4

Řešení

Konvergence $\int_0^{1/2} f$:

Položme $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$. Potom f, g jsou spojité a nezáporné na $(0, \frac{1}{2}]$, $\int_0^{1/2} g$ konverguje a $\lim_{x\to 0+} \frac{f(x)}{g(x)} = (e-1)^\alpha \cdot \frac{\pi}{2} \in (0,\infty)$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Tedy $\int_0^{1/2} f$ konverguje $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ dle LSK.

Konvergence $\int_{1/2}^1 f$: položme $g(x) = (1-x)^{\alpha+\frac{1}{2}}$. Potom f, g jsou spojité a nezáporné na $[\frac{1}{2}, 1)$, $\int_{1/2}^1 g$ konverguje $\iff \alpha + \frac{1}{2} > -1$, tedy $\alpha > -\frac{3}{2}$, a platí

$$\lim_{x\to 1-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 1-} \frac{1}{\sqrt{\arcsin x}} \cdot \left(\frac{e^{1-x}-1}{1-x}\right)^\alpha \cdot \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x}} =: L.$$

Protože $\lim_{x\to 1-} \frac{e^{1-x}-1}{1-x} \overset{l'H}{=} \lim_{x\to 1-} \frac{-e^{1-x}}{-1} = 1$ a

$$\lim_{x\to 1} \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x}} \overset{l'H}{=} \lim_{x\to 1-} \frac{\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}}{\frac{-1}{2\sqrt{1-x}}} = \lim_{x\to 1} \frac{2\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}} = \sqrt{2},$$

je $L = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \sqrt{2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \in (0,\infty)$. Tedy dle LSK $\int_{1/2}^1 f$ K $\iff \alpha > -\frac{3}{2}$

ZÁVĚR: Integrál konverguje $\iff \alpha > -\frac{3}{2}$ dle vlastnosti Newtonova integrálu, neboť f je spojitá v $\frac{1}{2}$. $\square$

HODNOCENÍ	
„0"	4
„1"	4
závěr	2

$\boxed{E4}$ $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$

$$F(x,y)=\left(\log\left(1+2x^2+3y^2\right)\left(|x|+|y|\right),\ \operatorname{sign}(x-y)\sqrt{3x^2+2y^2}\right)$$

(a) $F'(1,3)$,

(b) $F_1'(0,0)$,

(c) $\dfrac{\partial F_2}{\partial y}(0,0)$.

<u>Řešení</u>: (a) Pro $\delta\in(0,\sqrt{2})$ a $[x,y]\in B\left([1,3],\delta\right)$ platí

$$F(x,y)=\left(\log\left(1+2x^2+3y^2\right)(x+y),\ -\sqrt{3x^2+2y^2}\right).$$

Tedy $F\in C^1\left(B\left([1,3],\delta\right)\right)$, a tedy $\forall [x,y]\in B\left([1,3],\delta\right)$ platí

$$F'(x,y)=\begin{pmatrix} \dfrac{4x(x+y)}{1+2x^2+3y^2}+\log\left(1+2x^2+3y^2\right), & \dfrac{6y(x+y)}{1+2x^2+3y^2}+\log\left(1+2x^2+3y^2\right) \\ -\dfrac{3x}{\sqrt{3x^2+2y^2}} & \dfrac{-2y}{\sqrt{3x^2+2y^2}} \end{pmatrix},$$

takže

$$F'(1,3)=\begin{pmatrix} \dfrac{8}{15}+\log 30, & \dfrac{12}{5}+\log 30 \\ -\dfrac{3}{\sqrt{21}}, & -\dfrac{6}{\sqrt{21}} \end{pmatrix}.$$

(b) Jest $F_1(x,y)=\log\left(1+2x^2+3y^2\right)\left(|x|+|y|\right)$. Tedy

$$\frac{\partial F_1}{\partial x}(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{F_1(x,0)-F_1(0,0)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{|x|\cdot\log\left(1+2x^2\right)}{x}=0,$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{F_1(0,y) - F_1(0,0)}{y}$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{|y| \log(1+3y^2)}{y} = 0 .$$

Kandidátem na $F_1'(0,0)$ je tedy $(0,0)$. Jest

$$\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{|F_1(x,y) - F_1(0,0) - 0\cdot x - 0\cdot y|}{\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$= \lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{|\log(1+2x^2+3y^2)(|x|+|y|)|}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\leq \lim_{[x,y]\to[0,0]} \sqrt{2}\cdot |\log(1+2x^2+3y^2)| = 0,$$

takže $F_1'(0,0)$ existuje a platí $F_1'(0,0)=0$.

(c) Jest

$$\frac{\partial F_2}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{F_2(0,y) - F_2(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{\operatorname{sign}(-y)\sqrt{2y^2}}{y}$$

$$= \lim_{y\to 0} -\sqrt{2}\,\frac{|y|\cdot \operatorname{sign} y}{y} = -\sqrt{2} .$$

Hodnocení

(a) $F_2'(x,y)$ na okolí $[1,3]$ . . . 4

$F_2'(1,3)$ . . . 1

(b) $\nabla F_1(0,0)$ . . . 3

$F_1'(0,0)$ . . . 4

(c) $\dfrac{\partial F_2}{\partial y}(0,0)$ . . . 3

$\boxed{E5}$ (a) $\sum a_n, \sum b_n$ K $\Rightarrow$ $\sum \max\{a_n, b_n\}$ K

(b) $\sum \max\{a_n, b_n\}$ K $\Rightarrow$ $\left(\sum a_n \text{ K} \vee \sum b_n \text{ K}\right)$

Řešení. (a) NEPLATÍ

Položme $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, $b_n = \frac{(-1)^n}{n}$, potom $\sum a_n, \sum b_n$ konvergují dle Leibnizovy věty. Platí $\max\{a_n, b_n\} = \frac{1}{n}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, a tedy $\sum \max\{a_n, b_n\}$ diverguje.

(b) NEPLATÍ

Položme $a_n = \begin{cases} 0 & \text{pro } n \text{ liché} \\ -\frac{2}{n} & \text{pro } n \text{ sudé} \end{cases}$

a

$$b_n = \begin{cases} -\frac{2}{n+1} & \text{pro } n \text{ liché} \\ 0 & \text{pro } n \text{ sudé.} \end{cases}$$

Potom $\max\{a_n, b_n\} = 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, a tedy $\sum \max\{a_n, b_n\}$ konverguje, ale $\sum a_n$ i $\sum b_n$ divergují!

Hodnocení (a) 4

(b) 6