

Jméno:

1	2	3	4	Σ

Zkouška z Kombinatoriky a grafů I — písemná část, 20. 1. 2025

Čas: 90 minut

- *Nezapomeňte podepsat všechny papíry, které chcete odevzdat.*
- *Můžete psát i na papír se zadáním. Papír se zadáním je nutno podepsat a odevzdat, i když jste na něj nic nenapsali.*
- *Během písemné části zkoušky nemůžete odcházet ze zkouškové místnosti. Můžete ovšem písemnou část ukončit před časovým limitem.*
- *Nejsou povoleny kalkulačky, hodinky či jiná elektronika, ani přinesené písemné materiály.*
- *Všechny odpovědi je nutno zdůvodnit, pokud není řečeno jinak.*
- *Číselné výsledky (např. typu $\binom{126}{18} \cdot 23! - 17^6$) není nutno dále upravovat a dopočítávat.*
- *Tvrzení z přednášky můžete používat bez důkazů, pokud není uvedeno jinak, nicméně je nutné uvést, které tvrzení používáte.*

-
1. Napište v uzavřeném tvaru (tj. bez použití nekonečných sum) vzorec pro vytvářející funkci posloupnosti $a_0, a_1, a_2, \dots$ definované pomocí vzorce $a_n = (-2)^n + 3n$. [5 bodů]
 2. Zformulujte a dokažte lemma o uších, charakterizující vrcholově 2-souvislé grafy. Definujte také, co je operace ‘přidání ucha’, která se v lemmatu zmiňuje. [10 bodů]
 3. Definujte pojem ‘systém různých reprezentantů’ v hypergrafu a zformulujte Hallovu větu ve verzi, která charakterizuje, kdy v hypergrafu existuje systém různých reprezentantů. Nemusíte tu větu dokazovat. Pro přirozené číslo $n \geq 2$ uvažme hypergraf H_n s množinou vrcholů $V_n = \{1, 2, 3, \dots, n\}$, jehož hyperhrany jsou právě všechny $(n-1)$ -prvkové podmnožiny V_n . Pro která $n \geq 2$ má hypergraf H_n systém různých reprezentantů? [5 bodů]
 4. Zformulujte a dokažte Cayleyho vzorec pro počet stromů. [10 bodů]