Zkouška z diskrétní matematiky

January 21, 2020

Definujte potenční množinu (konečné) množiny.
Potenční množina množiny M je množina všech podmnožin M.

Napište definici zobrazení z množiny X do množiny Y .
Zobrazení $f : X \to Y$ je relace $f \subseteq X \times Y$, pro kterou platí, že pro $\forall x \in X, \exists! y \in Y : xfy$. Zobrazení f prvku x také zapisujeme f(x).

Definujte prosté zobrazení z množiny X do množiny Y .
Prosté, neboli surjektivní zobrazení f je zobrazení pro které platí $x, y \in X, x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$.

Definujte zobrazení množiny X na množinu Y .
Zobrazení "na", neboli injektivní, je zobrazení, které pokrývá množinu Y, matematicky: $\forall y \in Y, \exists x \in X : f(x) = y$.

Popište co znamená termín bijekce.
Zobrazení, které je zároveň na (injektivní) a prosté (surjektivní).

Definujte relaci mezi množinami X a Y .
Relace je jakákoli podmnožina $R \subseteq X \times Y$

Definujte tranzitivní relaci na množině X.
Relace je tranzitivní, pokud pro každé x, y, z z relace platí: $xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$

Definujte složení relací.
Složení relací zapsáno $R_1 \circ R_2$ je relace, která obsahuje prvek (a, c) právě tehdy když $(a, b) \in R_1 \vee (b, c) \in R_2$

Definujte inverzní relaci.
Inverzní relace značená R^{-1} je relace, která pro všechny prvky $(a, b) \in R$ obsahuje prvek (b, a).

Definujte relaci ekvivalence.
Ekvivalence je relace, která je reflexivní (pro každé x platí xRx), tranzitivní (xRy, yRz implikuje xRz) a symetrická (xRy pak yRx).

Definujte třídu ekvivalence.
Třída ekvivalence značená $R[x]$ je neprázdná množina pro každý prvek x. Pro každé dva prvky x,y

z X platí buď $R[x] = R[y]$ nebo $R[x] \cap R[y] = \emptyset$. Sjednocením všech tříd získáme celou ekvivalenci.

Definujte částečné uspořádání na množině X.
Částečné uspořádání je relace, která je (pro každé x platí xRx), tranzitivní (xRy, yRz implikuje xRz) a antisymetrická (xRy pak y není v R s x).

Definujte největší a maximální prvek v částečném uspořádání.
Žádný prvek není $\succeq$ než maximální. Každý prvek musí být $\preceq$ než největší.
Definujte řetězec v částečném uspořádání.
Řetězec v částečném uspořádání je podmnožina prvků, které se mezi sebou dají každý s každým porovnat (je lineární).

Definujte nezávislou množinu v částečném uspořádání.
Nezávislá množina v částečném uspořádání je množina prvků, které spolu nejde porovnat.

Napište vzorec pro kombinační číslo $\binom{n}{k}$
$\frac{n!}{(n-k)!k!}$

Nadefinujte diskrétní pravděpodobnostní prostor (I).
Diskrétní pravděpodobnostní prostor je trojice $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, kde Ω je množina elementárních jevů, $\mathcal{F} \subseteq 2^{|\Omega|}$ množina těch podmožin, které připouštíme jako jevy a P je funkce $P : \mathcal{F} \to [0, 1]$ určuje jak pravděpodobný je daný jev. Musí platit $P[\Omega] = 1$ a $P[\emptyset] = 0$.

Nadefinujte podmíněnou pravděpodobnost (I).
Podmíněná pravděpodobnost jevu A pokud nastal jev B je $P[A|B] = \dfrac{P[A \cap B]}{P[B]}$.

Definujte nezávislé jevy (I).
Nezávislé jevy jsou jevy pro které platí $P[\bigcap_{i \in I} A_i] = \prod_{i \in I} P[A_i]$.

Definujte náhodnou veličinu (I).
Náhodná veličina je libovolná funkce $X : \Omega \to \mathbb{R}$. Například sinus padlých líců na deseti hodech mincí.

Definujte indikátor jevu (I).
Indikátor je náhodná veličina $I_A : \Omega \to \{0, 1\}$ zadefinovaná takto:

$$I_A = \begin{cases} 1 \text{ pokud } \omega \in A \\ 0 \text{ pokud } \omega \notin A \end{cases}$$

Definujte nezávislé náhodné veličiny (I).
Náhodné veličiny A a B jsou nezávislé, pokud platí $P[A]P[B] = P[A \cap B]$ nebo ekvivalentně pokud $P[A|B] = P[A] \vee P[B] = 0$ Obecně jevy $A_1, A_2 \dots A_n$ jsou nezávislé, pokud $P[\bigcap_{i=0}^{n} A_i] = \prod_{i=0}^{n} P[A_i]$

Definujte rozdělení náhodné veličiny (I).
Rozdělení náhodné veličiny X popisuje s jakou pravděpodobností nabývá X jednotlivých hodnot.

Většinou se definuje pomocí distribuční funkce $F(z) := P[\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq z\}]$. Například Bernoulliho, Poissonovo...

Definujte distribuční funkci náhodné veličiny (I).

Distribuční funkce náhodné veličiny X je $F(z) := P[\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq z\}]$

Nadefinujte střední hodnotu náhodné veličiny (I).

Střední hodnota $E[X]$ (Expected value) náhodné veličiny X je definována:

$$E[X] := \sum_{\omega \in \Omega} P[\{\omega\}]X(\omega)$$

Nadefinujte rozptyl náhodné veličiny (I).

Rozptyl náhodné veličiny X je definován: $\mathrm{Var}[X] = E[(X - E[X])^2]$ Veličiny s malým rozptylem se spíše drží kolem střední hodnoty, veličiny s velkým rozptylem se často hodně odchylují.

Definujte pojmy graf a úplný graf.

Graf je dvojice (V, E) kde V je množina vrcholů grafu a E je množina hran mezi těmito vrcholy. Každá hrana musí začínat a končit ve vrcholu z V. Pro úplný graf platí, že každý jeho vrchol je spojený s každým jiným hranou.

Definujte pojmy bipartitní graf a úplný bipartitní graf.

Bipartitní graf je obecně graf, který lze rozdělit do dvou disjunktních množin, ve kterých nejsou žádné dva vrcholy na stejné hraně. Alternativně jde o graf, který neobsahuje jako podgraf žádnou lichou kružnici.

Definujte podgraf.

Podgraf H grafu G je graf definovaný vztahy $V(H) \subseteq V(G) \wedge E(H) \subseteq E(G)$ (musíme znovu ověřit podmínku pro graf, jestli všechny hrany začínají a končí ve vrcholech z V(H)).

Definujte indukovaný podgraf.

Pro indukovaný podgraf H grafu G platí: $V(H) \subseteq V(G) \wedge E(H) = E(G) \cap \binom{V(H)}{2}$ - neboli jde o podgraf, který navíc obsahuje všechny hrany, které se týkají vrcholů z H(G).

Definujte stupeň vrcholu.

Stupeň vrcholu značený deg(v) je počet hran incidentích k vrcholu v.

Definujte doplněk grafu.

Doplňek G' grafu G je graf, pro jehož každé dva různé vrcholy platí $u, v \in E(G') \Leftrightarrow u, v \notin E(G)$.

Definujte pojem izomorfismu grafů.

Dva grafy jsou isomorfní, pokud existuje bijekce $f : V \to V', (x, y) \in E(V) \Leftrightarrow (f(x), f(y)) \in E(V')$

Definujte cestu v grafu a její délku.

Cesta v grafu G je podgraf G', který splňuje (n je délka cesty): $V(G') = \{1, 2, \ldots, n\}, E(G') =$

$\{\{i-1,i\}; i=1,2,\ldots,n\}$.

Napište definici souvislého grafu.

Souvislý graf je takový graf, pro jehož každé dva vrcholy platí, že mezi nimi existuje cesta.

Nadefinujte pojem 'komponenta souvislosti grafu'.

Komponenta souvislosti grafu je podgraf nesouvislého grafu, ve kterém platí podmínka pro souvislost (mezi každými dvěma vrcholy existuje cesta).

Definujte vzdálenost v souvislém grafu.

Vzdálenost dvou vrcholů v souvislém grafu je délka nejkratší cesty, která obsahuje oba tyto vrcholy.

Definujte pojem eulerovského grafu.

Graf je eulerovský právě když je souvislý a stupeň každého jeho vrcholu je sudý.

Napište definici stromu.

Strom je acyklický souvislý graf.

Definujte jednoduchou křivku (oblouk).

Jednoduchá křivka je obor hodnot prosté funkce $\gamma : \{\gamma(x); x \in [0,1]\}$. $\gamma(0)$ je počáteční bod oblouku a $\gamma(1)$ je koncový bod oblouku.

Definujte rovinné nakreslení grafu.

Rovinné nakreslení G je přiřazení různých bodů v rovině různým vrcholům G, spojené s přiřazením oblouků každé hraně z E(G) - aby bylo nakreslení rovinné, tak žádné dva oblouky nesmí sdílet jeden bod v rovině, jedině ten koncový.

Definujte rovinný graf.

Rovinný graf je takový graf, pro nějž existuje nějaké nakreslení v rovině.

Definujte stěny rovinného nakreslení grafu.

Stěna je množina všech bodů plochy, které se dají spojit obloukem.

Definujte duál k rovinnému nakreslení grafu.

Duál je bijekce která mapuje vrcholy rovinného nakreslení grafu na stěny, hrany mezi stěnami na hrany mezi vrcholy. Duál duálu je původní nakreslení.

Definujte obarvení grafu a chromatické číslo (barevnost) grafu.

Obarvení grafu je zobrazení $b : V \to \{1,2,\ldots,k\}$, které vrcholům grafu přiřazuje nějakou barvu tak, aby pro každou hranu $\{x,y\} \in E$ platilo $b(x) \neq b(y)$. Chromatické číslo je pak minimální počet barev pro obarvení grafu.

Zformulujte a dokažte binomickou větu.

Binomická věta: $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$. Důkaz můžeme provést indukcí, nebo slaběji pozorováním Pascalova trojúhelníku.

Zformulujte princip inkluze a exkluze a dokažte ho.
Pro každý soubor konečných množin $A_1, \dots, A_n$ platí:

$$|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{I \in \binom{\{1,\dots,n\}}{k}} |\bigcap_{i \in I} A_i|$$

Důkaz provedeme počítáním, tedy ověříme, že se každý prvek započítaný na levé straně rovnice (jde o sjednocení množin, takže každý prvek je skutečně nalevo započítán právě jednou) započítá právě jednou i na pravé straně. Tento prvek se nachází v průniku množin $\bigcap_{i=0}^{j} A_i$ kde $0 \leq j \leq n$, tedy je v každé z těchto j množin. Pokud z těchto množin uděláme průnik jakékoli k-tice, tak se v ní daný prvek bude nacházet - takových k-tic je $\binom{j}{k}$ a každá se započítá s alternujícím znaménkem díky $(-1)^{k-1}$. Vychází nám tedy $\binom{j}{1} - \binom{j}{2} \cdots + (-1)^{j-1}\binom{j}{j}$ což díky binomické větě pro x = -1 vyjde jako 1. $\square$

Zformulujte problém šatnářky a vyřešte ho.
Kolik existuje permutací na n bez pevného bodu?
Budeme postupovat tak, že spočítáme všechny špatné permutace (ty, které mají pevný bod) a odečteme od celkového počtu permutací $n!$. A_i označíme jako množinu všech permutací s pevným bodem v i. Očividně $|A_i| = (n-1)!$ a průnik těchto množin je také jasný: $(n-k)!$ (k pevných bodů, permutace na ostatních nepevných bodech). S těmito informacemi už můžeme dosadit do PIE:

$$|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} (n-k)!$$

Pomocí vzorečku pro n nad k upravíme:

$$|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{n!}{k!} = n! \left(-\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right)$$

Nyní jak jsme říkali odečteme od celkového počtu permutací a dostaneme:

$$n! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right)$$

Počet špatných permutací, takže ten stačí vydělit n! a dostaneme kýženou pravděpodobnost (která mimochodem konverguje k e^{-1}).

Zformulujte a dokažte větu o linearitě střední hodnoty (I).
Platí $E[\alpha X] = \alpha E[X]$ a $E[X+Y] = E[X] + E[Y]$. Důkaz přímo z definice a vlastnosti vytýkání před sumu.

Zformulujte a dokažte Markovovu nerovnost (I).
$P[X \geq tE[X]] < \frac{1}{t}$, aneb "Pravděpodobnost, že X bude násobně větší než E[X] je malá". Důkaz:

$$P[X \geq tE[X]] = \sum_{\omega \in \Omega : X(\omega) \geq tE[X]} P[\omega] \leq \sum_{\omega \in \Omega} P[\omega] \cdot \frac{X(\omega)}{t \cdot E(X)} = E(X) \cdot \frac{1}{t \cdot E(X)} = \frac{1}{t}$$

Zformulujte a dokažte Čebyševovu nerovnost (I).

Pro $\forall$ náhodnou veličinu $X \geq 0$ a pro každé reálné $t \geq 1$ platí:

$$P[|X - E[X]| \geq t\sqrt{\mathrm{Var}[X]}] \leq \frac{1}{t^2}$$

Aneb pokud máme více informací (konkrétně o rozptylu) tak můžeme udělat lepší odhad než Markovovou nerovností (pro důkaz jí využijeme): Uvažujme náhodnou veličinu $Y = (X - E[X])^2$ ta je zjevně nezáporná a její střední hodnota je $\mathrm{Var}[X]$. Dosazením do Markovova tedy dosteneme:

$$P[(X - E[X])^2 \geq t \; \mathrm{Var}[X]] \leq \frac{1}{t}$$

Z čehož se nějakym naprosto magickym způsobem do hajzlu stane ta nerovnost kterou chceme dokázat.

Zformulujte a dokažte větu charakterizující bipartitní grafy.

Bipartitní grafy jsou ty grafy, které neobsahují kružnici liché délky.
Graf neobsahuje kružnici liché délky $\Leftrightarrow$ Graf je 2-obarvitelný (= je bipartitní, z definice).

Zformulujte a dokažte větu charakterizující eulerovské grafy.

Graf je eulerovský, pokud je souvislý a stupeň každého jeho vrcholu je sudý.
Všechny stupně sudé $\Rightarrow$ v G je kružnice, označme ji T_0. Označme $G_1, \ldots, G_m$ všechny komponenty souvislosti grafu $G - T_0$ (Pozor, v tomto odečtení odečítáme pouze hrany). Náš eulerovský tah tedy půjde po kružnici T_0 a bude postupně odbočovat do $G_1, \ldots, G_m$. Indukcí můžeme takto postupovat i v každém $G_1, \ldots, G_m$, jelikož o těchto grafech platí, že jsou opět souvislé a mají všechny stupně sudé. Celý graf tedy můžeme projít jedním uzavřeným eulerovským tahem.

Zformulujte podmínky pro to, aby graf byl stromem a ukažte, že si jsou navzájem ekvivalentní.

T je strom. $\Leftrightarrow$ Mezi každými dvěma vrcholy T vede právě jedna cesta. $\Leftrightarrow$ T je maximální graf bez kružnic. $\Leftrightarrow$ T neobsahuje kružnici a má $|V(T)| - 1$ hran. $\Leftrightarrow$ T je souvislý a má $|V(T)| - 1$ hran.
Dokážeme $a \Rightarrow b \Rightarrow c \Rightarrow d \Rightarrow e \Rightarrow a$ a máme to - často budeme využívat indukci stromu, všechny důkazy budou snadné.

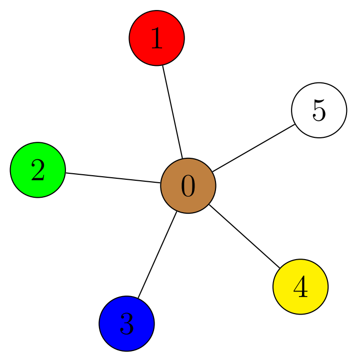
Uveďte Eulerovu formuli pro rovinné grafy a dokažte ji.

Pro souvislý multigraf G, každé nakreslení G platí: počet stěn = $|V(G)| - |E(G)| + 2$
Důkaz indukcí podle počtu hran libovolného nakreslení G:
První krok) G je minimální souvislý = strom, pak $|V(G)| = |E(G)| - 1,$ počet stěn $= 1$: $1 = |V(G)| - |V(G)| - 1 + 2$
Indukční krok) G obsahuje kružnici - tím pádem nějakou hranu e, která je na kružnici. V tom případě je G - e souvislý a rovinný. Odebrali jsme jednu hranu a jednu stěnu (z Jordanovy věty - kružnice rozděluje plochu na dvě stěny) a počet vrcholů zůstal stejný, z obou stran rovnice jsme tedy odečetli stejně, tudíž rovnost platí pro G - e i pro G.

Uveďte Eulerovu formuli včetně předpokladů a s její pomocí ukažte, že každý rovinný graf obsahuje alespoň jeden vrchol stupně nejvýše 5.

Pro každý rovinný graf s aspoň třemi vrcholy platí: $|E| \leq 3|V| - 6$. Zároveň $|V| = 2|E|$, stačí tedy dosadit a průměrovacím argumentem dojdeme k tomu, že v grafu je alespoň jeden vrchol stupně nejvýše 5.

Zformulujte a dokažte větu o pěti barvách.
Každý rovinný graf je 5-obarvitelný.
Z eulerovy formule plyne, že v každém rovinném grafu existuje alespoň jeden vrchol se stupněm max. 5. Každý rovinný graf na n vrcholech tedy můžeme zkonstruovat tak, že do prázdného grafu postupně vložíme n vrcholů stupně max. 5. Indukcí pokud budeme do 5-obarveného grafu přidávat vrchol stupně ≤ 4 pak je práce snadná - stačí mu přiřadit tu pátou barvu, kterou žádný z jeho čtyř sousedů nemá. Stačí nám tedy dokázat, že 5-obarvitelnost neporušíme ani když přidáváme vrchol stupně 5. Budeme usilovat o spor: Předpokládejme, že všech pět sousedů vrcholu v má jinou barvu (řekněme červenou, zelenou, modrou, žlutou a bílou).



V grafu tedy existuje například červenomodrý podgraf, jehož jsou vrcholy 1 a 3 součástí. Rozlišme dva případy:
1) Z 1 do 3 neexistuje jiná cesta než přes vrchol 0 - pak můžeme například komponentě souvislosti červenmodrého podgrafu, která obsahuje vrchol 1, prohodit barvy: b(červený vrchol) = modrá, b(modrý vrchol) = červená. Toto obarvení je také jistě v pořádku. V takovém případě jsme redukovali počet sousedních barev na 4 a vrchol 0 můžeme vesele nabarvit na červeno.
2) Červenomodrý podgraf je souvislý - existuje cesta z 1 do 3. Pak žádné snadné ušetření neuděláme, ale snadno si všimneme, že pak už nebude moct existovat cesta např. z 2 do 4, protože by musela protnout cestu z 1 do 3 (Jordanova věta - kružnice rozděluje rovinu na dvě disjunktní části) - docházíme tedy ke sporu, pět sousedů nemůže mít pět různých barev - existuje 5-obarvení.

Sepište přehledově, co víte o množinách, relacích a zobrazeních, jejich vlastnostech a operacích s nimi.
Sepište přehledově, co víte o částečných uspořádáních.
Sepište přehledově, co víte o kombinatorickém počítání a o binomických koeficientech.
Sepište přehledově, co víte o principu inkluze a exkluze.
Sepište přehledově, co víte o pravděpodobnostních prostorech (I).
Sepište přehledově, co víte o náhodných veličinách (I).
Sepište přehledově, co víte o rozděleních náhodných veličin (I).
Sepište přehledově, co víte o souvislosti grafů a vzdálenostech v grafu.
Sepište přehledově, co víte o grafech, jejich základních třídách a stupních vrcholů.
Sepište přehledově, co víte o eulerovských grafech.

Sepište přehledově, co víte o stromech.
Sepište přehledově, co víte o rovinných grafech.
Sepište přehledově, co víte o barvení grafů.