Jméno:

1	2	3	4	$\sum$

Zkoušková písemka z Matematické analýzy I
30. 5. 2024

Čas: 90 minut.

- *Nezapomeňte podepsat všechny papíry, které chcete odevzdat. Nemusíte odevzdávat papíry s pomocnými výpočty.*
- *Můžete psát i na papír se zadáním. Papír se zadáním je nutno podepsat a odevzdat, i když jste na něj nic nenapsali.*
- *Není povoleno používat kalkulačky a jinou elektroniku ani přinesené písemné materiály.*
- *Své odpovědi musíte zdůvodnit.*
- *Tvrzení z přednášky můžete používat bez důkazů, pokud není uvedeno jinak, je však nutno uvést, které tvrzení používáte.*

1. Uvažujme funkci $f(x)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovanou vzorečkem $f(x) = (x-1)^3(x+2)$.
   (a) [3 b.] Najděte všechny globální a lokální extrémy této funkce.
   (b) [3 b.] Najděte co největší otevřený interval I obsahující nulu, na němž je tato funkce rostoucí, případně ukažte, že takový interval neexistuje.
   (c) [4 b.] Najděte co největší hodnotu $A \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ takovou, že f je konvexní na intervalu $(-\infty, A)$, případně ukažte, že taková hodnota neexistuje.

2. (a) [3 b.] Definujte, co je to *hromadný bod* posloupnosti (a_n).
   (b) [4 b.] Označme $\mathcal{H}(a_n)$ množinu hromadných bodů posloupnosti (a_n). Nechť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ a $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ jsou dvě libovolné posloupnosti. Definujme posloupnost $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ předpisem

$$c_n = \begin{cases} a_{(n+1)/2} & \text{pro } n \text{ liché} \\ b_{n/2} & \text{pro } n \text{ sudé,} \end{cases}$$

   jinými slovy, máme $(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, \dots) = (a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, \dots)$. Plyne z této definice, že $\mathcal{H}(c_n)$ je podmnožina $\mathcal{H}(a_n) \cup \mathcal{H}(b_n)$? Plyne z ní, že $\mathcal{H}(a_n) \cup \mathcal{H}(b_n)$ je podmnožina $\mathcal{H}(c_n)$?
   (c) [3 b.] Definujme posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ předpisem $a_n = \exp(\frac{1}{n}) + (-1)^n$. Jaké jsou její hromadné body?

3. (a) [2 b.] Napište, jak je definován součet číselné řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, a co znamená, že řada je konvergentní.
   (b) [3 b.] Zformulujte integrální kritérium pro konvergenci řad. Nemusíte ho dokazovat.
   (c) [5 b.] Nechť α je reálná konstanta. Pro které hodnoty α je řada $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (\ln n)^{\alpha}}$ konvergentní?

4. (a) [3 b.] Definujte horní a dolní Riemannovu sumu a horní a dolní Riemannův integrál. Napište, co to znamená, že funkce je riemannovsky integrovatelná.
   (b) [7 b.] Zformulujte a dokažte větu o riemannovské integrovatelnosti monotónních funkcí.