Lineární algebra I (pro fyziky)

Aplikace determinantu

Dalibor Šmíd

MFF UK

Jednou z nejstarších aplikací determinantu je explicitní určení řešení soustavy lineárních rovnic, tzv. Cramerovo pravidlo:

Věta

Nechť $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ je regulární matice, $\mathbf{b} \in \mathbb{F}^n$. Označme $A_{i,\mathbf{b}}$ matici, která vznikne nahrazením i-tého sloupce A vektorem $\mathbf{b}$. Pak i-tá složka vektoru $\mathbf{x}$, který je jediným řešením soustavy rovnic $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, je rovna

$$x_i = \frac{\det A_{i,\mathbf{b}}}{\det A}$$

Jednoduchým příkladem užití Cramerova pravidla je

$$\begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & 8 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{4}{5}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & 8 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}} = -\frac{1}{5}$$

Důkaz.

Pro řešení SLR $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ platí $\sum_{j=1}^{n} x_j \mathbf{a}_j = \mathbf{b}$. Pak

$$\begin{aligned}\det A_{i,\mathbf{b}} &= \det(\mathbf{a}_1|\dots|\mathbf{a}_{i-1}|\sum_{j=1}^{n} x_j \mathbf{a}_j|\mathbf{a}_{i+1}|\dots|\mathbf{a}_n) \\ &= \sum_{j=1}^{n} x_j \det(\mathbf{a}_1|\dots|\mathbf{a}_{i-1}|\mathbf{a}_j|\mathbf{a}_{i+1}|\dots|\mathbf{a}_n) \\ &= x_i \det(\mathbf{a}_1|\dots|\mathbf{a}_{i-1}|\mathbf{a}_i|\mathbf{a}_{i+1}|\dots|\mathbf{a}_n) = x_i \det A\end{aligned}$$

Využili jsme linearitu v i-tém sloupci a fakt, že determinant matice se dvěma stejnými sloupci je roven 0. Je-li A regulární, pak $\det A \neq 0$, po vydělení $\det A$ dostáváme vyjádření x_i. $\square$

Cramerovo pravidlo se hodí zejména pro teoretické úvahy, případně pro výpočet konkrétní i-té složky řešení, která nás zajímá, jinak je Gaussova eliminace rychlejší.

Ve větě o Laplaceově rozvoji se vyskytly výrazy tvaru $(-1)^{i+j}\det(A_{ij})$, jimž se říká *algebraický doplněk prvku* a_{ij}. Matice, která má na pozici ij algebraický doplněk prvku a_{ji} (**pozor, indexy jsou obráceně!**) matice A, se nazývá *matice adjungovaná k* A a značí $\operatorname{adj}(A)$. Má jednoduchý vztah k matici inverzní:

VĚTA

Nechť $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ *je regulární. Pak* $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\operatorname{adj}(A)$.

DůKAZ.

Jediným řešením soustavy rovnic $A\mathbf{x} = \mathbf{e}_j$ je j-tý sloupec matice A^{-1}. Podle Cramerova pravidla má x_i, tedy element A^{-1} na pozici ij, hodnotu $\frac{1}{\det A}\det A_{i,\mathbf{e}_j}$. Rozvojem podle i-tého sloupce dostáváme, že $\det A_{i,\mathbf{e}_j}$ je roven

$$\det(\mathbf{a}_1|\dots|\mathbf{a}_{i-1}|\mathbf{e}_j|\mathbf{a}_{i+1}|\dots|\mathbf{a}_n) = (-1)^{j+i}\det A_{ji} = \operatorname{adj}(A)_{ij}$$

□

Příklady

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{adj}(A) = \begin{pmatrix} 3 & -8 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -8 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix},$$

což je po vyčíslení $\frac{1}{2} \left(\begin{smallmatrix} 0 & -2 & 10 \\ 1 & -2 & 7 \\ 0 & 2 & -8 \end{smallmatrix}\right)$. Pro větší matice než 3×3 se už vzorec nevyplatí, ale opět je užitečný pro teorii a pro získání konkrétního elementu inverzní matice bez nutnosti spočítat inverzní matici celou.

Je-li A regulární matice, existuje posloupnost elementárních matic $E_1, \dots, E_k$, která převede A na matici jednotkovou:

$$E_k \dots E_2 E_1 A = E$$

Pak ale $A^{-1} = E_k \dots E_2 E_1$ a $A = E_1^{-1} E_2^{-1} \dots E_k^{-1}$, a protože inverzní matice k elementární matici je elementární, plyne z toho, že každou regulární matici lze zapsat jako součin elementárních matic. Determinant elementární matice umíme snadno určit $\clubsuit$:

- matice přičtení násobku řádku do jiného řádku má determinant 1
- matice vynásobení řádku číslem r má determinant r
- matice prohození dvojice řádků má determinant -1.

Uvažujme nyní součin AB dvou čtvercových matic, přičemž $A = E_1 E_2 \dots E_k$, kde E_i jsou elementární matice. Pak jistě

$$\det(AB) = \det(E_1(E_2 \dots E_k B)) = \det(E_1)\det(E_2 \dots E_k B),$$

protože násobení maticí E_1 je řádková úprava matice $E_2 \dots E_k B$, která změní její determinant přesně stejně, jako kdyby se vynásobil číslem $\det E_1$. Opakováním stejné úvahy zjistíme, že

$$\begin{aligned} \det(AB) &= \det(E_1)\det(E_2)\dots\det(E_k)\det(B) \\ \det(A) &= \det(E_1)\det(E_2)\dots\det(E_k) \end{aligned}$$

Odtud plyne (téměř, až na případ A singulární ♣)

Věta

Nechť $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$. *Pak* $\det AB = \det A \det B$.

Důsledek

Nechť $A, R \in \mathbb{F}^{n\times n}$, R regulární. Pak

1. $\det(R^{-1}) = \frac{1}{\det R}$
2. $\det(R^{-1}AR) = \det A$

Důkaz.

První bod plyne z

$$\det(R^{-1})\det(R) = \det(R^{-1}R) = \det E = 1,$$

druhý z

$$\det(R^{-1}AR) = \det(R^{-1})\det A\det R = \frac{1}{\det R}\det A\det R = \det A$$

$\square$

Podobné matice mají tedy stejný determinant. Pokud A je matice $[f]_B^B$ nějakého endomorfismu $f \in \mathrm{End}(V)$ vzhledem k bázi B a $A' = [f]_{B'}^{B'}$ je matice téhož endomorfismu vzhledem k bázi B', plyne z transformační formule, že $\det A = \det A'$. Následující definice je tedy korektní:

Definice

Nechť V je vektorový prostor konečné dimenze nad $\mathbb{F}$, B jeho báze a $f \in \mathrm{End}(V)$. Pak *determinant endomorfismu* f je determinant jeho matice $[f]_B^B$.

Prohlásíme-li rovnoběžnostěn určený vektory báze B reálného vektorového prostoru V za jednotku objemu a zapíšeme-li matici $A = [f]_B^B$ jako součin elementárních matic $E_1 E_2 \dots E_k$, je $\det A$ rovno poměru objemů rovnoběžnostěnů určených posloupnostmi $f(B)$ a B $\clubsuit$. Pokud je tento poměr kladný, řekneme, že báze B a $f(B)$ mají *stejnou orientaci*, pokud je záporný, pak *různou orientaci*. Takto se množina všech bází rozpadne na dvě třídy ekvivalence $\clubsuit$, v $\mathbb{R}^3$ nazývané pravotočivé a levotočivé báze. Číslo $\det f$ má tedy význam orientované změny objemu při zobrazení f.

Další veličinou, která se zachovává při podobnosti je *stopa matice* $A \in \mathbb{F}$, definovaná jako $\operatorname{Tr} A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$, tedy součet prvků na diagonále. Pro $A \in \mathbb{F}^{n \times p}$, $B \in \mathbb{F}^{p \times q}$, $C \in \mathbb{F}^{q \times n}$ platí

$$\operatorname{Tr} ABC = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{q} a_{ij} b_{jk} c_{ki} = \sum_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{q} \sum_{i=1}^{n} b_{jk} c_{ki} a_{ij} = \operatorname{Tr} BCA,$$

tzv. *cykličnost stopy*. Odtud pak

$$\operatorname{Tr} R^{-1} A R = \operatorname{Tr} R R^{-1} A = \operatorname{Tr} A$$

Proto i stopu lze definovat pro libovolný endomorfismus $f \in \operatorname{End}(V)$ jako stopu $\operatorname{Tr}[f]_B^B$ jeho libovolné matice. Další maticové veličiny, které lze takto vztáhnout na příslušné endomorfismy (tzv. *invarianty*, protože nezávisí na zvolené reprezentaci) potkáme v přednášce o diagonalizaci.