

Jméno:

1	2	3	4	Σ

Zkoušková písemka z Matematické analýzy I
17. 6. 2026

Čas: 90 minut.

- *Podepište všechny papíry, které chcete odevzdat. Nemusíte odevzdávat papíry s pomocnými výpočty.*
- *Můžete psát i na papír se zadáním. Papír se zadáním je nutno podepsat a odevzdat, i když jste na něj nic nenapsali.*
- *Během písemné části zkoušky nemůžete odcházet ze zkouškové místnosti. Můžete ovšem písemnou část ukončit před časovým limitem.*
- *Nejsou povoleny kalkulačky, hodinky či jiná elektronika, ani přinesené písemné materiály.*
- *Své odpovědi musíte zdůvodnit.*
- *Je-li výsledkem aritmetický výraz, jako třeba $(x - 5)^2 + 10x + \binom{6}{2} - 3$, nemusíte ho zjednodušovat.*
- *Tvrzení z přednášky můžete používat bez důkazů, pokud není uvedeno jinak. Musíte však uvést, které tvrzení používáte.*

1. Uvažujme funkci $f(x): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definovanou vzorečkem $f(x) = (x - 1)^3(x + 2)$.
 - (a) [3 b.] Najděte všechny globální a lokální extrémů této funkce a určete, o jaký typ extrému se jedná (zda minimum či maximum, zda globální či jen lokální).
 - (b) [3 b.] Najděte co největší otevřený interval I obsahující nulu, na němž je tato funkce rostoucí, případně ukažte, že takový interval neexistuje.
 - (c) [4 b.] Najděte co největší hodnotu $A \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ takovou, že f je konvexní na intervalu $(-\infty, A)$, případně ukažte, že taková hodnota neexistuje.
2.
 - (a) [3 b.] Definujte *hromadný bod* posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ a *limes superior* posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.
 - (b) [4 b.] Pro posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ uvažujme následující dvě vlastnosti:
 - (I) Posloupnost (a_n) není shora omezená.
 - (II) Platí $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$.Plyne z vlastnosti (I) vlastnost (II)? Plyne z vlastnosti (II) vlastnost (I)?
 - (c) [3 b.] Definujme posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ předpisem $a_n = \exp(\frac{1}{n}) + (-1)^n$. Jaké jsou její hromadné body?
3.
 - (a) [3 b.] Napište, jak je definován součet číselné řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, a co znamená, že řada je konvergentní.
 - (b) [3 b.] Zformulujte integrální kritérium pro konvergenci řad. Nemusíte ho dokazovat.
 - (c) [4 b.] Nechť α je reálná konstanta. Pro které hodnoty α je řada $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (\ln n)^\alpha}$ konvergentní?
4.
 - (a) [3 b.] Definujte horní a dolní Riemannovu sumu a horní a dolní Riemannův integrál. Napište, co to znamená, že funkce je riemannovsky integrovatelná.
 - (b) [3 b.] Zformulujte větu o riemannovské integrovatelnosti monotónních funkcí.
 - (c) [4 b.] Dokažte tu větu.