

Kombinatorika a grafy*

Doc. RNDr. Pavel Valtr, Dr.
Prof. RNDr. Jan Kratochvíl, CSc.

Obsah

1	Základní pojmy	2
2	Aplikace lineární algebry	3
3	Multigrafy	5
3.1	Chromatický polynom	6
3.2	Grafy jako vektory	6
4	Vytvořující funkce	7
4.1	Mnohočleny	7
4.2	Nekonečné řady	8
4.2.1	Operace s posloupnostmi	8
4.3	Fibonacciho čísla	9
4.4	Binární stromy	10
5	Ramseyovy věty	10
6	Latinské čtverce a konečné projektivní roviny	13
7	Grafy	15
7.1	Hamiltonovské kružnice	15
7.2	Problém obchodního cestujícího	17
8	Toky v sítích	17
8.1	Hallova věta	20
8.2	Důsledky Hallovy věty	20
8.3	Míra souvislosti grafu	21
9	Rovinné grafy	23

*sepsal a vypracoval Petr Hošek

1 Základní pojmy

Definice 1.1. *Graf* je uspořádaná dvojice množin $G = (V, E)$, kde V je libovolná konečná neprázdná množina a množina E je libovolná podmnožina $\binom{V}{2}$. Množinu V nazýváme *množinou vrcholů* a množinu E *množinou hran*.

Definice 1.2. Graf $G' = (V', E')$ je *podgrafem* grafu $G = (V, E)$, pokud G, G' jsou grafy a $V' \subseteq V$ a $E' \subseteq E$.

Definice 1.3. Graf $G' = (V', E')$ je *indukovaným podgrafem* grafu $G = (V, E)$, pokud G, G' jsou grafy a $V' \subseteq V$ a $E' = E \cap \binom{V'}{2}$.

Definice 1.4. *Stupeň vrcholu* $v \in G$ je definován jako $\deg_G v = |\{e \in E : v \in e\}|$.

Definice 1.5. *Cesta* je podgraf grafu G ve kterém platí $|E| = |V| - 1$ a $|V| \geq 1$.

Definice 1.6. *Úplný graf* $K_n = (V, \binom{V}{2})$.

Definice 1.7. *Kružnice* je graf který má ≥ 3 vrcholy a ve kterém platí, že $|E| = |V|$.

Definice 1.8. *Souvislý graf* je graf v němž $\exists$ cesta mezi libovolnými 2 vrcholy.

Definice 1.9. *Komponenta* je maximální souvislý podgraf, nebo-li podgraf indukovaný kteroukoliv třídou ekvivalence $\sim_G$.

Definice 1.10. Relace $\sim_G: x \sim_G y$ právě když existuje cesta z x do y (pro $x, y \in V$). $\sim_G$ je ekvivalence, je tedy *reflexivní, symetrická a tranzitivní*.

Definice 1.11. Graf G je *2-souvislý* pokud $|V| \geq 3$ a $G \setminus v$ je souvislý $\forall v \in V$.

Definice 1.12. *Strom* je souvislý graf bez kružnice ve kterém platí že $|E| = |V| - 1$.

Definice 1.13. *Kostra* grafu $G = (V, E)$ je *strom* $K = (V, E')$ takový, že $E' \subseteq E$.

Definice 1.14. *Rovinný graf* je graf mající rovinné nakreslení.

Definice 1.15. *Barevnost grafu* G je funkce $\chi(G)$ =minimální počet barev potřebný k obarvení k (řádnému) obarvení grafu G .

Věta 1.16. $\chi(G) \leq 6$ pro každý rovinný graf.

Důkaz. Indukcí podle $|V|$.

1. $|V| \geq 6$
2. $G = (V, E)$ rovinný, $|V| = n + 1$, G má vrchol v takový že $\deg_G v \leq 5$, $G \setminus v$ je rovinný, lze jej obarvit 6 barvami (dle indukčního předpokladu), v dobarvíme "volnou" barvou

■

Věta 1.17. $\chi(G) \leq 5$ pro každý rovinný graf.

Falešný důkaz indukcí. Indukcí podle $|V|$. Stačí dokazovat tvrzení pro rovinné triangulace (každá stěna je trojúhelník).

1. $|V| \geq 5$
2. $G = (V, E)$ rovinný, $|V| = n + 1$
dobarvíme v "volnou" barvou

Přidáváním hran do již existující triangulace nám nedá všechny možné triangulace.

2 Aplikace lineární algebry

Definice 2.1 (Maticový popis grafu $G = (V, E), |V| = n$).

matice sousednosti $A_G \in \{0, 1\}^{V \times V}$

$$(A_G)_{uv} = \begin{cases} 1 & uv \in E \\ 0 & uv \notin E \end{cases}$$

matice incidence $I_G \in \{0, 1\}^{V \times E}$

$$(I_G)_{ue} = \begin{cases} 1 & u \in e \\ 0 & u \notin e \end{cases}$$

Laplacova matice $L_G \in \mathbb{Z}^{V \times V}$

$$(L_G)_{uv} = \begin{cases} \deg_G(u) & u = v \\ -1 & u \neq v, uv \in E \\ 0 & u \neq v, uv \notin E \end{cases}$$

Pozorování 2.2. Platí

$$I_G \cdot I_G^T = L_G + 2A_G.$$

Důkaz.

$$\begin{aligned} (I_G \cdot I_G^T)_{uv} &= \sum_{e \in E} (I_G)_{ue} \cdot (I_G^T)_{ev} = \sum_{e \in E} (I_G)_{ue} \cdot (I_G)_{ve} = \\ &= |\{e | u \in e, v \in e, e \in E\}| = \begin{cases} \deg_G(u) & u = v \\ 1 & u \neq v, uv \in E \\ 0 & u \neq v, uv \notin E \end{cases} \end{aligned}$$

■

Definice 2.3. *Sled* je posloupnost $u_1 e_1 u_2 e_2 \dots u_k e_k u_{k+1}$, $\forall i \ e_i = u_i u_{i+1}$.

Věta 2.4. $\forall G \forall k$ platí

$$(A_G^k)_{uv} = \# \text{sledů délky } k \text{ od } u \text{ k } v.$$

Důkaz. Indukcí podle k .

1. $k = 0$

$$A_G^0 = E$$

2. $k = 1$

$$A_G^1 = A_G$$

3. $k - 1 \rightarrow k$

$$\begin{aligned} (A_G^k)_{uv} &= (A_G^{k-1} \cdot A_G)_{uv} = \sum_{w \in V} (A_G^{k-1})_{uw} \cdot (A_G)_{wv} = \\ &= \sum_{w \in V, \ wv \in E} (A_G^{k-1})_{uw} = \\ &= \sum_{w \in V, \ wv \in E} (\# \text{sledů délky } k-1 \text{ od } u \text{ do } w) = \\ &= \# \text{sledů délky } k \text{ od } u \text{ do } v \end{aligned}$$

■

Věta 2.5 (Cauchy-Biset). *Matice $A \in T^{n \times m}$, $B \in T^{m \times n}$. Matice $A_{\{i_1, \dots, i_n\}}$ je podmatice A obsahující pouze sloupce $\{i_1, \dots, i_n\}$, matice $B^{\{i_1, \dots, i_n\}}$ je podmatice B obsahující pouze řádky $\{i_1, \dots, i_n\}$. Platí*

$$\det(A \cdot B) = \sum_{\omega \subseteq 1, 2, \dots, m, |\omega|=n} \det(A_\omega) \cdot \det(B^\omega)$$

Lemma 2.6. $\forall G \forall u \forall \omega \subseteq E, |\omega| = n - 1$

$$|\det D_\omega^{(u)}| = \begin{cases} 1 & (V, \omega) \text{ je strom (=kostra } G) \\ 0 & (V, \omega) \text{ není strom (=není kostra } G) \end{cases}$$

Důkaz. Rozborem případů.

1. pokud (V, ω) není kostra, potom (V, ω) není souvislý, tedy $V = V_1 \dot{\cup} V_2$ tak, že $\omega \subseteq \binom{V_1}{2} \cup \binom{V_2}{2}$; bez újmy na obecnost $u \in V_1$, $u \notin V_2$, součet řádků v matici $D_\omega^{(u)}$ indexovaných vrcholy z V_2 je $(0, 0, \dots, 0)$, tedy $\det(D_\omega^{(u)}) = 0$
2. pokud (V, ω) je kostra, utrhnou všechny listy v_i a příslušné hrany e_i , v matici $D_\omega^{(u)}$ uspořádám řádky $v_1, v_2, \dots$ a dostávám dolní trojúhelníkovou matici, tedy $\det(\tilde{D}_\omega^{(u)}) = \pm 1$ a $|\det(D_\omega^{(u)})| = 1$, využijeme faktu že každý strom který má alespoň 2 vrcholy má aspoň 2 listy

■

Věta 2.7. $\forall G$ platí

$$\#koster G = \det(L_G^{(u)}).$$

Důkaz. Vytvoříme orientovanou matici incidence D_G tak že v matici každé hraně $e = (u, v)$ přiřadíme orientaci tak že u jednoho vrcholu změním znaménko na záporné. Platí $D_G \cdot D_G^T = L_G$, protože

$$\begin{aligned} (D_G \cdot D_G^T)_{uv} &= \sum_{e \in E} (D_G)_{ue} \cdot (D_G^T)_{ev} = \sum_{e \in E} (D_G)_{ue} \cdot (D_G)_{ve} = \\ &= \begin{cases} \deg_G(u) & u = v \\ -1 & u \neq v, uv \in E \\ 0 & u \neq v, uv \notin E \end{cases} \end{aligned}$$

Potom platí $D_G^{(u)} \cdot D_G^{(u)T} = L_G^{(u)}$. Tedy

$$\begin{aligned} \det(L_G^{(u)}) &= \det(D_G^{(u)} \cdot D_G^{(u)T}) = \sum_{\omega \subseteq E, |\omega|=n} \det(D_\omega^{(u)}) \cdot \det((D_\omega^{(u)})^T) = \\ &= \sum_{\omega \subseteq E, |\omega|=n-1} \det^2(D_\omega^{(u)}) \end{aligned}$$

■

3 Multigrafy

Definice 3.1. *Multigraf* je trojice (V, E, φ) , $\varphi : E \rightarrow \binom{V}{2} \cup \binom{V}{1}$.

Definice 3.2. Kontrakci hrany v grafu označujeme jako $G.e$ a definujeme

$$V(G.e) = (V(G) \setminus e) \cup \{x_e\}$$

$$E(G.e) = \{f | f \in E(G) \wedge f \cap e = \emptyset\} \cup \{wx_e | w \in V(G) \wedge (wu \in E(G) \vee wv \in E(G)) \wedge w \neq u, v\}$$

Kontrakci hrany v multigrafu označujeme jako $G : e$ a definujeme

$$\begin{aligned} V(G : e) &= (V(G) \setminus \varphi(e)) \cup \{x_e\} \\ E(G : e) &= E(G) \setminus \{e\} \\ \tilde{\varphi}(f) &= \begin{cases} \varphi(f) & \varphi(f) \cap \varphi(e) = \emptyset \\ \{x_e\} & \varphi(f) = \varphi(e) \\ \{w, x_e\} & \varphi(f) = \{w, u\} \text{ nebo } \{w, v\} \text{ a } w \neq u, v \end{cases} \end{aligned}$$

Věta 3.3. $\forall G \forall e \in E(G)$ multigraf

$$t(G) = \begin{cases} 0 & G \text{ nesouvislý} \\ 1 & G = K_1 \\ t(G \setminus e) & e \text{ smyčka} \\ t(G \setminus e) + t(G : e) & e \text{ není smyčka} \end{cases}$$

Důkaz. Hrana e která není smyčka. Pro libovolný graf G platí $F \subseteq E(G)$ je kostra G , $e \in F$, potom $F \setminus \{e\}$ je kostra $G : e$.

$$\mathcal{T}(G) = \{\text{kostry } G\}$$

$$\mathcal{T}_1(G) = \{\text{kostry } \ni e\} \Rightarrow |\mathcal{T}_1(G)| = |\mathcal{T}(G : e)| = t(G : e)$$

$$\mathcal{T}_2(G) = \{e \notin \text{kostry}\} = \mathcal{T}(G \setminus e) \Rightarrow |\mathcal{T}_2(G)| = t(G \setminus e)$$

$$\mathcal{T}(G) = \mathcal{T}_1(G) \dot{\cup} \mathcal{T}_2(G) \Rightarrow t(G) = |\mathcal{T}(G)| = |\mathcal{T}_1(G)| + |\mathcal{T}_2(G)| = t(G : e) + t(G \setminus e)$$

■

3.1 Chromatický polynom

Definice 3.4. $P_G(x) = \# \text{obarvení } G \text{ pomocí } (\leq) x \text{ barev.}$

Věta 3.5. $P_G(x)$ je polynom stupně n v x a platí

$$P_G(x) = \begin{cases} x^n & G \text{ nemá žádné hrany} \\ P_{G \setminus e}(x) - P_{G:e}(x) & \text{pro } e \in E(G) \end{cases}$$

Důkaz. Jestliže $E(G) = \emptyset$, pak $\forall$ zobrazení $\varphi : V(G) \rightarrow \{1, \dots, x\}$ je dobré obarvení. Necht $e \in E(G)$, $\mathcal{B}(G) = \{\text{obarvení } G\}$, potom $\mathcal{B}(G \setminus e) = \underbrace{\{\varphi | \varphi(u) = \varphi(v)\}}_{\mathcal{B}(G:e)} \dot{\cup} \underbrace{\{\varphi | \varphi(u) \neq \varphi(v)\}}_{\mathcal{B}(G)}$. Tedy

$$P_{G \setminus e}(x) = P_G(x) + P_{G:e}(x).$$

■

Pozorování 3.6. $P_G(x)$ je polynom.

Důkaz. Indukcí dle počtu hran G .

1. pokud $E(G) = \emptyset$, potom $P_G(x) = x^n$
2. $G \leftarrow G \setminus e, G:e$

$$P_G(x) = P_{G \setminus e}(x) - P_{G:e}(x) = \text{P stupně } n - \text{P stupně } n - 1 = \text{polynom stupně } n$$

■

3.2 Grafy jako vektory

Pro potřeby následujících tvrzení budeme brát $G = (V, E)$ jako pevný graf.

Definice 3.7. $v_G = (\{H \mid H = (V, F), F \subseteq E\}, +)$ vektorový prostor nad $GF(2) = \{0, 1\}$

- $1 \cdot H = H$
- $0 \cdot H = o = (V, \emptyset)$
- $H_1 + H_2 = (V, F_1 \div F_2)$

Definice 3.8. $\mathcal{E}_G = \{H \in v_G \mid \forall x \in V : \deg_H(x) \equiv 0 \pmod{2}\}$.

Věta 3.9. $\mathcal{E}_G$ je vektorový prostor kružnic a $\dim(\mathcal{E}_G) = |E| - |V| + 1$.

Důkaz. Zvolme pevně kostru T . Elementární kružnice $\forall e \in E(G) \setminus E(T)$: K_e je kružnice určená hranou e a (jedinou) cestou v T mezi koncovými vrcholy e . ■

Důkaz. $\mathcal{E}_G$ uzavřené na $+$ a násobení skaláry.

- $H \in \mathcal{E}_G \Rightarrow 1 \cdot H \in \mathcal{E}_G$ triviální
- $H \in \mathcal{E}_G \Rightarrow 0 \cdot H \in \mathcal{E}_G$ platí protože $o = (V, \emptyset) \in \mathcal{E}_G$
- $H_1, H_2 \in \mathcal{E}_G \Rightarrow H_1 + H_2 \in \mathcal{E}_G \quad \forall x \in V : \deg_{H_1+H_2}(x) = \deg_{H_1}(x) + \deg_{H_2}(x) - 2|\{xu \mid xu \in F_1 \cap F_2\}| = 2k + 2l - 2m \equiv 0 \pmod{2}$

■

Tvrzení 3.10. $\{K_e \mid e \in E(G) - E(T)\}$ je báze $\mathcal{E}_G$.

4 Vytvořující funkce

Motto Jak explicitně vyjádřit n -tý člen posloupnosti $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots$?

4.1 Mnohočleny

Příklad 4.1. I, J množiny, $I, J \subset \mathbb{N}$, číslo $r \in \mathbb{N}$. Kolik existuje dvojic $(i, j), i \in I, j \in J$ takových že $i + j = r$? Tolik, jaký je koeficient u x^r v

$$\left(\sum_{i \in I} x^i \right) \cdot \left(\sum_{j \in J} x^j \right).$$

Příklad 4.2. Kolika způsoby může vydat bankomat částku 10.000,- pokud vydává pouze bankovky v hodnotách 200,- a 500,-? Tolika, kolik je koeficient u x^{100} v

$$(1 + x^2 + x^4 + \dots + x^{100}) \cdot (1 + x^5 + x^{10} + \dots + x^{100}).$$

Příklad 4.3. Kolika způsoby může vydat bankomat částku 10.000,- pokud vydává pouze bankovky v hodnotách 200,-, 500,- a 1000,-? Tolika, kolik je koeficient u x^{100} v

$$(1 + x^2 + x^4 + \dots + x^{100}) \cdot (1 + x^5 + x^{10} + \dots + x^{100}) \cdot (1 + x^{10} + \dots + x^{100}).$$

Příklad 4.4. Kolika způsoby může vydat bankomat částku 10.000,- pokud vydává pouze bankovky v hodnotách 200,-, 500,- a 1000,- a má k dispozici 12 bankovek každé hodnoty? Tolika, kolik je koeficient u x^{100} v

$$(1 + x^2 + x^4 + \dots + x^{24}) \cdot (1 + x^5 + x^{10} + \dots + x^{60}) \cdot (1 + x^{10} + \dots + x^{100}).$$

Věta 4.5 (Binomická).

$$1. \forall x \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} (1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \dots + \binom{n}{n}x^n$$

$$2. \forall a, b \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} (a+b)^n = \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \dots + \binom{n}{n}a^0 b^n$$

Důkaz. Vezměme $r \in \{0, 1, \dots, n\}$, roznásobíme-li $(1+x)^n$ (nebo-li $(x^0 + x^1)^n$), koeficient u x^r bude roven počtu n -tic $(i_1, i_2, \dots, i_n)$, kde $i_1, i_2, \dots, i_n \in \{0, 1\}$ a $i_1 + i_2 + \dots + i_n = r$, tedy je roven $\binom{n}{r}$. ■

Pozorování 4.6. 1. a 2. jsou ekvivalentní.

Důkaz.

$$2. \rightarrow 1. \quad a = 1, b = x$$

$$1. \rightarrow 2. \quad (a+b)^n = a^n \cdot (1 + \frac{b}{a})^n = a^n \cdot (\binom{n}{0} + \binom{n}{1}\frac{b}{a} + \binom{n}{2}(\frac{b}{a})^2 + \dots + \binom{n}{n}(\frac{b}{a})^n) \text{ pro } a \neq 0$$

■

4.2 Nekonečné řady

Definice 4.7. Mocninná řada je definována jako $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$, kde $a_0, a_1, \dots \in \mathbb{R}$.

Příklad $1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x}$ pro $x \in (-1, 1)$.

Věta 4.8. Nechť $(a_0, a_1, \dots)$ je posloupnost reálných čísel. Nechť $\exists K \in \mathbb{R}^+ |a_n| \leq K^n$ (pro $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$). Potom pro každé $x \in (-\frac{1}{K}, \frac{1}{K})$ řada $a(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ konverguje. Tedy $a(x)$ můžeme považovat za funkci na intervalu $(-\frac{1}{K}, \frac{1}{K})$. Hodnoty $a(x)$ na libovolně malém okolí 0 jednoznačně určují posloupnost $(a_0, a_1, \dots)$ protože $\forall n \in \mathbb{N}_0 \quad a_n = \frac{a^{(n)}(0)}{n!}$.

Definice 4.9. $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ je posloupnost reálných čísel. Potom mocninná řada $a(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$ je její (obyčejná) vytvořující funkce.

4.2.1 Operace s posloupnostmi

1. $a(x)$ je vytvořující funkcí posloupnosti $(a_0, a_1, \dots)$
2. $b(x)$ je vytvořující funkcí posloupnosti $(b_0, b_1, \dots)$
3. $a(x) + b(x)$ je vytvořující funkcí posloupnosti $(a_0 + b_0, a_1 + b_1, \dots)$
4. $a(x) - b(x)$ je vytvořující funkcí posloupnosti $(a_0 - b_0, a_1 - b_1, \dots)$
5. $a(x) \cdot b(x)$ je vytvořující funkcí posloupnosti $(a_0b_0, a_0b_1 + a_1b_0, a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0, \dots)$
6. $a(\lambda x)$ je vytvořující funkcí posloupnosti $(a_0, \lambda a_1, \lambda^2 a_2, \dots)$
7. $a(x^k)$ je vytvořující funkcí posloupnosti $(a_0, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{k-1}, a_1, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{k-1}, a_2, \dots)$
8. $a'(x)$ je vytvořující funkcí posloupnosti $(a_1, 2a_2, 3a_3, \dots)$
9. $\int a(x)dx$ je vytvořující funkcí posloupnosti $(0, a_0, \frac{a_1}{2}, \frac{a_2}{3}, \dots)$
10. $\frac{1}{1-x}$ je vytvořující funkcí posloupnosti $(1, 1, \dots)$
11. $\frac{1}{1-\lambda x}$ je vytvořující funkcí posloupnosti $(1, \lambda, \lambda^2, \dots)$
12. $\frac{a}{1-\lambda x}$ je vytvořující funkcí posloupnosti $(a, a\lambda, a\lambda^2, \dots)$

4.3 Fibonacciho čísla

Definice 4.10. $a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ je vytvářející funkcí posloupnosti $(a_0, a_1, \dots)$.

Definice 4.11. $F_0 = 0, F_1 = 1, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ pro $n \geq 0$. $F(x)$ je vytvářející funkcí posloupnosti $(F_0, F_1, \dots)$.

Lemma 4.12. $\underbrace{F(x)}_{(F_0, F_1, \dots)} - \underbrace{x F(x)}_{(0, F_0, F_1, \dots)} - \underbrace{x^2 F(x)}_{(0, 0, F_0, F_1, \dots)}$ je vytvářející funkce posloupnosti $(F_0, F_1 - F_0, F_2 - F_1 - F_0, F_3 - F_2 - F_1, \dots)$ nebo-li $(0, 1, 0, 0, \dots)$, její vytvářející funkce je x . Tedy $x = F(x) - x F(x) - x^2 F(x)$ z čehož vyplývá $F(x) = \frac{x}{1 - x - x^2} = \frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{x - x_2}$ kde x_1, x_2 jsou kořeny $1 - x - x^2$. Po úpravě dostáváme $F(x) = \frac{a}{1 - \lambda_1 x} + \frac{b}{1 - \lambda_2 x}$, odtud $F_n = a \lambda_1^n + b \lambda_2^n$ a po vyčíslení

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

Je vhodné provést kontrolu uvedeného vztahu.

Příklad $F_0 = 1, F_1 = 4, F_2 = 3, F_{n+3} = F_{n+2} - 3F_{n+1} + 8F_n$, použitím postupu 4.12 můžeme vyjádřit vztah pro n -tý člen.

Věta 4.13 (Binomická). $\forall r \in \mathbb{N}_0 \quad (1+x)^r = \binom{r}{0}x^0 + \binom{r}{1}x^1 + \dots + \binom{r}{r}x^r$ tj. $(1+x)^r$ je vytvářející funkcí posloupnosti $(\binom{r}{0}, \binom{r}{1}, \dots, \binom{r}{r}, 0, 0, \dots)$.

Definice 4.14. $\binom{r}{k} = \frac{r(r-1)(r-2)\dots(r-k+1)}{k!}$ pro $r \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}_0$.

Věta 4.15 (Zobecněná binomická). $\forall r \in \mathbb{R} \quad (1+x)^r$ je vytvářející funkcí posloupnosti $(\binom{r}{0}, \binom{r}{1}, \binom{r}{2}, \dots)$.

Důkaz. Pomocí Taylorova rozvoje funkce $(1+x)^r$ v 0. ■

4.4 Binární stromy

Definice 4.16.

1. $\emptyset$
2. kořen + levý podstrom + pravý podstrom

Definice 4.17. b_n = počet binárních stromů s n vrcholy.

Lemma 4.18. $b_0 = 1, b_1 = 1, b_2 = 2, b_3 = 5, \dots, b_n = b_0 b_{n-1} + b_1 b_{n-2} + b_2 b_{n-3} + \dots + b_{n-1} b_0$ pro $n \geq 1$. Obecně tedy $1 + \underbrace{x \cdot b(x) \cdot b(x)}_{(0, b_0 b_0, b_0 b_1 + b_1 b_0, b_0 b_2 + b_1 b_1 + b_2 b_0, \dots)} = b(x)$, řešíme tedy kvadratickou rovnici

$b(x) = x(b(x))^2 + 1$. Její kořen je roven $b(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x}$, vyhovující je $b(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x}$. Podle 4.15 je $\sqrt{1-4x} = \sum_{k=0}^{\infty} -4^k \binom{1/2}{k} x^k$ a $(1+x)^{1/2} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{1/2}{k} x^k$. Koeficient u x^0 je 1, $1 - \sqrt{1-4x}$ můžeme vydělit $2x$ a dostáváme tvar $b_n = -\frac{1}{2}(-4)^{n+1} \binom{1/2}{n+1}$.

5 Ramseyovy věty

Pozorování 5.1. Mějme 6 osob. Relace “znát se” je symetrická. Potom 3 se navzájem znají nebo 3 se vůbec neznají.

Důkaz. $M :=$ množina 6 osob, $A \in M$ libovolná. Podle Dirichletova principu A zná ≥ 3 osoby nebo A nezná ≤ 3 osoby.

1. A zná B, C, D
 - (a) osoby B, C, D se vůbec neznají
 - (b) dvě z osob B, C, D (např. B, C) se znají, potom A, B, C se znají
2. A nezná žádnou z osob B, C, D
 - (a) B, C, D se navzájem znají
 - (b) dvě z osob B, C, D (např. B, C) se neznají

■

Poznámka 5 osob nestačí.

Věta 5.2 (Ramseyova). $\forall k \exists n = n(k)$: G graf na n vrcholech, potom G obsahuje K_k nebo nezávislou množinu k vrcholů.

Věta 5.3 (Ramseyova - nesymetrická verze). $\forall k \forall l \exists n = n(k, l)$: G graf na n vrcholech, potom G obsahuje K_k nebo nezávislou množinu l vrcholů.

Důkaz. Indukcí podle $k + l$.

1. $k = 1$ nebo $l = 1$, potom $n = 1$
2. $k, l \geq 2$, předpokládáme že věta platí pro k', l' takové, že $k' + l' < k + l$; tedy $\exists n(k, l - 1)$, $\exists n(k - 1, l)$, ukážeme, že věta platí pro $n := n(k, l - 1) + n(k - 1, l)$; buď G graf na n vrcholech, zvolíme libovolný vrchol $v \in V(G)$, označme $A := \{u \in V(G) : uv \in E(G)\}$, $B := \{u \in V(G) \setminus \{v\} : uv \notin E(G)\}$, $|A| + |B| = n - 1$, podle *Dirichletova principu* je buď $|A| \geq n(k - 1, l)$ nebo $|B| \geq n(k, l - 1)$
 - (a) $|A| \geq n(k - 1, l)$, na A existuje K_{k-1} nebo l nezávislých vrcholů
 - i. pro l nezávislých vrcholů je vše v pořádku
 - ii. v s K_{k-1} tvoří K_k
 - (b) $|B| \geq n(k, l - 1)$, na B existuje K_k nebo $l - 1$ nezávislých vrcholů
 - i. pokud existuje K_k , je vše v pořádku
 - ii. v s nezávislou množinou $l - 1$ vrcholů tvoří nezávislou množinu l vrcholů

■

Tvrzení 5.4. 5.2 a 5.3 jsou ekvivaletní.

Důkaz. $\uparrow$ speciální případ

$$\Downarrow k := \max_{\text{nesymetrická verze}} \underbrace{\{k, l\}}$$

■

Definice 5.5. $r(k, l) := \min\{n : 5.3 \text{ s parametry } k, l \text{ platí pro } n\}$

Tvrzení 5.6. Platí $r(k, l) \leq \binom{k+l-2}{k-1}$.

Důkaz. Indukcí podle $k + l$.

1. pro $k = 1$ nebo $l = 1$ platí
2. pro $k, l \geq 2$ je $r(k, l) \leq r(k, l - 1) + r(k - 1, l) \leq \binom{k+l-3}{k-1} + \binom{k+l-3}{k-2} = \binom{k+l-2}{k-1}$

■

Definice 5.7. $r(k) := r(k, k)$

Poznámka $r(3) = 6$, $r(4) = 18$, $r(5) \in [43, 49]$, $r(8) \in [282, 1870]$, $r(17) \in [8917, 601080389]$

Věta 5.8 (Ramseyova - dvoubarevná verze). $\forall k \forall l \exists n = n(k, l)$: hrany K_n obarveny každá červeně nebo modře, tj. $c: E(K_n) \rightarrow \{\text{červená, modrá}\}$, potom K_n obsahuje červený K_k nebo modrý K_l .

Tvrzení 5.9. 5.3 a 5.8 jsou ekvivaletní.

Důkaz. Hrany $G \leftrightarrow$ červené hrany v K_n , nehrany $G \leftrightarrow$ modré hrany v K_n . ■

Věta 5.10 (Ramseyova - vícebarevná verze). $\forall r \forall k_1 \forall k_2 \dots \forall k_r \exists n = n(k_1, \dots, k_r)$: hrany K_n obarveny barvami $1, 2, \dots, r$, potom $\exists i \in \{1, \dots, r\} \exists U \subseteq V(K_n) : |U| = k_i$ a $c(uv) = i$ pro $u, v \in U$.

Důkaz. Indukcí podle $k_1 + \dots + k_r$.

1. $\exists i \ k_i = 1$, potom $n = 1$
2. $k_i > 1$ pro $\forall i$, předpokládáme, že platí pro $k'_1 + \dots + k'_r < k_1 + \dots + k_r$; ukáže se, že tvrzení platí pro $n = n(k_1 - 1, k_2, \dots, k_r) + n(k_1, k_2 - 1, k_3, \dots, k_r) + \dots + n(k_1, \dots, k_{r-1}, k_r - 1)$; libovolný $v \in V(G)$, jeho sousedy v barvě 1 označíme A_1 , sousedy v barvě 2 označíme A_2 , ..., sousedy v barvě r označíme A_r , podle *Dirichletova principu* $\exists i : |A_i| \geq n(k_1, k_2, \dots, k_i - 1, \dots, k_{r-1}, k_r)$, atd. ■

Věta 5.11. Platí $n(3, \dots, 3) \leq 1 + [e \cdot r!] \equiv n_r(3) \leq 1 + [e \cdot r!]$.

Důkaz. $n_r(3) \leq 2 + \sum_{i=1}^r \underbrace{(n(2, 3, \dots, 3) - 1)}_{n_{r-1}(3)} = 2 + r(n_{r-1}(3) - 1)$, tedy

$$\begin{aligned} \tilde{n}_r(3) &= n_r(3) - 1 \\ \tilde{n}_r(3) &\leq 1 + r \cdot \tilde{n}_{r-1}(3) \leq 1 + r \cdot (1 + (r-1)(1 + (r-2)(\tilde{n}_{r-3}(3)))) \\ \tilde{n}_1(3) &= n_1(3) - 1 \\ \tilde{n}_r(3) &\leq r! \sum_{i=0}^r \frac{1}{i!} = r! \left(\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{(r-1)!} + \frac{1}{r!} \right) \end{aligned}$$

Indukcí podle r .

1. $r = 1$: $\tilde{n}_r(3) = 2 \leq 1! \left(\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} \right) = 1(1 + 1) = 2$
2. $r \leftarrow r - 1$: $\tilde{n}_r(3) \leq 1 + r \cdot \tilde{n}_{r-1}(3) \leq 1 + (r-1)! \sum_{i=0}^{r-1} \frac{1}{i!} \cdot r = r! \frac{1}{r!} + r! \sum_{i=0}^{r-1} \frac{1}{i!} = r! \left(\frac{1}{r!} + \sum_{i=0}^{r-1} \frac{1}{i!} \right) = r! \sum_{i=0}^r \frac{1}{i!}$ ■

Důsledek 5.12. $\tilde{n}_r(3) \leq r! \cdot \sum_{i=0}^r \frac{1}{i!} \leq r! \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} = e \cdot r!$ $n_r(3) = 1 + \tilde{n}_r(3) \leq 1 + e \cdot r!$

Pozorování 5.13. Platí $n_r(2, 3, \dots, 3) = n_{r-1}(3, \dots, 3)$.

Důkaz. Obarvím graf pomocí $r - 1$ barev a dívám se na toto obarvení jako obarvení r barvami kde první barva není nikde použita. V některé ze zbývajících barev je jednobarevný trojúhelník. Obarvím graf pomocí $r - 1$ barev. Nechám obarvit graf pomocí r barev, první barva buď je použita a vše je v pořádku nebo není použita a potom obsahuje jednobarevný trojúhelník a vše je taktéž v pořádku. ■

Domácí cvičení

- $n(k_1, \dots, k_r) \leq 2 + \sum_{i=1}^n n(k_1, \dots, k_i - 1, \dots, k_r) - 1$

Lemma 5.14 (Schurovo). $\forall r \exists N (\leq [e \cdot r!]) \{1, 2, \dots, N\} = A_1 \cup \dots \cup A_r : \exists i \exists x, y, z \in A_i : x + y = z$.

Důkaz. $1 \ 2 \ \dots \ N \ A_1 \cup \dots \cup A_r$
 $1 \ 2 \ a \ \dots \ b \ N \ N + 1 \ \varphi : \binom{[1 \dots N+1]}{2} \rightarrow \{1, 2, \dots, r\}, \varphi(ab) = i : |a - b| \in A_i$ φ : obarvení hran
 $n_r(3) \leq 1 + [e \cdot r!]$. Podle 5.2 pro $\varphi \exists$ jednobarevný trojúhelník. $\exists i \exists a < b < c \leq N + 1 : \varphi(ab) = \varphi(bc) = \varphi(ac) = i$

$$\begin{aligned} x &= b - a \in A_i \\ y &= c - b \in A_i \\ z &= c - a \in A_i \end{aligned}$$

$x, y, z \in A_i \ x + y = z$ ■

Motivace Velká Fermatova věta $n \geq 3 : x^n + y^n = z^n$ nemá řešení $x, y, z \in \mathbb{N}$.

Věta 5.15. $\forall n \exists p_0 \forall p > p_0, p$ prvočíslo $\exists$ netriviální řešení $x^n + y^n \equiv z^n \pmod p$.

Věta 5.16 (Ramseyova věta - obecná). $\forall p \forall r \forall k \exists N \forall \left(\binom{[1 \dots N]}{p} = A_1 \cup \dots \cup A_r \exists A \in \binom{[1 \dots N]}{k} \right) \exists i \forall x \in \binom{A}{p} : x \in A_i$.

Věta 5.17 (Erdős-Szakerés). $\forall k \exists N : \forall X \subseteq E_2, |X| = N, X$ je v obecné poloze $\exists A \subseteq X, |A| = k$ a body A jsou vrcholy konvexního k -úhelníka. Potom $\min N = ES(k)$.

Důkaz. $ES(k) \leq n_{r=2}^{p=4}(k, 5) \leq n_2^4(k)$; položíme $N = n_2^4(k, 5)$, vezmeme N bodů v obecné poloze, označíme je jako X a $|X| = N$. Obarvíme $\binom{X}{4} = A_1 \cup A_2$, kde A_1 je barva konvexní čtyřúhelníků, A_2 barva nekonvexních čtyřúhelníků. Podle 5.2 $\exists A \subseteq X, |A| = k, \binom{A}{4}$ konvexní nebo $\exists A \subseteq X, |A| = 5, \binom{A}{4}$ nekonvexní, druhá možnost ale není možná; body A jsou tedy vrcholy konvexního k -úhelníka. ■

Příklad $ES(1) = 1, ES(2) = 2, ES(3) = 3, ES(4) = 5$

6 Latinské čtverce a konečné projektivní roviny

Definice 6.1. Latinský čtverec řádu n je $A \in \{1, \dots, n\}^{n \times n}, \forall i, j \neq j' : A_{ij} \neq A_{ij'} \text{ a } A_{ji} \neq A_{j'i}$.

Definice 6.2. Konečná projektivní rovina je množinový systém $(B, P), P \subseteq 2^B$ splňující

1. $\forall p \neq p' \in P : |p \cap p'| = 1$
2. $\forall x \neq y \in B \exists p \in P : x, y \in p$
3. $\exists 4$ body a, b, c, d z nichž žádné 3 neleží na přímce
- 3'. B nelze pokrýt dvěma přímkami ($\neg \exists p, q \in P : p \cup q = B$)

Definice 6.3. Latinské čtverce $A, B \in \{1, \dots, n\}^{n \times n}, A \perp B$ jestliže $\forall a, b \in 1, \dots, n \exists i, j : A_{ij} = a$ a $B_{ij} = b$.

Příklad 6.4.

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{array} \perp \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{array}$$

Věta 6.5. Jestliže $A_1, \dots, A_t$ jsou navzájem ortogonální latinské čtverce řádu n , pak $t \leq n - 1$.

Důkaz. Mějme t čtverců $L'^1, L'^2, \dots$ které mají všechny stejný první řádek, potom $L'_{2l}^k \in [2 \dots n]$ navzájem různá, t různých čísel z $[2 \dots n]$, tedy $t \leq n - 1$. ■

Lemma 6.6. $A, B \in \{1, 2, \dots, n\}^{n \times n}$ $\pi \in \text{sym}(n)$ $\pi : [1 \dots n] \xrightarrow{1-1} [1 \dots n]$ $\pi(A)_{ij} = \pi(A_{ij})$, potom $A \perp B$ právě tehdy když $\pi(A) \perp B$.

Důkaz. $\Rightarrow \forall a, b \in [1 \dots n]$ platí $\exists i, j$ $\pi(A)_{ij} = a$ a $B_{ij} = b$, $a' = \pi^{-1}(a)$ $\exists i, j$ $A_{ij} = a'$ a $B_{ij} = b$, potom $\pi(A)_{ij} = \pi(A_{ij}) = \pi(\pi^{-1}(a)) = a$

$\Leftarrow \forall \pi(A), B, \delta = \pi^{-1}$, jestliže $\pi(A) \perp B$ potom $\delta(\pi(A)) \perp B$, tedy $\pi^{-1}(\pi(A)) = A \perp B$ ■

Věta 6.7. Platí $|B| = |P| = n^2 + n + 1$.

Důkaz. $A_k : p_{kl}, l = 1, \dots, n$, $\{x_{ij}\} = p_{oi} \cap p_{nj}$, každá šikmá přímka si bere jeden bod z každé vodorovné přímky a jeden bod z přímky nevlastní, tedy $|B| = n^2 + n + 1$. ■

Věta 6.8. $\exists n-1$ navzájem ortogonálních čtverců řádu n právě tehdy když $\exists$ konečná projektivní rovina řádu n . [navzájem ortogonální latinský čtverec(n) = $\max\{t | \exists L^1, \dots, L^t$ navzájem ortogonální čtverce řádu $n\}$].

Důkaz. $\Leftarrow L_{ij}^k = l$ právě tehdy když $x_{ij} \in p_{kl}$

1. L^k je latinský čtverec, $\forall l \forall i : |p_{kl} \cap p_{oi}| = 1$ a z toho $\forall i \forall l \exists j$ $L_{ij}^k = l$
2. $L^k \perp L^{k'}$, jestliže $\forall k \neq k' \forall l, l' |p_{kl} \cap p_{k'l'}| = 1$ potom $\exists ! i, j : x_{ij} \in p_{kl} \cap p_{k'l'}$, tedy $\forall l, l' \exists i, j : L_{ij}^k = l \vee L_{ij}^{k'} = l'$

$\Rightarrow B = \{A_0, A_1, \dots, A_n\} \cup \{x_{ij} | i, j = 1, \dots, n\}$, $P = \{\{A_0, \dots, A_n\}, p_{oi} = \{A_o\} \cup \{x_{ij} | j = 1, \dots, n\}_{i=1, \dots, n}, p_{nj} = \{A_n\} \cup \{x_{ij} | i = 1, \dots, n\}_{j=1, \dots, n}, p_{kl} = \{A_k\} \cup \{x_{ij} | L_{ij}^k = l\}_{k=1, \dots, n-1; l=1, \dots, n}\}$; stačí ověřit že (B, P) je konečná projektivní rovina řádu n ověřením axiomů

1. $\forall x \neq y \exists p \in P : x, y \in p$
 - nevlastní $\times$ nevlastní: $A_k, A_{k'}$ nevlastní přímka $\{A_0, \dots, A_n\}$
 - vlastní $\times$ nevlastní: $A_k x_{ij} p_{kl} \ni x_{ij}$ že $L_{ij}^k = l$
 - vlastní $\times$ vlastní: $x_{ij}, x_{i'j'}$, platí $(n+1)n\binom{n}{2} = |\{(\{x_{ij}, x_{i'j'}\}, p) | x_{ij} \neq x_{i'j'}, x_{ij}, x_{i'j'} \in p \in P\}| \leq \binom{n^2}{2} \cdot 1$ protože už víme, že $\forall$ dvojice bodů patří nejvýše jedné přímce, platí tedy rovnost, víme tedy že $\forall$ dvojice bodů patří právě jedné přímce
2. $\forall p \neq p' \in P : |p \cap p'| = 1$
 - nevlastní $\times$ vlastní: $\{A_0, \dots, A_n\} \cap p_{kl} = \{A_k\}$
 - vlastní $\times$ vlastní (ze stejného svazku): $p_{kl} \cap p_{k'l'} = \{A_k\}$ z definice přímky
 - vlastní z různých svazků:
 - * vodorovná $\times$ svislá: jasné $p_{oi} \cap p_{nj} = \{x_{ij}\}$
 - * vodorovná $\times$ šikmá: $p_{oi} \cap p_{kl} = \{x_{ij}\}$ takové že $L_{ij}^k = l$
 - * svislá $\times$ šikmá: analogicky
 - * šikmá $\times$ šikmá: $p_{kl} \cap p_{k'l'} \ni x_{ij} \Rightarrow |p_{kl} \cap p_{k'l'}| = 1$, jestliže $L^k \perp L^{k'}$, potom $\forall l, l' \exists ! i, j : L_{ij}^k = l \vee L_{ij}^{k'} = l'$

3. platí ■

Věta 6.9. Jestliže $n = p^2$ kde p je prvočíslo, potom $\exists$ konečná projektivní rovina řádu n .

Důkaz. $GF(n)$ je konečné těleso o n prvcích, pokud $n = p$ pak $GF(n) = Z_p$; vezmeme $j = ki + l$ a $P = \{\{A_0, \dots, A_n\}, p_{oi} = \{A_o\} \cup \{x_{ij} | j = 1, \dots, n\}_{i=1, \dots, n}, p_{nj} = \{A_n\} \cup \{x_{ij} | i = 1, \dots, n\}_{j=1, \dots, n}, p_{kl} = \{A_k\} \cup \{x_{i, ki+l} | i = 1, \dots, n\}_{k=1, \dots, n-1; l=1, \dots, n}\}$. ■

7 Grafy

7.1 Hamiltonovské kružnice

Definice 7.1. *Hamiltonovská kružnice* v grafu G je uspořádání $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ takové že $\forall i : v_i v_{i+1} \in E(G)$ ($v_{n+1} = v_1$).

Příklad 7.2. K_n má *Hamiltonovskou kružnici* pokud $n \geq 3$. $K_{m,n}$ má *Hamiltonovskou kružnici* pokud $m = n \geq 2$.

Tvrzení 7.3. *Úloha jejíž vstupem je graf G a otázkou zda $\exists$ Hamiltonovská kružnice $\in G$ je NP-úplná.*

Věta 7.4 (Dirac). *Jestliže $\forall x \in V(G) : \deg_G(x) \geq \frac{n}{2}$, potom v G $\exists$ Hamiltonská kružnice.*

Věta 7.5 (Ore). *Jestliže $\forall x \neq y \in V(G) : \deg_G(x) + \deg_G(y) \geq n$, potom v G $\exists$ Hamiltonská kružnice.*

Věta 7.6 (Chvátal). *Jestliže $\forall x \neq y \in V(G), xy \notin E(G) : \deg_G(x) + \deg_G(y) \geq n$, potom v G $\exists$ Hamiltonská kružnice.*

Definice 7.7 (Chvátalův uzávěr). $[G]$ definován algoritmicky jako
while $\exists x \neq y, xy \notin E(G), \deg_G(x) + \deg_G(y) \geq n$
do $E(G) := E(G) \cup \{xy\}$

Lemma 7.8. *7.7 je definován jednoznačně.*

Důkaz. $G [G_1] = G + e_1, e_2, \dots, e_i, e_k, [G_2] = G + f_1, f_2, \dots, f_e$, jestliže $[G]_1 \neq [G]_2$ potom $\exists i : e_i \notin [G]_2$, vezměme nejmenší takové i ; $G^i = G + e_1, \dots, e_{i-1}, e_i = xy$ a $\deg_{G^i}(x) + \deg_{G^i}(y) \geq n$, $E(G^i) \subseteq E([G]_2)$, $\deg_{[G]_2}(x) \geq \deg_{[G]^i}(x)$ a $\deg_{[G]_2}(y) \geq \deg_{[G]^i}(y)$ a z toho $\deg_{[G]_2}(x) + \deg_{[G]_2}(y) \geq n$, tedy e_i se musí přidat do $[G]_2$. ■

Tvrzení 7.9. *Jestliže $\forall G : [G] = K_n$, potom G má Hamiltonovskou kružnici.*

Věta 7.10. $\forall G : G$ má Hamiltonovskou kružnici právě tehdy když $[G]$ má Hamiltonovskou kružnici.

Důkaz.

$\Rightarrow$ *Hamiltonskou kružnici* nemohu porušit přidáním hran

$\Leftarrow$ vyplývá z 7.11

■

Lemma 7.11. *Jestliže $e = xy \notin E(G)$, $\deg_G(x) + \deg_G(y) \geq n$ a $G + e$ má Hamiltonovskou kružnici, potom i G má Hamiltonovskou kružnici.*

Důkaz. Jestliže v $G + e$ existuje *Hamiltonovská kružnice* C , pak

1. $xy \notin C$, C je *Hamiltonovská kružnice* $\in G$
2. $xy \in C$ $x = v_1, v_2, \dots, v_n = y$

$$\begin{aligned} X &= \{i | xv_i \in E(G)\} \subseteq \{2, \dots, n-1\}, |X| = \deg_G(x) \\ Y &= \{i | v_{i-1}y \in E(G)\} \subseteq \{3, \dots, n\} |Y| = \deg_G(y) \\ X \cup Y &\subseteq \{2, \dots, n\}, |X \cup Y| \leq n-1 \\ |X \cap Y| &= |X| + |Y| - |X \cup Y| = \deg_G(x) + \deg_G(y) - |X \cup Y| \geq n - (n-1) = 1 \end{aligned}$$

z toho vyplývá že $\exists i \in X \cap Y$ a $v_1 v_2 \dots v_{i-1} y = v_n v_{n-1} \dots v_i x = v_1$ je *Hamiltonovská kružnice* v G . ■

7.2 Problém obchodního cestujícího

Definice 7.12. Vstupem je $K_n, w : E(K_n) \rightarrow \mathbb{R}_0^+, k$. Otázkou je zda $\exists$ Hamiltonovská kružnice $C \subseteq E(K_n)$ taková, že $\sum_{e \in E(C)} w(e) \leq k$?

Věta 7.13. Problém obchodního cestujícího je NP-uplný problém.

Důkaz. Problém nalezení Hamiltonovské kružnice je stejně těžký jako problém obchodního cestujícího. Nechť $K_n, n = |V(G)|, V(K_n) = V(G)$, a definuji $w(uv) = \begin{cases} 1 & uv \in E(G) \\ 2 & uv \notin E(G) \end{cases}$. Potom $\exists C : w(C) = n$ právě tehdy když G má Hamiltonovskou kružnici. ■

Tvrzení 7.14. Pokud w splňuje trojúhelníkovou nerovnost, tedy že $w(xz) \leq w(xy) + w(yz)$, potom existuje 2-aproximace problému obchodního cestujícího.

Algoritmus 7.15 (aproximační). Polynomiální algoritmus který pro $\forall K_n, w$ najde C která je řešením a platí optimální řešení $\leq w(C) \leq 2 \cdot$ optimální řešení.

1. najdi minimální kostru T vůči w
2. uvaž symetrickou orientaci $\vec{T}$ kostry T
3. nakresli $\vec{T}$ jedním tahem $U = v_1 v_2 \dots$
4. dokud $\exists x$ kterým U projde geq dvakrát, zkrať U u vrcholu x
5. vydej U , který je Hamiltonovskou kružnicí

Důkaz. Nechť $\tilde{C}$ je optimální Hamiltonovská kružnice. Platí $w(T) \leq w(\tilde{C}) =$ optimální řešení, $w(U) = 2w(T) \leq 2w(\tilde{C}) = 2 \cdot$ optimální řešení. Tedy $w(U') \leq w(U)$ a $w(C) \leq w(U) \leq 2 \cdot$ optimální řešení. ■

8 Toky v sítích

Definice 8.1. Sít' (G, z, s, c) , kde $G = (V, E)$ je orientovaný graf bez smyček kde $z, s \in V, z \neq s$, $c : E \rightarrow \mathbb{R}_0^+$.

Definice 8.2. Tok v sítí (G, z, s, c) je funkce $f : E \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ taková, že

1. $\forall e \in E : f(e) \leq c(e)$
2. $\forall u \in V \setminus \{z, s\} : \sum_{ux \in E} f(ux) - \sum_{xu \in E} f(xu) = 0$.

Definice 8.3. Velikost toku f je definována jako $w(f) = \sum_{zx \in E} f(zx) - \sum_{xz \in E} f(xz)$.

Tvrzení 8.4. Pro každou sít' existuje maximální tok (tj. tok maximální možné velikosti).

Definice 8.5. Řez (mezi z a s) je libovolná $R \subseteq E$ taková že $(V, E \setminus R)$ neobsahuje orientovanou cestu ze z do s .

Definice 8.6. Kapacita množiny $E' \subseteq E$ je definována jako $c(E') = \sum_{e \in E'} c(e)$.

Definice 8.7. $A, B \subseteq V, A \cap B = \emptyset S(A, B) = \{xy \in E : x \in A, y \in B\}$.

Tvrzení 8.8. $V = A \dot{\cup} B, z \in A, s \in B$, potom $S(A, B)$ je řez (takové řezy nazýváme elementární).

Důkaz. Každá orientovaná cesta ze z do s obsahuje hranu z $S(A, B)$, tedy $S(A, B)$ je řez. ■

Tvrzení 8.9. Každý řez R obsahuje elementární řez.

Důkaz. A =množina všech vrcholů z V , do kterých vede orientovaná cesta ze z v grafu $(V, E \setminus R)$, $z \in A$, $s \notin A$. Ukážeme, že $S(A, V \setminus A) \subseteq R$. Necht' $uv \in S(A, V \setminus A)$, kdyby $uv \notin R$, potom by platilo $v \in A$ což je spor, tedy $uv \in R$. ■

Tvrzení 8.10. Každý v inkluzi minimální řez (řez R takový, že $R \setminus \{e\}$ není řez pro $\forall e \in R$) je elementární.

Důkaz. Vyplývá z 8.9. ■

Definice 8.11. $f(X, Y) = \sum_{xy \in E, x \in X, y \in Y} f(xy)$.

Lemma 8.12. $\forall A \subseteq V, z \in A, s \notin A: \forall \text{tok } f \text{ platí } w(f) = f(A, V \setminus A) - f(V \setminus A, A)$.

Důkaz.

$$\begin{aligned} \forall u \in A \setminus \{z\} : \sum_{ux \in E} f(ux) - \sum_{xu \in E} f(xu) &= 0 \\ &+ \\ \sum_{zx \in E} f(zx) - \sum_{xz \in E} f(xz) &= w(f) \\ \sum_{u \in A} \left(\sum_{ux \in E} f(ux) - \sum_{xu \in E} f(xu) \right) &= w(f) \\ f(A, V \setminus A) - f(V \setminus A, A) &= w(f) \end{aligned}$$

Důsledek 8.13. Pro každý tok f a pro každý řez R platí $w(f) \leq c(R)$.

Důkaz. Existuje $A \subseteq V, z \in A, s \notin A: S(A, V \setminus A) \subseteq R$ (8.9), $w(f) = f(A, V \setminus A) - f(V \setminus A, A) \leq f(A, V \setminus A) \leq c(S(A, V \setminus A)) \leq c(R)$. ■

Definice 8.14. Cesta $(v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, v_m)$, kde $e_i = v_{i-1}v_i$ nebo $e_i = v_i v_{i-1}$ pro $\forall i$.

Definice 8.15. Cesta $(v_0, e_1, \dots, v_m)$ je nasycená, pokud existuje hrana $e_i = v_{i-1}v_i$ splňující $f(e_i) = c(e_i)$ nebo existuje hrana $e_i = v_i v_{i-1}$ splňující $f(e_i) = 0$.

Tvrzení 8.16. Tok je maximální (tj. má maximální možnou velikost) právě když každá cesta ze z do s je nasycená.

Důkaz.

⇒ Necht' existuje nenasyčená cesta $(\overset{z}{\widehat{v_0}}, e_1, v_1, \dots, \overset{s}{\widehat{v_m}})$ ze z do s . Pro každou $e_i = v_{i-1}v_i$, definujme $\varepsilon(e_i) = c(e_i) - f(e_i) > 0$ a pro každou $e_i = v_i v_{i-1}$, definujme $\varepsilon(e_i) = f(e_i) > 0$. Položme $\varepsilon = \min_{i=1, \dots, m} \varepsilon(e_i) > 0$. Definujme tok f' jako $f'(e) = f(e)$ pro $e \neq e_i$ pro $\forall i$ a $f'(e_i) = f(e_i) + \varepsilon$, pokud $e_i = v_{i-1}v_i$ a $f'(e_i) = f(e_i) - \varepsilon$, pokud $e_i = v_i v_{i-1}$. Platí tedy $w(f') = w(f) + \varepsilon > w(f)$.

⇐ Necht' každá cesta ze z do s je nasycená, A =množina vrcholů do nichž existuje nenasyčená cesta ze $z \in A, s \notin A$. Platí $\forall e \in S(A, V \setminus A) : f(e) = c(e)$ (jinak spor s definicí A), $\forall e \in S(V \setminus A, A) : f(e) = 0$ (jinak spor s definicí A) a potom $w(f) = f(A, V \setminus A) - f(V \setminus A, A) = f(A, V \setminus A) = c(A, V \setminus A) = c(S(A, V \setminus A))$ tedy f je maximální, protože $w(f) \leq c(S(A, V \setminus A))$ pro každý tok f .

■

Věta 8.17 (O tocích). Pro každou síť (G, z, s, c) je $\max_{f \text{ tok}} w(f) = \min_{R \text{ řez}} c(R)$.

Důkaz. $\exists$ maximální tok f a jeho velikost je rovna kapacitě nějakého řezu $R = S(A, V \setminus A)$ podle 8.16. Řez R má minimální kapacitu protože $c(R') \geq w(f) = w(f)$ pro každý řez R' . ■

Algoritmus 8.18 (Ford, Fulkerson).

1. $f(e) = 0$ pro $\forall e \in E$
2. dokud existuje nenasycená cesta ze z do s opakuj
 - najdi nenasycenou cestu P ze z do s
 - najdeme příslušné $\varepsilon > 0$
 - vylepšíme o ε tok podle cesty P (dostaneme tok f' velikosti $w(f') = w(f) + \varepsilon$)
3. tok f je maximální tok

Věta 8.19 (O celočíselném toku). Jsou-li všechny kapacity celočíselné (resp. racionální), potom algoritmus 8.18 skončí po konečně mnoha krocích a najde maximální tok f takový že $f(e)$ je celočíselný (resp. racionální) pro každou hranu $e \in E$.

Důkaz. Pro celočíselné kapacity algoritmus zachovává celočíselnost a každým krokem zvětší velikost toku alespoň o 1.

Pro racionální kapacity vynásobíme všechny kapacity vhodným celým číslem, abychom dostali celočíselné kapacity, najdeme celočíselný maximální tok, tok na každé hraně znovu vydělíme číslem kterým jsme násobili. ■

8.1 Hallova věta

Definice 8.20. $\mathcal{M} = (M_i : i \in I)$ množinový systém. $\mathcal{M}$ má systém různých reprezentantů, pokud existuje $f : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} M_i$ taková, že

1. $f(i) \in M_i$ pro $\forall i \in I$
2. f je prostá.

Příklad 8.21. Pro $I = \{1, 4\}$ například $M_1 = \{1, 5, 8\}$, $M_4 = \{2, 5\}$.

Věta 8.22 (Hallova). $\mathcal{M}$ má systém různých reprezentantů právě tehdy když $\forall J \subseteq I : |\bigcup_{i \in J} M_i| \geq |J|$.

Důkaz.

$\Rightarrow$ Je zřejmé.

$\Leftarrow$ $G(V, E)$ kde $V = I \cup X \cup \{z, s\}$, $E = \{zi : i \in I\} \cup \{ix : i \in I, x \in M_i\} \cup \{xs : x \in X\}$ kde $X = \bigcup_{i \in I} M_i$. Síť $(G = (V, E), z, s, \mathbf{1})$, $c(e) = 1$ pro $\forall e \in E$. Existuje maximální celočíselný tok f , $f(e)$ je 0 nebo 1 pro $\forall e \in E$. Platí $w(f) \leq |I|$, pokud $w(f) = |I|$, příslušné hrany s tokem 1 dávají systém různých reprezentantů, jinak $w(f) < |I|$, potom existuje řez R velikosti $< |I|$. $J = \{i \in I : i \text{ neleží na žádné hraně } R\}$, $Y = \{y \in X : ys \text{ je hranou } R\}$ a platí $|I \setminus J| + |Y| \leq \# \text{ hran } R < |I|$, tedy $|J| + |I \setminus J| + |Y| < |I| + |J|$ a z toho $|I| + |Y| < |J|$ což je spor s pravou stranou v 8.22. ■

8.2 Důsledky Hallovy věty

Definice 8.23. *Párování* $F \subseteq E(G)$ takové, že $\forall x \in V(G) : |\{e | x \in e \in F\}| \leq 1$. F je *perfektní* (párování) pokud $\forall x \in V(G) : |\{e | x \in e \in F\}| = 1$.

Lemma 8.24. $G = (A \cup B, E)$ bipartitní graf ($E \neq \emptyset$), jestliže $\forall x \in A \forall y \in B : \deg_G x \geq \deg_G y$, potom $\exists$ párování $F \subseteq E, |F| = |A|$.

Důsledek 8.25. *Jestliže je bipartitní graf ($E \neq \emptyset$) regulární, pak má perfektní párování.*

Důkaz. G je k -regulární, tedy $\deg_G x = k \forall x \in A \cup B$ a $\deg_G x = k \geq k = \deg_G y$. $\exists$ párování F , $|F| = |A|$, potom $|E| = |A| \cdot k = |B| \cdot k$, tedy $|A| = |B|$. ■

Definice 8.26. *Latinský obdelník* řádu $k \times n, k \leq n, L \in \{1, \dots, n\}^{k \times n}$ a v každém řádku a každém sloupci se každý prvek vyskytuje nejvýše jednou.

Věta 8.27. *Každý latinský obdelník lze přidáváním řádků doplnit na latinský čtverec.*

Důkaz. Dokážeme, že *Latinský obdelník* ($k \times n$) lze doplnit na *latinský obdelník* ($(k+1) \times n$). $M_i = \{j | j \text{ lze doplnit na místo } L_{k+1,i}\} = \{1, \dots, n\} \setminus \{L_{h,i} | h = 1, \dots, k\}$ $|M_i| = n - k$, $M_i, i = 1, 2, \dots, n$ a $\bigcup M_i \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$. $\forall j \in \{1, \dots, n\} : |\{i | i \in M_i\}| = n - k$, z toho plyne, že $\{M_i\}_{i=1}^n$ má *systém různých reprezentantů*, tedy $f : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}, f(i) \neq f(i')$ pro $i \neq i'$ a $f(i) \in M_i \forall i$. Definujeme $L_{k+1,i} = f(i)$ tedy $L \in \{1, \dots, n\}^{(k+1) \times n}$ je *latinský obdelník*. ■

Důsledek 8.28. Latinských čtverců řádu n je $\geq \frac{(n!)^2}{e}$.

Důkaz. V *latinský obdelníku* ($2 \times n$) je druhý řádek permutací $1 \dots n$ bez pevných bodů, těch je $\frac{n!}{e}$. Každý tento obdelník lze doplnit na *latinský čtverec*. ■

8.3 Míra souvislosti grafu

Definice 8.29. *Vrcholový řez* v G je $A \subseteq V(G)$ taková že $G \setminus A = G[V(G) \setminus A]$ je nesouvislý. *Hranový řez* v G je $F \subseteq E(G)$ taková že $G \setminus F = (V(G), E(G) \setminus F)$ je nesouvislý.

Poznámka 8.30. $\forall G, |V(G)| \geq 2$, má nějaký hranový řez, pokud $\forall G$, který není úplný, má nějaký vrcholový řez.

Definice 8.31.

$$\begin{aligned} K_e(G) &= \min\{|F| | F \text{ je hranový řez v } G\} \\ K_v(G) &= \begin{cases} \min\{|A| | A \text{ je vrcholový řez v } G\} & \text{když } G \text{ není úplný} \\ n - 1 & \text{když } G \cong K_n \end{cases} \end{aligned}$$

Lemma 8.32. *Platí*

$$K_v(G) - 1 \leq K_v(G \setminus e) \leq K_v(G).$$

Lemma 8.33. $\forall G$ platí

$$K_v(G) \leq K_e(G).$$

Důkaz. $K_e(G) = k, \exists F \subseteq E(G), G \setminus F$ nesouvislý, $F = \{e_1, \dots, e_k\}$.

$$\begin{aligned} H &= G \setminus F \\ K_v(H) &= 0 = K_e(H) = 0 \\ K_v(H + e_1) &\leq K_v(H) + 1 = 1 \\ K_v(H + e_1, e_2) &\leq K_v(H + e_1) + 1 \leq 2 \\ &\vdots \\ K_v(G) &= K_v(H + F) \leq K_v(H + e_1, \dots, e_{k-1}) + 1 \leq k = K_e(G). \end{aligned}$$

■

Věta 8.34 (Ford-Fulkerson). $K_e(G) \geq k$ právě tehdy když $\forall u \neq v \in V(G) \exists \geq k$ hranově disjunktních cest z u do v .

Důkaz.

$\Leftarrow$ Předpokládejme že $K_e(G) < k$, $\exists$ hranový řez $F \subseteq E(G)$, $|F| < k$, $\exists u \neq v$, z u do v nevede cesta v $G \setminus F$. Mezi u a v vede (v G) *geqk* hranově disjunktních cest $P_1, P_2, \dots, P_k$. $\forall i |F \cap P_i| \leq 1$, tedy F nemůže přerušit $\forall k$ cest, v $G \setminus F$ vede cesta z u do v což je spor.

$\Rightarrow$ Předpokládejme že $K_e(G) \geq k$, $u \neq v$, definujme síť $S: V(S) = V(G)$, $E(S) = \{(x, y), (y, x) | \{x, y\} \in E(G)\}$, $c(xy) = 1$, $z = u$, $s = v$. Použijeme algoritmus 8.18 pro hledání maximálního toku, $w(f_{max}) = h$, tedy podle věty 8.17 $\exists$ řez $\tilde{F}$ v S , takový že $c(\tilde{F}) = h$. Bez újmy na obecnosti předpokládejme že $f_{max}(xy) \in \{0, 1\}$ a pokud $\forall x \neq y : f_{max}(xy) = 1$, pak $f_{max}(yx) = 0$. Definujme $F = \{\{x, y\} | xy \in \tilde{F}\}$, F je řez v G , tedy $h = |\tilde{F}| \geq |F| \geq k$. Z toku f_{max} velikosti $\geq k$ vyrobíme k hranově disjunktních cest z u do v tak, že ponechám hrany xy , $f_{max}(xy) = 1$, ty tvoří k hranově disjunktních orientovaných cest z u do v , ty tvoří k hranově neorientovaných cest z u do v . ■

Věta 8.35 (Menger). $K_v(G) \geq k$ právě tehdy když $\forall u \neq v \in V(G) \exists \geq k$ vrcholově disjunktních cest z u do v .

Důkaz.

$$\Leftarrow \begin{cases} G = K_n & K_v(G) = n - 1 \\ G \neq K_n \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} uv \in E(G) \\ uv \notin E(G) \end{cases}$$

1. $G' = G \setminus uv$, $K_v(G') \geq k - 1$, $\exists k - 1$ vrcholově disjunktních cest z u do v +1 což je hrana uv .
 2. Definujme síť S jako $V(S) = \{x_1 | x \in V(G), x \neq v\} \cup \{x_2 | x \in V(G), x \neq u\}$, $E(S) = \{x_1 y_2 | xy \in E(G)\} \cup \{x_2 x_1 | x \in V(G) \setminus \{u, v\}\}$, $c(e) = 1$, $z = u_1$, $s = v_2$. Maximální tok je řez $\tilde{F}$, tedy $\tilde{F}$.
-

9 Rovinné grafy

Lemma 9.1. $A \subseteq V(G)$ je minimální (co do inkluze) řez v G , $C_1, C_2, \dots, C_k$ jsou komponenty souvislosti $G \setminus A$, pak pro $\forall x \in A \forall i \in \{1, \dots, k\} : \exists y \in C_i : xy \in E(G)$.

Důkaz. Kdyby z $x \in A$ nevedla žádná hrana do C_i , pak $A' = A \setminus \{x\}$ by byl řez neboť C_i by byla komponenta souvislosti $G \setminus A'$, $A' \subsetneq A$ což je spor s minimalitou A . ■

Věta 9.2. Jestliže $K_v(G) \geq 3$, $|V(G)| \geq 5$, potom $\exists e \in E(G)$, $K_v(G \cdot e) \geq 3$.

Důkaz. $\exists G$, $K_v(G) \geq 3$, $|V(G)| \geq 5$ že $\forall e \in E(G)$, $K_v(G \cdot e) < 3$, tedy $\exists A \subseteq V(G)$, $|A| \leq 2$ že $G \setminus A$ je nesouvislý.

1. $A = \{u\}$, $u \neq x_e$ $(G \setminus u) \cdot e = (G \cdot e) \setminus u$, tedy $\{u\}$ není řez v $G \cdot e$
2. $A = \{x_e\}$ $G \setminus \{u, v\} = G \cdot e \setminus \{x_e\}$
3. $x_e \notin A = \{x, y\}$ $(G \setminus \{x, y\}) \cdot e = G \cdot e \setminus \{x, y\}$ souvislý
4. $A = \{x_e, y_e\}$ $G \setminus \{u, v, y_e\} = G \cdot e \setminus \{x_e, y_e\}$

$\forall e \in E(G) \exists y_e \in V(G)$ že $G \setminus \{u, v, y_e\}$ je nesouvislý. Označme největší komponentu souvislosti která vznikne po odebrání hrany řezu z grafu K . Vybereme $e \in E(G)$ a $y_e \in V(G)$ tak aby K bylo největší možné. $\exists z \in K' (= (V(G) \setminus K) \setminus \{u, v, y_e\})$, $y_e z \in E(G)$, potom $\exists w \in V(G)$ že y_e, z, w je řez v G . $(K \cup \{u, v\}) \setminus \{w\}$ indukují souvislý podgraf $G \setminus \{z, y_e, w\}$. $\forall \alpha \beta \in K \cup \{u, v\} \setminus \{w\}$ $\exists$ cesta od α k β v $G \setminus \{y_e, w\}$, vezměme nejkratší takovou cestu, ta je $\subseteq K \cup \{u, v\} \setminus \{w\}$, pokud by nebyla, mohli bychom ji zkrátit přes hranu e . Tedy $G \setminus \{z, y_e, w\}$ má komponentu $\tilde{K} \supseteq K \cup \{u, v\} \setminus \{w\}$, $|\tilde{K}| \geq |K| + 2 - 1 = |K| + 1$ což je sport z maximalitou K . ■

Důsledek 9.3. $\forall G, K_v(G) \geq 3$ lze vytvořit z K_4 “dobrými” roztaženími vrcholů.

Lemma 9.4. Jestliže $K_v(G) \geq 2$, G rovinný, potom v každém nakreslení hranice každé stěny je (grafová) kružnice.

Důkaz. Pomocí ušatého lemma. Mám nakreslení G , v něm vyberu kružnici, ta musí existovat protože $K_v(G) \geq 2$. Přidávám ucha a indukci v každém kroku kontroluji invariant, tedy že hranice každé stěny je grafová kružnice.

$k = 1$ 2 stěny, uši mají stejnou hranici, tedy kružnici

$k - 1 \rightarrow k$ rozdělím nějakou stěnu ohraničenou kružnicí C cestou U na C_1, C_2 , dostávám nové stěny UC_1, UC_2

Lemma 9.5. $\forall$ rovinný $G \forall e \in E(G)$ lze G nakreslit (bez křížení) tak, že e je hranici vnější stěny.

Důkaz. Pomocí kruhové inverze. ■

Lemma 9.6. Pokud $G \cdot e$ má dělení $K_{3,3}$, potom G má dělení $K_{3,3}$.

Důkaz. Rozborem případů. ■

Lemma 9.7. Pokud $G \cdot e$ má dělení K_5 , potom G má dělení K_5 nebo $K_{3,3}$.

Důkaz. Rozborem případů. ■

Věta 9.8 (Kuratowski). G je rovinný právě tehdy pokud G neobsahuje dělení K_5 ani $K_{3,3}$ jako podgraf.

Důkaz.

$\rightarrow$ zřejmé

$\leftarrow$ matematickou indukci

$|V(G)| \leq 4$ G musí být rovinný

$|V(G)| \geq 5$ (a) G nesouvislý, potom $G = G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_k$, podle indukčního předpokladu $\forall G_i$ rovinný

(b) $K_v(G) = 1$, potom $\exists u$ artiklace a části $C_1, C_2, \dots, C_k$, označme $G_1 = (C_1 \cup \{u\}, E(G[C_1 \cup \{u\}]))$, $G_2 = (C_2 \cup \dots \cup C_k \cup \{u\}, E(G[C_1 \cup \dots \cup C_k \cup \{u\}]))$ $G_i \subseteq G$, $|V(G_i)| < |V(G)|$ a G_i nemá dělení $K_5, K_{3,3}$, lze použít indukční předpoklad, tedy G_i jsou rovinné, potom nakreslím G_1, G_2 tak, aby u byl na vnější stěně

(c) $K_v(G) = 2$, potom $\exists u, v$ které tvoří vrcholový řez, označme $G_1 = (C_1 \cup \{u, v\}, E(G[C_1 \cup \{u, v\}]) \cup \{uv\}))$, $G_2 = (C_2 \cup \dots \cup C_k \cup \{u, v\}, E(G[C_1 \cup \dots \cup C_k \cup \{u, v\}] \cup \{uv\}))$ $|V(G_i)| < |V(G)|$ a G_i nemá dělení $K_5, K_{3,3}$ lze použít indukční předpoklad, tedy G_i jsou rovinné, vezmu rovinné nakreslení, uv je na hranici vnější stěny

- (d) $K_v(G) \geq 3 \exists e \in E(G)$ takové, že $K_v(G \cdot e) \geq 3$, tedy $|V(G \cdot e)| < |V(G)|$, lze použít indukční předpoklad, $G \cdot e$ nemá dělení $K_5, K_{3,3}$, tedy graf $G \cdot e$ je rovinný. $G \cdot e$ obsahuje stěnu ohraničenou grafovou kružnicí C a obsahuje vrchol x_e který je kontrahovanou hranou $\{u, v\}$ původního grafu, sousedi u dělí C na úseky, pokud všichni sousedi v jsou ve stejných úsecích, pak je vše v pořádku, opačný případ nemůže nastat protože bychom získali dělení $K_{3,3}$ nebo K_5 , tedy graf G je rovinný.

■