Dimenze a báze

1. **Vyberte z množiny X = {(2,4,0,1,4), (4,3,0,2,3), (1,2,3,4,0), (3,1,1,1,2), (4,3,4,0,2)} bázi podprostoru U = < X > vektorového prostoru Z_5^5.**

   Stačí si uvědomit, které vektory z daného seznamu jsou lineární kombinací předchozích. Seřadíme-li si vektory postupně do řádků matice, kterou upravíme posloupností elementárních úprav na ostupňovaný tvar (například nejprve přičteme vhodné násobky prvního řádku k ostatním a poté přehodíme druhý a třetí řádek, s nímž stejným způsobem vynulujeme pátý a šestý řádek), stačí zjistit, kterým řádkům původní matice odpovídají nenulové řádky odstupňované matice. Řádky původní matice si označíme římskými číslicemi a budeme zaznamenávat všechna přehazování řádků:

$$\left(\begin{array}{c|l} 2\,4\,0\,1\,4 & \mathrm{I} \\ 4\,3\,0\,2\,3 & \mathrm{II} \\ 1\,2\,3\,4\,0 & \mathrm{III} \\ 3\,1\,1\,1\,2 & \mathrm{IV} \\ 4\,3\,4\,0\,2 & \mathrm{V} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{c|l} 2\,4\,0\,1\,4 & \mathrm{I} \\ 0\,0\,0\,0\,0 & \mathrm{II} \\ 0\,0\,3\,1\,3 & \mathrm{III} \\ 0\,0\,1\,2\,1 & \mathrm{IV} \\ 0\,0\,4\,3\,4 & \mathrm{V} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{c|l} 2\,4\,0\,1\,4 & \mathrm{I} \\ 0\,0\,3\,1\,3 & \mathrm{III} \\ 0\,0\,0\,0\,0 & \mathrm{II} \\ 0\,0\,0\,0\,0 & \mathrm{IV} \\ 0\,0\,0\,0\,0 & \mathrm{V} \end{array}\right)$$

   Ukázalo se, že řádek II je násobkem řádku I a řádky IV a V jsou lineární kombinací řádků I a III. Naopak řádek III není lineární kombinací řádku I. Hledanou bázi tvoří tedy například první a třetí vektor množiny X, tedy množina {(2,4,0,1,4), (1,2,3,4,0)}.

   5./11.11.

2. **Ověřte, že množina X = {(1,2,1), (2,-1,1), (1,-3,0), (1,7,2), (1,3,2)} generuje vektorový prostor R^3 a vyberte z X bázi R^3.**

   Postupujeme stejně jako v předchozím příkladě:

$$\left(\begin{array}{ccc|r} 1 & 2 & 1 & \mathrm{i} \\ 2 & -1 & 1 & \mathrm{ii} \\ 1 & -3 & 0 & \mathrm{iii} \\ 1 & 7 & 2 & \mathrm{iv} \\ 1 & 3 & 2 & \mathrm{v} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|r} 1 & 2 & 1 & \mathrm{i} \\ 0 & -5 & -1 & \mathrm{ii} \\ 0 & -5 & -1 & \mathrm{iii} \\ 0 & 5 & 1 & \mathrm{iv} \\ 0 & 1 & 1 & \mathrm{v} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|r} 1 & 2 & 1 & \mathrm{i} \\ 0 & 1 & 1 & \mathrm{v} \\ 0 & 0 & 4 & \mathrm{ii} \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{iii} \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{iv} \end{array}\right)$$

   Tím jsme zjistili, že podprostor < X > je třídimenzionální, tedy< X > = $\mathbf{R}^3$ a navíc 1., 5. a 2. vektor množiny X určitě tvoří bázi $\mathbf{R}^3$, tj. například {(1,2,1), (1,3,2), (2,-1,1)} je hledanou bází.

3. **Doplňte lineárně nezávislou posloupnost B = ((2,4,0,1,4), (1,2,1,0,3)) na bázi aritmetického vektorového prostoru Z_5^5.**

   Nejprve najdeme bázi podprostoru < B > tak, aby její vektory uspořádané do matice dali Gaussovu matici.

$$\begin{pmatrix} 2\,4\,0\,1\,4 \\ 1\,2\,1\,0\,3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2\,4\,0\,1\,4 \\ 0\,0\,1\,2\,1 \end{pmatrix}$$

Nyní snadno doplníme matici na odstupňovanou čtvercovou matici, jejíž všechny řádky jsou nenulové, například vektory kanonické báze (i-tý přidáme, právě když i-tý sloupec matice neobsahuje pivot) a přitom si všimneme, že:

$$\begin{pmatrix} 2\,4\,0\,1\,4 \\ 0\,1\,0\,0\,0 \\ 0\,0\,1\,2\,1 \\ 0\,0\,0\,1\,0 \\ 0\,0\,0\,0\,1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2\,4\,0\,1\,4 \\ 0\,0\,1\,2\,1 \\ 0\,1\,0\,0\,0 \\ 0\,0\,0\,1\,0 \\ 0\,0\,0\,0\,1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2\,4\,0\,1\,4 \\ 1\,2\,1\,0\,3 \\ 0\,1\,0\,0\,0 \\ 0\,0\,0\,1\,0 \\ 0\,0\,0\,0\,1 \end{pmatrix} = A.$$

Zřejmě má podprostor generovaný čádky matice A dimenzi 5, proto je podle Vety 2.22 roven $\mathbf{Z}_5^5$. Tedy posloupnost ((2,4,0,1,4), (1,2,1,0,3), (0,1,0,0,0), (0,0,0,1,0), (0,0,0,0,1)) tvoří bázi $\mathbf{Z}_5^5$ rozšiřující posloupnost B.

4. **Uvažujme podprostor U = < (2,4,0,1,4), (1,2,1,0,3) > vektorového prostoru Z_5^4. Najděte bázi nějakého takového podprostoru V, aby UvV = Z_5^4 a průnik U a V byl nulový.**

Uvážíme, že jsme úlohu fakticky vyřešili v předchozím příkladu. Položme V = < (0,1,0,0,0), (0,0,0,1,0), (0,0,0,0,1) > (tedy V je podprostor generovaný vektory, jimiž jsme (2,4,0,1,4), (1,2,1,0,3) doplnili na bázi). Potom zřejmě UvV = $\mathbf{Z}_5^4$. Buď dále **w** vektor průniku U a V, tedy existují prvky a, b, c, x, y tělesa $\mathbf{Z}_5$ taková, že

w = x.(2,4,0,1,4) + y.(1,2,1,0,3),
w = a.(0,1,0,0,0) + b.(0,0,0,1,0) + c.(0,0,0,0,1),
proto a.(0,1,0,0,0) + b.(0,0,0,1,0) + c.(0,0,0,0,1) - x.(2,4,0,1,4) - y.(1,2,1,0,3) = (0,0,0,0,0).

Protože všech pět vektorů je lineárně nezávislých, máme přímo z definice a=b=c=x=y=0, tedy **w** = **0**. Dokázali jsme, že bází hledaného podprostoru W je tedy například posloupnost vektorů ((0,1,0,0,0), (0,0,0,1,0), (0,0,0,0,1)).

5. **Najděte nějakou bázi podprostorů vektorového prostoru Z_5^4: U = < (2,1,1,1), (4,2,1,3), (3,4,3,0) > a V = < (2,0,3,4), (1,3,1,2), (1,4,0,2) >**

Obvyklým způsobem seřadíme generující vektory obou prostorů do matic a upravíme je pomocí elementárních transformací:

$$\begin{pmatrix} 2\,1\,1\,1 \\ 4\,2\,1\,3 \\ 3\,4\,3\,0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2\,1\,1\,1 \\ 0\,0\,4\,1 \\ 0\,0\,0\,0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 2\,0\,3\,4 \\ 1\,3\,1\,2 \end{matrix} \sim \begin{matrix} 1\,0\,4\,2 \\ 0\,3\,2\,0 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1\,4\,0\,2 \\ \\ \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0\,0\,0\,0 \\ \\ \end{pmatrix}$$

Tedy například posloupnost vektorů ((2,1,1,1), (0,0,4,1)) tvoří bázi podprostoru U a posloupnost ((1,0,4,2), (0,3,2,0)) tvoří bázi poprostoru V. Všimneme-li si, že žádné dva vektory v obou generujících množinách nejsou svými násobky, tedy nejsou lineárně závislé, pak každá dvojice vektorů z množiny {(2,1,1,1), (4,2,1,3), (3,4,3,0)} tvoří bázi dvojdimenzionálního prostoru U, stejně jako každá dvojice vektorů z množiny {(2,0,3,4), (1,3,1,2), (1,4,0,2)} tvoří bázi prostoru V.

6. **Najděte nějakou bázi spojení podprostorů U a V z předchozího příkladu a dimenzi jejich průniku.**

Předně si uvědomme, že spojení U a V (zde ho značme U+V) je podprostor generovaný všemi vektoru U i V. Stačí nám ovšem uvažovat jen báze U a V, které už jsme nalezli, tedy platí, že U+V = < (2,1,1,1), (0,0,4,1), (1,0,4,2), (0,3,2,0) >. Obvyklým způsobem najdeme bázi spojení U+V:

$$\begin{pmatrix} 2\,1\,1\,1 \\ 0\,0\,4\,1 \\ 1\,0\,4\,2 \\ 0\,3\,2\,0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2\,1\,1\,1 \\ 0\,0\,4\,1 \\ 0\,2\,1\,4 \\ 0\,3\,2\,0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2\,1\,1\,1 \\ 0\,2\,1\,4 \\ 0\,0\,3\,4 \\ 0\,0\,4\,1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2\,1\,1\,1 \\ 0\,2\,1\,4 \\ 0\,0\,1\,3 \\ 0\,0\,0\,4 \end{pmatrix}$$

Vidíme, že bázi U+V tvoří například posloupnost vektorů (2,1,1,1), (0,2,1,4), (0,0,1,3) a (0,0,0,4), tedy dim(U+V)=4. To ovšem znamená, že U+V = $\mathbf{Z}_5^4$ (tedy mohli jsme vzít jakoukoli jinou bázi $\mathbf{Z}_5^4$, například kanonickou bázi, která by byla bazí U+V).

Nyní si stačí uvědomit, že podle věty o dimenzi spojení a průniku podprostorů je dim(UnV) = dim(U) + dim(V) - dim(U+V) = 2+2-4 = 0.

7. **Najděte nějakou bázi průniku podprostorů U a V aritmetického vektorového prostoru $\mathbf{Z_3^4}$: U = < (1,1,1,1), (0,2,1,1), (0,0,1,2) > a V = < (1,2,2,1), (0,1,2,1), (0,0,2,2) >.**

Potřebujeme najít všechny vektory, které leží zároveň v U i ve V, tedy které jsou zároveň lineárními kombinacemi generátorů U i V. Vyjádříme si vektor ležící v průniku rovnicí:

$$x_1.(1,1,1,1) + x_2.(0,2,1,1) + x_3.(0,0,1,2) = y_1.(1,2,2,1) + y_2.(0,1,2,1) + y_3.(0,0,2,2),$$
$$x_1.(1,1,1,1) + x_2.(0,2,1,1) + x_3.(0,0,1,2) + y_1.(2,1,1,2) + y_2.(0,2,1,2) + y_3.(0,0,1,1) = (0,0,0,0).$$

Budeme hledat množinu všech řešení homogenní soustavy s maticí:

$$\begin{pmatrix} 1\,0\,0\,2\,0\,0 \\ 1\,2\,0\,1\,2\,0 \\ 1\,1\,1\,1\,1\,1 \\ 1\,1\,2\,2\,2\,1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1\,0\,0\,2\,0\,0 \\ 0\,2\,0\,2\,2\,0 \\ 0\,1\,1\,2\,1\,1 \\ 0\,1\,2\,0\,2\,1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1\,0\,0\,2\,0\,0 \\ 0\,2\,0\,2\,2\,0 \\ 0\,0\,1\,1\,0\,1 \\ 0\,0\,2\,2\,1\,1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1\,0\,0\,2\,0\,0 \\ 0\,2\,0\,2\,2\,0 \\ 0\,0\,1\,1\,0\,1 \\ 0\,0\,0\,0\,1\,2 \end{pmatrix}$$

Snadno dopočítáme, že množina všech řešení soustavy je tvaru < (1,2,2,1,0,0), (0,2,2,0,1,1) >, tedy bází prostoru všech řešení je například dvojice (1,2,2,1,0,0), (0,2,2,0,1,1). Zjistili jsme, že:

$$1.(1,1,1,1) + 2.(0,2,1,1) + 2.(0,0,1,2) = 1.(1,2,2,1) + 0.(0,1,2,1) + 0.(0,0,2,2) = (1,2,2,1),$$
$$0.(1,1,1,1) + 2.(0,2,1,1) + 2.(0,0,1,2) = 0.(1,2,2,1) + 1.(0,1,2,1) + 1.(0,0,2,2) = (0,1,1,0),$$

Tedy vektory (1,2,2,1) a (0,1,1,0) leží v průniku podprostorů U a V. Konečně si uvědomme, že libovolné řešení soustavy lze napsat ve tvaru

$$a_1.(1,2,2,1,0,0) + a_2.(0,2,2,0,1,1) = (a_1,2a_1+2a_2,2a_1+2a_2,a_1,a_2,a_2),$$

kde a_2 i a_2 leží v $\mathbf{Z}_3$, proto lze každý vektor z průniku vyjádřit:

$$a_1.(1,1,1,1) + (2a_1+2a_2).(0,2,1,1) + (2a_1+2a_2).(0,0,1,2) = a_1.(1,2,2,1) + a_2.(0,1,2,1) + a_2.(0,0,2,2),$$
$$a_1.[1.(1,1,1,1) + 2.(0,2,1,1) + 2.(0,0,1,2)] + a_2.[2.(0,2,1,1) + 2.(0,0,1,2)] = a_1.(1,2,2,1) + a_2.(0,1,1,0).$$

Tím jsme zjistili, že každý vektor z průniku U a V lze napsat ve tvaru $a_1.1.(1,2,2,1)+a_2.(0,1,1,0)$, tedy posloupnost ((1,2,2,1) a (0,1,1,0)) generuje množinu UnV. Zjevně se jedná o množinu lineárně nezávislou, tedy jde o bázi průniku (není těžké si uvědomit, že výsledné vektory budou jistě lineárně nezávislé, pokud jsme hledali jejich souřadnice vzhlem k bázím prostorů U a V).

Závěrem si ještě všimněme, že jsme soustavu nemuseli dopočítávat, neboť nám stačilo najít souřadnice báze řešení odpovídající proměnným y_i (poslední 3 souřadnice) nebo x_i (první 3 souřadnice).

8. **Určete dimenzi průniku podprostorů U a V racionálního vektorového prostoru Q^3, je-li U = < (1,2,1), (1,0,2) > a V = < (1,1,0), (1,-1,1) >.**

Obvyklým způsobem zjistíme, že dim U = dim V = 2 a dim (UvV) = 3, proto podle Věty 2.23 je dim (UnV) = dim U + dim V - dim (UvV) = 1.

12./18.11.

Hodnost matice

1. **Určete nad tělesem R a Z_5 hodnost matice A a matice A^T, pokud**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Připomeňme, že hodnost matice je právě dimenze podprostoru generovaného řádky matice, kterou můžeme spočítat jako počet nenulových řádků příslušné Gaussovy matice (viz Věta 4.9 z přednášky). Upravujme tedy naší matici posloupností elementárních úprav nad tělesem reálných čísel:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -5 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

Zjistili jsme, že hodnost h(A) = 3 nad tělesem **R**. Věta 5.5 z přednášky nám říká, že h(A) = h(A^T), proto h(A^T) = 3. Podobně určíme hodnost A nad $\mathbf{Z}_5$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tedy nad $\mathbf{Z}_5$ je h(A) = h(A^T) = 2.

2. **Rozhodněte, zda lze nad tělesem Z_7 převést posloupností elementárních řádkových úprav matici M z předchozího příkladu na matici**

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Uvědomme si, že matici M lze převést posloupností elementárních řádkových úprav na matici N právě tehdy, když jsou prostory generované řádky obou matic stejné. V našem případě ovšem okamžitě vidíme, že h(N) = 3, zatímco h(M) = 2. Tedy poprostory generované řádky mají různou dimenzi, a proto se nemohou rovnat.

Zjistili jsme, že M nelze posloupností elementárních úprav převést na N.

3. **Rozhodněte, zda lze nad reálnými čísly převést posloupnpstí elementárních řádkových úprav matici A na matici B. kde**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Budeme-li matici C definovat jako matici obsahující postupně všechny řádky matice A a matice B, stačí nám zjistit, zda h(A) = h(B) = h(C). Pokud by h(A) = h(B) = h(C), pak podprostory generované řádky matice A a B (a C) byly shodné, tedy by řádky B bylo možné dostat jako lineární kombinaci řádků A. V opačném případě by podprostory generované řádky matice A a B byly různé, proto by nebylo možné matici A posloupností elementárních úprav převést na matici B. Okamžitě vidíme, že h(A) = h(B) = 2. Zbývá standardním způsobem určit hodnost matice C:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zjistili jsme, že h(C) = 3, proto matici A nelze převést posloupností elementárních řádkových úprav na matici B.

4. **Rozhodněte, zda lze nad tělesem R převést posloupností elementárních řádkových úprav matici A na matici B pro**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Postupujeme-li obdobně jako v předchozí úloze, zjistíme, že h(A) = h(B) = 2 a

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

tedy i h(C) = 2. Matici A proto lze převést posloupností elementárních řádkových úprav na matici B.

Všimněme si, že jsme také mohli postupovat přímo, t.j. uvědomit si, že oba řádkové vektory (1,0,-1) a (1,3,5) matice B dostaneme jako lineární kombinaci řádkových vektorů matice A.

5. **Rozhodněte, zda lze nad tělesem R převést posloupností elementárních řádkových úprav matici A na matici E, pokud**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Uvědomíme-li si, že řádky matice E generují celý (3-dimenzionální) vektorový prostor $\mathbf{R}^3$, stačí nám tentokrát zjistit, zda řádky matice A generují celý prostor $\mathbf{R}^3$, tj. zda h(A)=3:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že h(A) = 3, proto opět lze matici A převést posloupností elementárních úprav na jednotkovou matici E.

6. **Buď A a B takové matice typu (n,m) nad tělesem T, že prostory W_A resp. W_B všech řešení homogenních soustav rovnic s maticí A resp. B jsou stejné. Dokažte, že matici A lze posloupností elementárních řádkových úprav převést na matici B.**

Můžeme využít úvahu, kterou jsme udělali v příkladu 4. Tedy stačí ukázat, že h(A) = h(B) = h(C), kde matice C obsahuje na řádcích právě všechny řádky matic A a B.

Z Věty 5.8 z přednášky víme, že $\dim(W_A) = m - h(A)$ a $\dim(W_B) = m - h(B)$. Protože navíc $\dim(W_A) = \dim(W_B)$, snadno dostáváme, že $h(A) = h(B)$.

Nyní si uvědomme, jak vypadá množina W_C:

$$W_C = \{\mathbf{x} \text{ z } T^m \mid C\mathbf{x}^T = \mathbf{0}^T\} = \{\mathbf{x} \text{ z } T^m \mid A\mathbf{x}^T = \mathbf{0}^T \text{ a } B\mathbf{x}^T = \mathbf{0}^T\} = W_A \text{ n } W_B = W_A = W_B.$$

Tedy i $\dim(W_C) = \dim(W_A)$, proto $h(A) = h(B) = h(C)$.

Permutace a determinanty

1. **Zapište v cyklickém zápisu a redukovaném cyklického zápisu permutace**

$$p = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6 \\ 3\,4\,1\,6\,5\,2 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad q = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6 \\ 1\,3\,6\,4\,2\,5 \end{pmatrix}$$

Postupně vyčerpáme všechny prvky z množiny {1, 2, 3, 4, 5, 6}, abychom zapsali cykly permutací: p = (13)(246)(5), q = (1)(2365)(4). V redukovaném cyklyckém zápisu vynecháme všechny jednocykly: p = (13)(246), q = (2365).

2. **Mějme p=(135)(4798)(26) a q=(18)(247693) dvě permutace z S_9. Určete pq, qp, p^{-1} a q^{-1}.**

Přímo použitím definice snadno zjistíme hodnoty (skládáme zprava doleva):

$$pq = (1495)(27)(368)$$
$$qp = (129)(3587)(46)$$
$$p^{-1} = (531)(8974)(62)$$
$$q^{-1} = (81)(396742)$$

25./19.11.

3. **Napište permutace p_1 = (13475) a p_2 = (267)(3548) jako součin transpozic.**

Připomeňme, že transpozice je permutace, která vyměňuje právě dva prvky, tj. můžeme ji v redukovaném cyklickém zápisu zapsat ve tvaru (ab). Řešení úlohy je zřejmé z důkazu Věty 6.9, která říká, že každou permutaci lze zapsat jako součin transpozic. Snadno nahlédnem, že platí:

(13475) = (13) . (34) . (47) . (75) = (15) . (17) . (14) . (13),
(267)(3548) = (26) . (67) . (35) . (54) . (48) = (27) . (26) . (38) . (34) . (35).

4. **Určete znaménka permutací p_1 = (13475), p_2 = (267)(3548) a p_3 = (374)(8135) z S_8.**

Podle definice má permutace znaménko +1 (tj. jde o sudou permutaci), právě když ji můžeme napsat jako součin sudého počtu transpozic a permutace má znaménko -1 (tj. je to lichá permutace), pokud ji můžeme napsat jako součin lichého počtu transpozic. V předchozím příkladu jsme vyjádřili permutaci p_1 jako součin 4 transpozic, proto zn $p_1 = 1$, a permutaci p_2 jsme dostali jako součin 5 transpozic, tedy zn $p_2 = -1$. Uvážíme-li, že permutace p_3 má stejný typ jako permutace p_2 (tj má stejný počet stejně dlouhých cyklů), snadno nahlédneme, že permutace p_2 a p_3 dostaneme jako součin stejného počtu transpozic, tedy znaménka permutací p_2 i p_3 jsou stejná a zn $p_3 = -1$.

5. **Spočítejte znaménko permutací p, q, p^{-1} a qp^{-1} z příkladu 2.**

Znaménka permutací p a q můžeme tentokrát určit pomocí Věty 6.15 z přednášky. Permutaci p můžeme chápat jako součin cyklu délky 3, 4 a 2, tedy zn p $= (-1)^{3-1}(-1)^{4-1}(-1)^{2-1} = 1$ a podobně zn q $= (-1)^{2-1}(-1)^{6-1} = 1$, tedy obě permutace jsou sudé (mají kladné znaménko). Dále zn p^{-1} = zn p = 1 a zn qp^{-1} = zn q . zn p^{-1} = 1.1 = 1 podle Věty 6.13.

6. **Spočítejte nad tělesy R, Z_5 a Z_7 determinanty matic:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

V obou případech determinant spočítáme přímo podle definice:

det A = 1.1 - 2.3 = -5 nad **R** (=0 nad $\mathbf{Z}_5$ a =2 nad $\mathbf{Z}_7$)
det B = 1.0.2 + 2.3.2 + 1.4.2 - 1.0.2 - 2.4.2 - 1.3.2 = 20 - 22 = -2 nad **R** (=3 nad $\mathbf{Z}_5$ a =5 nad $\mathbf{Z}_7$)

7. **Spočítejte determinanty matic nad tělesem racionálních čísel:**

$$M_1 = \begin{pmatrix} 2&0&0&0&0 \\ 7&1&0&0&0 \\ 5&4&3&0&0 \\ 6&4&3&1&0 \\ 1&2&3&2&2 \end{pmatrix} \qquad M_2 = \begin{pmatrix} 5&4&3&0&0 \\ 2&0&0&0&0 \\ 1&2&3&2&2 \\ 6&4&3&1&0 \\ 7&1&0&0&0 \end{pmatrix} \qquad M_3 = \begin{pmatrix} 5&4&3&0&5 \\ 2&0&0&0&2 \\ 1&2&3&4&3 \\ 6&4&3&2&6 \\ 7&1&0&0&7 \end{pmatrix}$$

Neboť je matice M_1 dolní trojúhelníková, stačí, abychom vynásobili hodnoty na diagonále, tj. det M_1 = 2.1.3.1.2 =12.

Matice M_2 se od matice M_1 liší jen pořadím řádků. Víme, že přehození řádků v matici změní znaménko determinantu, potřebujeme tedy zjistit, kolik transpozic řádků je zapotřebí, abychom z matice M_1 dostal matici M_2. Bude-li jich zapotřebí sudý počet, pak budou determinanty matic M_1 a M_2 stejné, bude-li jich třeba lichý počet, pak budou mít determinanty matic M_1 a M_2 opačné znaménko (viz Důsledek 7.7). Potřebujeme tedy zjistit, zda je permutace (1352), která udává permutaci řádků matice M_2, sudá nebo lichá. Okamžitě vidíme, že zn (1352) = -1, proto

$$\det M_2 = -\det M_1 = -12.$$

Všimněme-si, že matici M_3 dostaneme z matice M_2 přičtením 1. sloupce k sloupci 5. a vynásobením 4. sloupce číslem 2. Uvědomíme-li si, že přičtení násobku řádku (nebo sloupce) k jinému řádku (nebo sloupci) nezmění determinant matice a že vynásobení řádku nebo sloupce skalárem x adekvátně vynásobí i determinant matice, vidíme, že

$$\det M_3 = \det\begin{pmatrix} 5&4&3&0&0\\ 2&0&0&0&0\\ 1&2&3&4&2\\ 6&4&3&2&0\\ 7&1&0&0&0 \end{pmatrix} = 2 . \det\begin{pmatrix} 5&4&3&0&0\\ 2&0&0&0&0\\ 1&2&3&2&2\\ 6&4&3&1&0\\ 7&1&0&0&0 \end{pmatrix} = 2 . \det M_2 = -24.$$

26.11.

8. **Určete nad tělesem reálných čísel determinant matice**

$$A = \begin{pmatrix} 2&2&1&1\\ 1&-1&1&0\\ 1&1&1&1\\ 3&0&1&-2 \end{pmatrix}$$

Protože víme, jak determinant matice A změní elementární úpravy a determinant horní (stejně jako dolní) trojúhelníkové matice spočítáme velmi snadno, převedeme posloupností elementárních úprav matici A na odstupňovaný tvar:

$$\det A = -\det\begin{pmatrix} 1&1&1&1\\ 1&-1&1&0\\ 2&2&1&1\\ 3&0&1&-2 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} 1&1&1&1\\ 0&-2&0&-1\\ 0&0&-1&-1\\ 0&-3&-2&-5 \end{pmatrix} = 1/2 . \det\begin{pmatrix} 1&1&1&1\\ 0&2&0&1\\ 0&0&-1&-1\\ 0&-6&-4&-10 \end{pmatrix} = 1/2 . \det\begin{pmatrix} 1&1&1&1\\ 0&2&0&1\\ 0&0&-1&-1\\ 0&0&0&-3 \end{pmatrix} = 3.$$

9. **Spočítejte nad racionálními čísly determinant matice**

$$B = \begin{pmatrix} 1&3&-3&1&1\\ 3&2&7&5&-9\\ 2&1&-1&2&0\\ 1&2&2&1&-1\\ 2&-1&3&2&7 \end{pmatrix}$$

V matici B sice neobsahuje žádný řádek ani sloupec větší počet nul, ovšem dva sloupce se liší jen na jedné pozici. Víme, že odečteme-li od jednoho z těchto sloupců druhý, nezmění se hodnota determinantu. Po této úpravě už ovšem můžeme použít metodu rozvoje podle sloupce:

$$\det B = \det \begin{matrix} 1&3&-3&1&1\\ 3&2&7&5&-9\\ 2&1&-1&2&0\\ 1&2&2&1&-1 \end{matrix} = \det \begin{matrix} 0&3&-3&1&1\\ -2&2&7&5&-9\\ 0&1&-1&2&0\\ 0&2&2&1&-1 \end{matrix} = 2. \det\begin{pmatrix} 3&-3&1&1\\ 1&-1&2&0\\ 2&2&1&-1\\ -1&3&2&7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 & 7 \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 & 2 & 7 \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix}$$

Poté odečteme od prvního řádku trojnásobek druhého řádku. Na prvním řádku zůstanou dva nenulové prvky, podle nichž determinant rozvedeme a snadno dopočítáme:

$$\det B = 2.\det \begin{pmatrix} 0 & 0 & -5 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix} = 2.(-5).\det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 7 \end{pmatrix} - 2.1 \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= -10.(14-1+3+14) - 2.(4+1+12+4+4-3) = -344.$$

10. **Spočítejte nad tělesem racionálních čísel determinant obecné matice nxn, kde $d_{ii}=d_{ii+1}=1$ a $d_{i+1i}=-1$ a jinde je $d_{ij}=0$, tj.**

$$D_n = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Rozvedeme-li matici D_n podle prvního sloupce, dostaneme $D_n = D_{n-1} - \det A_{n-1}$. Rozvojem podle prvního řádku matice A_{n-1} zjistíme, že $\det A_{n-1} = -D_{n-2}$. Tedy platí rekurentní vzorec $D_n = D_{n-1} + D_{n-2}$. Přímým výpočtem zjistíme, že $D_1=1$ a $D_2=2$.

Další téma