

Jméno:

1	2	3	4	Σ

Zkouška z Kombinatoriky a grafů I — písemná část, 6. 2. 2025

Čas: 90 minut

- Nezapomeňte podepsat všechny papíry, které chcete odevzdat.
- Můžete psát i na papír se zadáním. Papír se zadáním je nutno podepsat a odevzdat, i když jste na něj nic nenapsali.
- Během písemné části zkoušky nemůžete odcházet ze zkouškové místnosti. Můžete ovšem písemnou část ukončit před časovým limitem.
- Nejsou povoleny kalkulačky, hodinky či jiná elektronika, ani přinesené písemné materiály.
- Všechny odpovědi je nutno zdůvodnit, pokud není řečeno jinak.
- Číselné výsledky (např. typu $\binom{126}{18} \cdot 23! - 17^6$) není nutno dále upravovat a dopočítávat.
- Tvzení z přednášky můžete používat bez důkazů, pokud není uvedeno jinak, nicméně je nutné uvést, které tvrzení používáte.

-
1. Necht' $(a_n)_{n=0}^\infty$ je posloupnost definovaná soustavou rekurencí

$$\begin{aligned} a_0 &= 2 \\ a_n &= 3a_{n-1} - 8 \quad \text{pro každé } n \geq 1. \end{aligned}$$

Najděte vytvořující funkci této posloupnosti a odvoďte vzorec pro a_n v uzavřeném tvaru. [10 bodů]

2. Zformulujte a dokažte co nejtěsnější horní a dolní odhad na prostřední kombinační číslo $\binom{2n}{n}$. (Rozumí se, že hodnotu $\binom{2n}{n}$ chceme odhadnout pomocí jednodušších výrazů, tedy bez použití faktoriálů a kombinačních čísel.) [10 bodů]
3. Zformulujte Ramseyovu větu ve verzi, která mluví o spočetných nekonečných hypergrafech. Nemusíte tu větu dokazovat, ale definujte pojmy a značení, které ve znění věty používáte (všeobecně užívané pojmy a značení, jako 'množina', 'funkce' nebo 'N', definovat nemusíte). [5 bodů]
4. Necht' $C \subseteq \mathbb{Z}_2^5$ je lineární kód, jehož bázi tvoří vektory $(1, 1, 1, 0, 0)$ a $(0, 0, 1, 1, 1)$. Určete minimální vzdálenost tohoto kódu (nezapomeňte výsledek zdůvodnit). Najděte jeho generující a kontrolní matici. Pokud některou z těchto matic neumíte najít, napište aspoň, jaké má rozměry. [5 bodů]