Funkce	Derivace	D_f	$D_{f'}$	Poznámka
$(x+a)^n$	$n(x+a)^{n-1}$	$\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}\setminus\{-a\}$ pro $n<0$)	$\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}\setminus\{-a\}$ pro $n<0$)	$a\in\mathbb{C}$ $n\in\mathbb{Z}$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\mathbb{R}^+$	$\mathbb{R}^+$	$\alpha\in\mathbb{R}$
e^{ax}	ae^{ax}	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$a\in\mathbb{C}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^+$	$\mathbb{R}^+$	
a^x	$a^x\ln a$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$a>0$
$\log_a x$	$\frac{1}{x\ln a}$	$\mathbb{R}^+$	$\mathbb{R}^+$	$a\in(0,1)$ $a\in(1,\infty)$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\left((2k-1)\frac{\pi}{2},(2k+1)\frac{\pi}{2}\right)$, $k\in\mathbb{Z}$	$\left((2k-1)\frac{\pi}{2},(2k+1)\frac{\pi}{2}\right)$, $k\in\mathbb{Z}$	
$\operatorname{cotg} x$	$\frac{-1}{\sin^2 x}$	$(k\pi,(k+1)\pi)$, $k\in\mathbb{Z}$	$(k\pi,(k+1)\pi)$, $k\in\mathbb{Z}$	
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$[-1,1]$	$(-1,1)$	
$\arccos x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$[-1,1]$	$(-1,1)$	
$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	
$\operatorname{arccotg} x$	$\frac{-1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	
$\sinh x$	$\cosh x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	
$\cosh x$	$\sinh x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	
$\operatorname{tgh} x$	$\frac{1}{\cosh^2 x}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	
$\operatorname{cotgh} x$	$\frac{-1}{\sinh^2 x}$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$	
$\operatorname{argsinh} x$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	
$\operatorname{argcosh} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$[1,\infty)$	$(1,\infty)$	
$\operatorname{argtgh} x$	$\frac{1}{1-x^2}$	$(-1,1)$	$(-1,1)$	
$\operatorname{argcotgh} x$	$\frac{1}{1-x^2}$	$\mathbb{R}\setminus[-1,1]$	$\mathbb{R}\setminus[-1,1]$	

Primitivní funkce	Definiční obor	Poznámka
$\int (x+a)^n \, dx = \frac{(x+a)^{n+1}}{n+1} + C$	$\mathbb{R} \setminus \{-a\}$, $n < 0$	$n \neq -1$, $n \in \mathbb{Z}$, $a \in \mathbb{C}$
$\int x^\alpha \, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$	$\mathbb{R}^+$	$\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
$\int \frac{1}{x+a} \, dx = \ln\lvert x+a\rvert + C$	$\mathbb{R} \setminus \{-a\}$	$a \in \mathbb{R}$
$\int e^{ax} \, dx = \frac{1}{a} e^{ax} + C$	$\mathbb{R}$	$a \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$
$\int \cos x \, dx = \sin x + C$	$\mathbb{R}$	
$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$	$\mathbb{R}$	
$\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \operatorname{tg} x + C$	$\left((2k-1)\frac{\pi}{2}, (2k+1)\frac{\pi}{2}\right)$, $k \in \mathbb{Z}$	
$\int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx = -\operatorname{cotg} x + C$	$\left(k\pi, (k+1)\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$	
$\int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \operatorname{arctg} x + C_1 = -\operatorname{arccotg} x + C_2$	$\mathbb{R}$	
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \arcsin x + C_1 = -\arccos x + C_2$	$(-1, 1)$	
$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \, dx = \operatorname{argsinh} x + C = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + C$	$\mathbb{R}$	
$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \, dx = \operatorname{argcosh} \lvert x\rvert \cdot \operatorname{sign} x + C = \ln(\lvert x\rvert + \sqrt{x^2-1}) \cdot \operatorname{sign} x + C$	$\mathbb{R} \setminus [-1, 1]$	
$\int \cosh x \, dx = \sinh x + C$	$\mathbb{R}$	
$\int \sinh x \, dx = \cosh x + C$	$\mathbb{R}$	

Důležité substituce: převod na racionální funkce

Jsou-li P, Q polynomy $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$, pak $R := \frac{P}{Q}$ nazveme racionální funkce jedné reálné proměnné, platí $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$.

Obecněji, jsou-li P, Q polynomy dvou reálných proměnných, tj. $P, Q : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, kde $P(x,y) = \sum_{0 \le i+j \le n} a_{ij} x^i y^j$ a $Q(x,y) = \sum_{0 \le i+j \le m} b_{ij} x^i y^j$, pak $R := \frac{P}{Q}$ nazveme racionální funkce dvou reálných proměnných, platí $R(x,y) = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$.

$\boxed{\textbf{(I)} \qquad \int \mathbf{R}(\mathrm{e}^{\alpha x})\mathrm{d}x}$

Substituce: $y = e^{\alpha x}$, $\quad x \in \mathbb{R}$

Tvar derivace: $dx = \frac{1}{\alpha y} dy$

Výsledek: $\int R(y) \frac{1}{\alpha y} dy$

$\boxed{\textbf{(II)} \qquad \int \frac{\mathbf{R}(\ln \mathbf{x})}{\mathbf{x}} \mathrm{d}\mathbf{x}}$

Substituce: $y = \ln x$, $\quad x > 0$

Tvar derivace: $\frac{dx}{x} = dy$

Výsledek: $\int R(y) dy$

$\boxed{\textbf{(III)} \qquad \int \mathbf{R}\left(\mathbf{x}, \left(\frac{\mathbf{ax+b}}{\mathbf{cx+d}}\right)^{\frac{1}{s}}\right)\mathrm{d}\mathbf{x}}$

Substituce: $t = \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{s}}$

Podmínky: $ad - bc \neq 0$; $\qquad s = 2k \implies \frac{ax+b}{cx+d} > 0$; $\qquad s = 2k-1 \implies x \neq -\frac{d}{c}$

Inverze: $x = \frac{-dt^s + b}{ct^s - a}$

Tvar derivace: $dx = (ad - bc)s \frac{t^{s-1}}{(ct^s - a)^2} dt$

Výsledek: $(ad - bc)s \int \frac{R(t^s, t)t^{s-1}}{(ct^s - a)^2} dt$

$\boxed{\textbf{(IV)} \qquad \int \mathbf{R}(\mathbf{x}, \sqrt{\mathbf{ax^2+bx+c}})\mathrm{d}\mathbf{x}}$ $\qquad$ **Eulerovy substituce**

Čtyři netriviální případy (někdy i dva najednou).

(1) $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, $x_1 < x_2$, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$;

Substituce: $t = \left(\frac{x - x_1}{x - x_2}\right)^{\frac{1}{2}}$ vede k (III)

(2) $a > 0$

Substituce: $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a}x + t \implies x = (t^2 - c)/(b - 2\sqrt{a}t)$

(3) $c > 0$

Substituce: $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{c} + tx \implies x = (2\sqrt{c}t - b)/(a - t^2)$

(4) $a \le 0$ a $ax^2 + bx + c$ nemá v $\mathbb{R}$ kořen ($\implies c \le 0$): odmocnina není v $\mathbb{R}$ pro žádné x definována.

(V) $\displaystyle\int \mathbf{R}(\cos \mathbf{x}, \sin \mathbf{x}) \mathbf{dx}$

Goniometrické substituce

Substituce: $y = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ $\qquad x \neq \pi + 2k\pi\,, k \in \mathbb{Z}$

Inverze: $x = 2 \operatorname{arctg} y$ $\qquad$ *Tvar derivace:* $dx = \frac{2}{1+y^2} dy$

$$\text{cosinus:} \qquad \cos x = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - y^2}{1 + y^2}$$

$$\text{sinus:} \qquad \sin x = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2y}{1 + y^2}$$

Zjednodušení:

(1) $R(-\cos x, \sin x) = -R(\cos x, \sin x) \implies$ *Substituce:* $y = \sin x$

(2) $R(\cos x, -\sin x) = -R(\cos x, \sin x) \implies$ *Substituce:* $y = \cos x$

(3) $R(-\cos x, -\sin x) = R(\cos x, \sin x) \implies$ *Substituce:* $y = \operatorname{tg} x,\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

$$\cos^2 x = \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1 + y^2}$$

$$\sin^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{y^2}{1 + y^2}$$

$$\sin x \cos x = \frac{\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{y}{1 + y^2}$$

(VI) $\displaystyle\int \mathbf{x}^{\mathbf{m}}(\mathbf{a} + \mathbf{b}\mathbf{x}^{\mathbf{n}})^{\mathbf{p}} \mathbf{dx}\,, \qquad \mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{p} \in \mathbb{Q}$

Čebyševovy substituce

Umíme řešit pomocí elementárních funkcí pouze v následujících třech případech:

(1) $p \in \mathbb{Z}$. Pak položme $m = m'/\ell$, $n = n'/\ell$, kde m', n' a $\ell \in \mathbb{Z}$, $\ell > 0$.

Substituce: $t = x^{\frac{1}{\ell}}$

(2) $(m+1)/n \in \mathbb{Z}$, $p = k/s$, $k, s \in \mathbb{Z}$

Substituce: $t = (a + bx^n)^{\frac{1}{s}}$

Inverze: $x = \frac{(t^s - a)^{1/n}}{b^{1/n}}$ $\qquad$ *Tvar derivace:* $dx = \frac{1}{nb^{1/n}}(t^s - a)^{\frac{1}{n} - 1} s t^{s-1} dt$.

Výsledek:
$$\int x^m (a + bx^n)^p dx = \int \frac{1}{b^{\frac{m}{n}}}(t^s - a)^{\frac{m}{n}} t^k \frac{1}{nb^{\frac{1}{n}}}(t^s - a)^{\frac{1}{n} - 1} s t^{s-1} dt$$
$$= \frac{s}{nb^{\frac{m+1}{n}}} \int t^{s+k-1}(t^s - a)^{\frac{m+1}{n} - 1} dt$$

(3) $\frac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z}$, $p = k/s$, $k, s \in \mathbb{Z}$

Substituce: $t = (ax^{-n} + b)^{\frac{1}{s}}$

Inverze: $x = \left(\frac{a}{t^s - b}\right)^{\frac{1}{n}}$ $\qquad$ *Tvar derivace:* $dx = -\frac{a^{1/n}}{n}(t^s - b)^{-\frac{1}{n} - 1} s t^{s-1} dt$

Výsledek:
$$\int x^m (a + bx^n)^p dx = \int x^m x^{np} (ax^{-n} + b)^{\frac{k}{s}} dx$$
$$= \int \left(\frac{a}{t^s - b}\right)^{\frac{m}{n}} t^k \left(\frac{a}{t^s - b}\right)^p \frac{a^{\frac{1}{n}}}{-n}(t^s - b)^{-\frac{1}{n} - 1} s t^{s-1} dt$$
$$= -\frac{a^{\frac{m+1}{n} + p} s}{n} \int t^{k+s-1}(t^s - b)^{-(\frac{m+1}{n} + p - 1)} dt$$

Aplikace určitého integrálu

1. Obsah oblasti omezené křivkami

   - $a \leq x \leq b$, $g(x) \leq y \leq f(x)$
   $$S = \int_a^b (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x$$
   - $a \leq x \leq b$, $0 \leq y \leq f(x)$, kde $y = f(x)$ je dáné parametricky $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, φ, ψ spojité na $[t_1, t_2]$, φ ryze monotónní, φ' spojitá, $\varphi(t_1) = a$, $\varphi(t_2) = b$, ψ nezáporná na $[t_1, t_2]$
   $$S = \int_{t_1}^{t_2} \psi(t)|\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t$$
   - Speciálně $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$, $0 \leq r \leq f(\theta)$
   $$S = \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} f^2(\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

2. Objemy těles

   - Rotační těleso vzniklé rotací oblasti $a \leq x \leq b$, $g(x) \leq y \leq f(x)$, $a \geq 0$
     - kolem osy x
     $$V = \pi \int_a^b (f^2(x) - g^2(x))\,\mathrm{d}x$$
     - kolem osy y
     $$V = 2\pi \int_a^b (xf(x) - xg(x))\,\mathrm{d}x$$
   - $y = f(x)$ popsáno parametricky viz výše, $g(x) = 0$
     - kolem osy x
     $$V = \pi \int_{t_1}^{t_2} \psi^2(t)|\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t$$
     - kolem osy y
     $$V = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} \psi(t)|\varphi(t)\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t$$

- $0 \le \theta_1 \le \theta \le \theta_2 \le \pi$, $0 \le r \le f(\theta)$ kolem osy x

$$V = \frac{2}{3}\pi \int_{\theta_1}^{\theta_2} f^3(\theta) \sin\theta \,\mathrm{d}\theta$$

- Je-li $S(x)$ obsah průřezu, $a \le x \le b$

$$V = \int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x$$

3. Délka křivky

- Parametrický popis $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, φ', ψ' spojité

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\,\mathrm{d}t$$

- speciálně $\varphi = x$, $\psi = f(x)$

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x$$

- $r = f(\theta)$

$$l = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{f^2(\theta) + (f'(\theta))^2}\,\mathrm{d}\theta$$

4. Obsah rotačních ploch

- Rotace parametricky popsané plochy (viz výše) kolem osy x

$$S = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} |\psi(t)|\sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\,\mathrm{d}t$$

- Speciálně $\varphi = x$, $\psi = f(x)$

$$S = 2\pi \int_a^b |f(x)|\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x$$

- $r = f(\theta)$, f' spojitá

$$S = 2\pi \int_{\theta_1}^{\theta_2} |f(\theta)| \sin\theta \sqrt{f^2(\theta) + (f'(\theta))^2}\,\mathrm{d}\theta$$

5. Statické momenty, momenty setrvačnosti, těžiště

- Oblast omezená $a \le x \le b$, $g(x) \le y \le f(x)$, f, g spojité, $\sigma(x)$ plošná hustota

  Statické momenty vzhledem k ose x resp. y

$$M_x = \frac{1}{2}\int_a^b \sigma(x)(f^2(x)-g^2(x))\,\mathrm{d}x \quad M_y = \int_a^b \sigma(x)x(f(x)-g(x))\,\mathrm{d}x$$

  Těžiště $T = [\xi, \eta]$, kde

$$\xi = \frac{M_y}{M} \qquad \eta = \frac{M_x}{M} \quad M = \int_a^b \sigma(x)(f(x)-g(x))\,\mathrm{d}x$$

  Momenty setrvačnosti vzhledem k osám x, y, z

$$I_x = \frac{1}{3}\int_a^b \sigma(x)(f^3(x)-g^3(x))\,\mathrm{d}x$$
$$I_y = \int_a^b \sigma(x)x^2(f(x)-g(x))\,\mathrm{d}x$$
$$I_z = I_x + I_y$$

- **Hmotný oblouk** $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ s lineární hustotou $\mu(t)$, $t \in [t_1, t_2]$, φ', ψ' spojité

  Statické momenty vzhledem k osám x, y

$$M_x = \int_{t_1}^{t_2} \mu(t)\psi(t)\sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\,\mathrm{d}t$$
$$M_y = \int_{t_1}^{t_2} \mu(t)\varphi(t)\sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\,\mathrm{d}t$$

  Těžiště $T = [\xi, \eta]$, kde

$$\xi = \frac{M_y}{M} \qquad \eta = \frac{M_x}{M} \quad M = \int_{t_1}^{t_2} \mu(t)\sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\,\mathrm{d}t$$

  Momenty setrvačnosti vzhledem k osám x a y jsou

$$I_x = \int_{t_1}^{t_2} \mu(t)\psi^2(t)\sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\,\mathrm{d}t$$
$$I_y = \int_{t_1}^{t_2} \mu(t)\varphi^2(t)\sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\,\mathrm{d}t$$

- Rotační těleso $a \le x \le b$, $0 \le g(x) \le \sqrt{y^2+z^2} \le f(x)$ s objemovou hustotou $\gamma(x)$

  Statické momenty vzhledem k souřadnicovým rovinám

$$M_{xy} = M_{xz} = 0 \qquad M_{yz} = \pi \int_a^b \gamma(x) x (f^2(x) - g^2(x))\,\mathrm{d}x$$

  Těžiště

$$T = (\xi, 0, 0), \quad \xi = \frac{M_{yz}}{M} \quad M = \pi \int_a^b \gamma(x)(f^2(x) - g^2(x))\,\mathrm{d}x$$

  Moment setrvačnosti vzhledem k ose x je

$$I_x = \frac{1}{2}\pi \int_a^b \gamma(x)(f^4(x) - g^4(x))\,\mathrm{d}x$$