Lineární algebra II (pro fyziky)

Jordanův tvar

Dalibor Šmíd

MFF UK

Matice z $\mathbb{C}^{k\times k}$ tvaru

$$J_{\lambda,k} := \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

se nazývá *Jordanova buňka*. Je-li $f \in \mathrm{End}(V)$ a $C = (v_i)_1^k$ báze V taková, že $f_\lambda := f - \lambda\,\mathrm{Id}$ spojuje vektory báze do *řetízku*

$$v_k \overset{f_\lambda}{\longmapsto} v_{k-1} \overset{f_\lambda}{\longmapsto} \dots \overset{f_\lambda}{\longmapsto} v_2 \overset{f_\lambda}{\longmapsto} v_1 \overset{f_\lambda}{\longmapsto} o,$$

tj. $f(v_k) = (f_\lambda + \lambda\,\mathrm{Id})(v_k) = v_{k-1} + \lambda v_k$, pak $[f]_C^C = J_{\lambda,k}$ ♣. Ukážeme, že pro každý endomorfismus V existuje báze B ve V složená z řetízků. Vůči této bázi je $[f]_B^B$ blokově diagonální matice, jejíž diagonální bloky jsou Jordanovy buňky.

Nalezení této *Jordanovy báze* a *Jordanova tvaru* endomorfismu či matice umožňuje počítat mocniny matic, protože ♣

$$(J_{\lambda,k})^n = (\lambda E + J_{0,k})^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \lambda^{n-i} (J_{0,k})^i =$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \binom{n}{2}\lambda^{n-2} & \dots & & \binom{n}{k-1}\lambda^{n-k+1} \\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \dots & & \binom{n}{k-2}\lambda^{n-k+2} \\ 0 & 0 & \lambda^n & \ddots & & \binom{n}{k-3}\lambda^{n-k+3} \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$$

Jordanův tvar je zobecněním diagonalizace matice. Hodí se k řešení některých diferenciálních a diferenčních rovnic a pro odvození mnoha důležitých výsledků. Pro numerické výpočty se nehodí, struktura řetízků není numericky stabilní.

Invariantním podprostorem endomorfismu $f \in \mathrm{End}(V)$ je každý $W \leq V$ takový, že $f(W) \subset W$. Invariantními podprostory jsou například $\mathrm{Ker}\, f$, $\mathrm{Im}\, f$ a lineární obal vektorů libovolného řetízku ♣. Jsou-li U, W invariantní podprostory, pak jsou jimi i $U \cap W$ a $U + W$ ♣. Je-li W invariantní podprostor endomorfismů f i g, pak je invariantní i pro endomorfismus $rf + sg$, kde $r, s \in \mathbb{F}$, speciálně tedy i pro $f_\lambda = f - \lambda \,\mathrm{Id}$ ♣. Zvolíme-li bázi $B = (C, B')$ ve V tak, že C je báze W, pak

$$[f]_B^B = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & G \end{pmatrix}, \text{ přičemž } A = [\pi \circ f \circ \iota]_C^C$$

Označíme $f_{|W} := \pi \circ f \circ \iota$ *zúžení* f *na podprostor* W. Charakteristický polynom $\det(f - \lambda \,\mathrm{Id})$ je roven

$$\det(A - \lambda E) \det(G - \lambda E) = \det(f_{|W} - \lambda \,\mathrm{Id}) \det(G - \lambda E)$$

Tedy spektrum $f_{|W}$ je podmnožinou spektra f. Je-li W vlastní podprostor f s vlastním číslem μ, pak $A = \mu E$, tedy algebraická násobnost μ je větší nebo rovna $\dim W$, násobnosti geometrické.

Lemma

Nechť $B = (B_1, \ldots, B_p)$ je posloupnost řetízků pro $f \in \mathrm{End}(V)$. B je LN, právě když je LN posloupnost $(v_1^1, \ldots, v_1^p)$ jejich počátečních vektorů.

Netriviální implikaci $\Leftarrow$ dokážeme indukcí podle celkového počtu vektorů v B. Nechť $B_1, \ldots, B_q$ jsou řetízky spojené f_λ, tedy jejich počáteční vektory $v_1^1, \ldots, v_1^q$ splňují $(f - \lambda\,\mathrm{Id})(v_1^i) = o$, čili jsou to vlastní vektory f s vlastním číslem λ. Je-li $i \leq q$, pak

$$f_\lambda\left(\sum_{j=1}^{k_i} r_j^i v_j^i\right) = \sum_{j=2}^{k_i} r_j^i v_{j-1}^i = \sum_{j=1}^{k_i-1} r_{j+1}^i v_j^i \in B_i' := B_i \setminus \{v_k^i\}$$

LK tvaru $\sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^{k_i} r_j^i v_j^i + \sum_{i=q+1}^p \sum_{j=1}^{k_i} r_j^i v_j^i$ zobrazí f_λ na LK vektorů z $(B_1', \ldots, B_q', B_{q+1}, \ldots, B_p)$, kde koeficient u v_j^i pro $i \leq q$ je r_{j+1}^i ♣. Položíme-li původní LK rovnu o, pak z indukčního předpokladu $r_j^i = 0$ pro všechna $i \leq q$ a $j \geq 2$. Analogicky pro zbylá vlastní čísla plyne, že $r_j^i = 0$ i pro $i > q$. Pak má ale LK tvar $\sum_{i=1}^p r_1^i v_1^i = o$ a tedy i $r_1^i = 0$ pro všechna i.

Ke konstrukci Jordanovy báze tedy potřebujeme najít LN posloupnost vlastních vektorů a doplnit každý z nich na co nejdelší řetízek. Např. pro matici

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

spočteme $\sigma(A) = \{3\}$, $\dim \operatorname{Ker}(A - 3E) = 2$ a $(A - 3E)^3 = 0$, $(A - 3E)^2 \neq 0$. Volbou $\mathbf{v}_3^1 := (1, 0, 0, 0)^T$ získáme řetízek

$$\overset{\mathbf{v}_3^1=}{(1,0,0,0)^T} \overset{A-3E}{\longmapsto} \overset{\mathbf{v}_2^1:=}{(0,0,0,1)^T} \overset{A-3E}{\longmapsto} \overset{\mathbf{v}_1^1:=}{(-1,1,0,1)^T} \overset{A-3E}{\longmapsto} \mathbf{o}$$

Vektor $\mathbf{v}_1^1$ doplníme na bázi $\operatorname{Ker}(A - 3E)$ např. vektorem $\mathbf{v}_1^2 := (0, 0, 1, 0)^T$. Z lemmatu je $(\mathbf{v}_1^1, \mathbf{v}_2^1, \mathbf{v}_3^1, \mathbf{v}_1^2)$ LN a je to tedy hledaná Jordanova báze. Jordanův tvar je $\operatorname{diag}(J_{3,3}, J_{3,1})$.

Jak ale víme, že tento postup nemůže selhat a že zaručeně nalezne dostatečně velkou množinu vektorů, aby to byla báze?

Věta (O existenci Jordanova tvaru)

Nechť V je komplexní vektorový prostor konečné dimenze, $f \in \operatorname{End} V$. Pak existuje báze B prostoru V taková, že $[f]^B_B$ je matice v Jordanově tvaru.

Důkaz.

Předpokládejme, že $n = \dim V > 1$ a pro všechny prostory nižší dimenze tvrzení platí. Pro $\lambda \in \sigma(f)$ jsou $\operatorname{Ker} f_\lambda$ a $\operatorname{Im} f_\lambda$ f-invariantní podprostory a $\dim \operatorname{Im} f_\lambda < n$ ♣. Z IP najdeme Jordanovu bázi C endomorfismu $f|_{\operatorname{Im} f_\lambda}$ v prostoru $\operatorname{Im} f_\lambda$. Nechť je v C právě r řetízků s vlastním číslem λ. Protože $C \subset \operatorname{Im} f_\lambda$, lze ke každému koncovému vektoru $v^i_{k_i}$ takového řetízku najít nějaký jeho vzor $v^i_{k_i+1}$ v zobrazení f_λ. Lze také doplnit počáteční vektory těchto řetízků na bázi $\operatorname{Ker} f_\lambda$, tím získáme dalších $\dim \operatorname{Ker} f_\lambda - r$ vektorů tvořících řetízky délky 1 spojené f_λ. Tím jsme z C získali novou posloupnost řetízků B, v níž je o $\dim \operatorname{Ker} f_\lambda = n - |C|$ vektorů více, ale zároveň jsou její počáteční vektory stále LN ♣. Podle lemmatu je B LN a jelikož má n prvků, je to báze V. □

Označme $A = [f]_B^B = \mathrm{diag}(J, K)$, kde blok J zahrnuje všechny Jordanovy buňky příslušející vlastnímu číslu λ. Pak existuje $k \in \mathbb{N}$, že k-tá mocnina matice $[f_\lambda]_B^B$ je

$$\begin{pmatrix} (J-\lambda E)^k & 0 \\ 0 & (K-\lambda E)^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix},$$

kde R je regulární matice. Číslo k je délka nejdelšího řetízku z $B_1, \dots B_q$, podprostor $Z_\lambda := \mathrm{Ker}(f_\lambda)^k = \langle B_1, \dots, B_q \rangle$ nazýváme *zobecněný vlastní podprostor* f příslušný vlastnímu číslu λ. Platí

- $Z_\lambda \oplus \mathrm{Im}(f_\lambda)^k = V$, $\dim Z_\lambda$ je rovno alg. násobnosti λ ♣
- Je-li $\sigma(f) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$, pak $V = Z_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus Z_{\lambda_m}$ ♣
- Počet řetízků příslušných λ s délkou alespoň j je roven $\dim \mathrm{Ker}(f_\lambda)^j - \dim \mathrm{Ker}(f_\lambda)^{j-1}$ ♣

Poslední tvrzení znamená, že jsou délky řetízků určeny nezávisle na volbě reprezentace f vzhledem k nějaké bázi. Jordanův tvar f je tedy určen jednoznačně až na pořadí Jordanových buněk. Jordanova báze jednoznačná není (ani pro f diagonalizovatelný).

Při hledání Jordanovy báze postupujeme po jednotlivých Z_λ, v každém nejprve zjistíme strukturu řetízků z dimenzí $\mathrm{Ker}(f_\lambda)^j$. Najděme nějakou bázi $\mathrm{Ker}\, f_\lambda \cap \mathrm{Im}(f_\lambda)^{k-1}$, označme ji jako „nové počáteční vektory“ a položme $j = k - 1$. Konstrukci řetízků můžeme popsat v následujících krocích:

1. Prohlásíme nové počáteční vektory za staré počáteční vektory a prodloužíme je na řetízky délky $j + 1$.
2. Doplníme staré počáteční vektory novými počátečními vektory na bázi $\mathrm{Ker}\, f_\lambda \cap \mathrm{Im}(f_\lambda)^{j-1}$
3. Je-li $j = 1$, skončíme, jinak snížíme j o 1 a jdeme na bod 1.

Tento postup zaručuje, že vzniknou řetízky s LN počátečními vektory a správnými délkami. Pro malé matice je někdy výhodnější konstruovat řetízky od konce, protože hledání obrazu v f_λ je jednodušší než hledání vzoru v něm. Pak ale nemusí počáteční vektory vyjít LN a je nutné to dodatečně ověřit.

Matice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -3 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ má $\sigma(A) = \{1, 2\}$ a vl. podprostory $V_1 = \mathrm{Ker}(A - E) = \langle (1, 2, -1) \rangle, V_2 = \mathrm{Ker}(A - 2E) = \langle (1, 3, -1) \rangle$.
Protože 1 má algebraickou násobnost 1, je V_1 už roven Z_1.
Prostor $\mathrm{Ker}(A - 2E)^2 = \langle (0, 0, 1), (1, 3, 0) \rangle$ je roven Z_2, protože už má dimenzi rovnou algebraické násobnosti vlastního čísla 2.
Dimenze V_2 je 1, bázi Z_2 tedy bude tvořit jeden řetízek délky 2.
Vektory v něm můžeme najít buď jako (např.) $(1, 3, -1)$ a nějaký jeho vzor v F_{A-2E}, nebo jako (např.) $(0, 0, 1)$ a nějaký jeho obraz v F_{A-2E}. Obraz se spočte snáz a je roven $(1, 3, -1)$.
Nalezená Jordanova báze a Jordanův tvar jsou pak

$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \quad J_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Mocniny matice A lze spočíst jako $A^n = R J_A^n R^{-1}$, $R := [\mathrm{Id}]_B^K$.