Jméno:

1	2	3	4	$\sum$

Zkoušková písemka z Matematické analýzy I
10. 9. 2024

Čas: 90 minut.

- *Nezapomeňte podepsat všechny papíry, které chcete odevzdat. Nemusíte odevzdávat papíry s pomocnými výpočty.*
- *Můžete psát i na papír se zadáním. Papír se zadáním je nutno podepsat a odevzdat, i když jste na něj nic nenapsali.*
- *Není povoleno používat kalkulačky a jinou elektroniku ani přinesené písemné materiály.*
- *Své odpovědi musíte zdůvodnit.*
- *Tvrzení z přednášky můžete používat bez důkazů, pokud není uvedeno jinak, je však nutno uvést, které tvrzení používáte.*

1. Definujme funkci $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ předpisem
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + \frac{1}{x} & \text{pro } x \neq 0 \\ 0 & \text{pro } x = 0. \end{cases}$$
   (a) [3 b.] V kterých bodech $\mathbb{R}$ je tato funkce spojitá? Pokud je v nějakém bodě nespojitá, je v tomto bodě aspoň spojitá zleva nebo zprava?
   (b) [3 b.] Najděte všechny lokální a globální extrémy této funkce a určete, o jaký druh extrému se jedná (zda globální či jen lokální, zda minimum nebo maximum).
   (c) [4 b.] Najděte maximální intervaly, na nichž je funkce f konvexní, a maximální intervaly, na nichž je konkávní.

2. (a) [3 b.] Napište definici pojmu *limita* posloupnosti čísel (a_n) a napište, co znamená, že limita je *vlastní.*
   (b) [4 b.] Nechť $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ je posloupnost čísel. Definujme posloupnost $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ předpisem
$$b_n = \frac{1}{3}(a_n + a_{2n} + a_{3n}).$$
   Rozhodněte, zda platí následující tvrzení:
   “Pokud má posloupnost $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ vlastní limitu L, pak i posloupnost $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ má nutně tutéž limitu L.”
   (c) [3 b.] Spočítejte limitu posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ definované jako
$$a_n = n \cdot \sin\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

3. (a) [3 b.] Napište, jak je definována *derivace* funkce f v bodě $A \in \mathbb{R}$.
   (b) [3 b.] Zformulujte Rolleovu větu. Nemusíte ji dokazovat.
   (c) [4 b.] Nechť f a g jsou dvě funkce definované na intervalu $[A, B]$ pro nějaká dvě reálná čísla $A < B$. Předpokládejme, že f i g mají vlastní derivaci v každém bodě otevřeného intervalu (A, B) a že navíc platí $f(A) = g(A)$ a $f(B) = g(B)$. Dokažte, že existuje bod $C \in (A, B)$, pro nějž platí $f'(C) = g'(C)$. (Nápověda: zde vám může pomoci uvažovat funkci $g(x) - f(x)$.)

4. (a) [3 b.] Napište definici horní a dolní Riemannovy sumy a horního a dolního Riemannova integrálu.
   (b) [3 b.] Najděte příklad funkce $f\colon [-1, 1] \to \mathbb{R}$, jejíž horní a dolní Riemannův integrál mají na intervalu $[-1, 1]$ různé hodnoty. Nezapomeňte zdůvodnit, proč jsou ty hodnoty různé.
   (c) [4 b.] Určete hodnotu následujícího integrálu:
$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \exp(\sin^2 x) \cdot \sin x \cdot \cos x \, dx$$