Mechanika hm. bodov

1) Základní kinematické veličiny, Newtonove pohyb. zákony
2) Inerciálne a neinerciálne sústavy
3) Prvá a druhá impulzová věta
4) Keplerove zákony
5) Harmonický oscilátor
6) Pohyb s vazbami, d'Almbertov princip
7) Lagrangeove rovnice II. druhu
8) Hamiltonovy kanonické rovnice, Poissonovy závorky
9) Hamiltonov varčační princip

Mechanika tuhého telesa

10) Eulerove úhly a Eulerove kinematické rovnice
11) Tenzor setrvačnosti
12) Eulerove dynamické rovnice, pohyb jednoduch. setrvačníka

Mechanika kontinua

13) Tenzor napätí a deformace, Hookov zákon
14) Rovnice struny a její řešení
15) Pohybová rov. ideální tekutiny, rov. kontinuity, Bernoulliho rov.
16) Viskózna tekutina, Navier-Stokesova rov., laminární a turbolentní p.

Speciální teorie relativity

17) Otázka éteru a Michelsonov-Morleyov experiment
18) Výchozí principy teorie relativity, Lorentzova transformace
19) Minkowského prostoročas, svetelný kužel
20) Relat. pohybová rovnice, ekvivalence hmotnosti a energie
21) Maxwellovy rovnice ve M^4

Termodynamika a stat. fyz.

22) Teplo, teplota, tepelná kapacita, tlak
23) Vnitřní energie, termodynamické potenciály
24) Hlavní zákony termodynamiky, entropie
25) Ideálny plyn, stavová rovnice, Carnotov cyklus
26) Fázový prostor, rozdelovací funkce, Liouvillova rovnice
27) Maxwellovo-Boltzmannovo rozdelení
28) Základní stat. rozdelení, stat. entropie

Elektrostat., stac. el. a mag. pole

29) Elektrostat. pole ve vákuu
30) Elektrostat. pole v prítomnosti vodičov a v dielektrikách
31) Stac. elektrické pole a elektrický proud

32) Stac. magnetické pole
33) Mag. pole v látkovom prostředí

Elektrodynamika

34) Elektromag. indukce
35) Kvazistac. elektrické a magnetické pole
36) Elektrické obvody
37) Maxwellovy rovnice
38) Elektromagnetické potenciály a ich vlastnosti
39) Zákony zachování v teorii elmag. pole

Elektromagnetické vlny

40) Vlnová rovnice, rovinná elmag. vlna
41) Polarizační vlastnosti elmag. vln
42) Šíření elmag. vln v látkovom prostředí
43) Odraz a lom elmag vln na rozhraní dvou prostředí
44) Elmag vlny ve vlnovodech
45) Dipólové elmag. záření

Optika

46) Interference světla, optické interferometry
47) Koherence světla
48) Ohyb světla
49) Šíření světla v anizotropných látkach
50) Geometrická optika
51) Optické zobrazovací přístroje
52) Spektrální přístroje a základní metody optickej spektro.
53) Základy holografie
54) Princip laseru
55) Tepelné záření, zákony záření absolutne černého telesa

Strukt. atomů, molekul a kond. l.

56) Dualismus vlna-častice, fotoefekt, Comptonov rozptyl
57) Bohrův model atomu
58) Základní typy vazeb mezi atomy, meziatom. potenciál
59) Popis symetrie molekul a krystalů pomocí grup, kvazikrystaly
60) Krystalová strukt. látek, základní typy mřížī, prostorové grupy
61) Exp. studium strukt. látek pomocí rtg, dif. podm, strukt. fakt.
62) Einsteinov a Debyeov model vibrací atomů v kond. l.
63) Molekulové orbitaly, metoda LCAO, hybridizace orbitalů
64) Model volných a téměř volných e⁻, pásová strukt., Blochov tlm

Formalizmus QM

65) Popis stavů kvant. syst.
66) Repr. fyz. veličin, distribuce a sp. spektrum, stac. SchR
67) Souřadnicová, impulsová a maticová repr. QM
68) Variační metoda a stac. poruchová metoda hledání vázaných st.

Kvantová dynamika

69) Nestacionární SchR, rovnice kontinuity, Ehrenfestovy rovnice
70) Evoluce obecného kvant. systému, kvantové měření
71) Integrály pohybu, kvantová čísla, symetrie v QM

Jednoduché kvantové syst.

72) Kvant. energie pro vázanou částici: ⊔ jáma a LHO
73) Volná částice, vlnové balíky, průchod částice poten. bariérou
74) Orbitální a spinový mom. hybnosti, základy skládání.
75) Částice ve sférickém potenciálu, atom vodíku
76) Částice v elmag. poli: Zeemanovo štěpení, Larmorova precese
77) Systémy s více částicemi: nerozlišitelnost, Pauli, jednočás. app.

Jaderné záření

78) Interakce záření s látkou
79) Detekce a spektroskopie jaderného záření
80) Využití jaderného záření

Atómové jádro

81) Základní vlastnosti a charakteristiky jádra
82) Jaderné síly, vazbová energie jádra
83) Radioaktivita, jaderné reakce
84) Jaderné zdroje energie

Časticová fyzika

85) Fundamentální částice
86) Hadrony
87) Základní interakce mezi částicemi, zákony zachování
88) Částicové experimenty

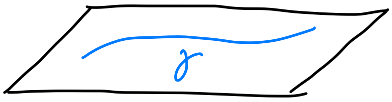
Mechanika hmotných bodů

Základní kinematické veličiny, Newtonovy pohybove zákony

- kinematika – opis pohybu telesa
- základné pojmy:
  1) prostor – spojitý, homogénny, izotropický, euklidovský, 3D
  2) čas – spojitý, synchronní, 1D, rovnomerne plynoucí
  3) hmotný bod – bezrozmerný objekt s hmotností

Trajektorie

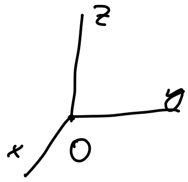
- parametrická krivka $\gamma: \mathbb{R} \to \mathbb{E}^3$
  → parameter – spojitý, značsa čas alebo dĺžka



- dráha s = dĺžka trajektorie

Sústava súradníc

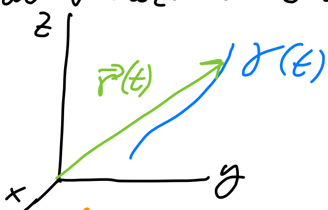
- vektorová báze v $\mathbb{R}^3$ a bod = počiatok O
- voči nej meriame kinem. veličiny hm. bodu



Polohový vektor

- vektor popisujúci polohu hm. bodu v každom čase

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$$



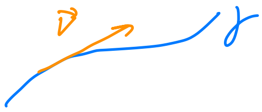
Rychlost

- zmena polohy za čas

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}(t) = \frac{d\vec{r}}{ds}\frac{ds}{dt} = \vec{\tau}\, v(t)$$

tečný vektor

- tečna ku trajektorii



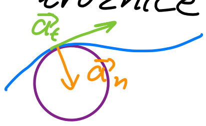
Zrýchlenie

- zmena rýchlosti za čas

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \underbrace{\frac{dv}{dt}\vec{\tau}}_{\text{tečné}} + \underbrace{\frac{v^2}{R}\vec{n}}_{\text{normálové}}$$

R.. polomer oskulační kružnice

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{\vec{n}}{R}$$



Pohybové zákony

1) Existuje vzťažný systém (inerciální) voči nemu sa každý izolovaný hmotný bod pohybuje rovnomerne priamočiaro.
2) Pro každý hmotný bod existuje vektorová funkce $\vec{F}$ (sila), že jeho pohyb je voči inerciálnemu vzťažnému systému daný $m\ddot{x} = \vec{F}$.
3) Vzájomné silové pôsobenie dvoch telies sú rovnako veľké, ale opačne orientované

ad 1) izolovaný hm. bod → žiadne pravé sily
definuje inerciálny vz. systém

ad 2) definuje silu $\vec{F}$ a konštantu úmery m → hmotnost
zobecnenie na premenlivú hmotnost: $\vec{F} = \frac{d}{dt}\vec{p}$, $\vec{p} = m\vec{v}$ … hybnost
DE 2. řádu s netriv. pravou stranou $\vec{F}$

ad 3) zákon akce a reakce

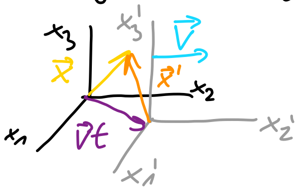
Inerciální a neinerciální soustavy

• inerciálna vz. sústava – definovaná 1. NZ:

> Existuje vzťažný systém (inerciálny) voči ktorému sa každý izolovaný hm. bod pohybuje priamočiaro.

• trieda vzťažných systémov je navzájom spojená Galileovou transformací:

$$\vec{x}\,' = \vec{x} - \vec{v}t$$



$\vec{v}$... rychlost jednej súst. voči druhej

• v i.s.s platí $\sum_{\text{prave}} \vec{F} = 0 \iff \frac{d\vec{p}}{dt} = 0$

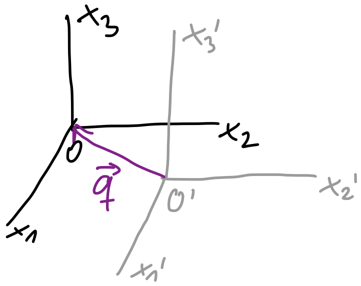
• v n.i.s.s táto ekvivalence neplatí, teda body sa pohybujú so zrýchlením aj keď na ne nepôsobia žiadne sily

↳ pridaním zdanlivej, setrvačnej sily $\vec{F}_s$ už platí $\vec{F}_s + \sum_{\text{prav}} \vec{F} = 0 \iff \frac{d\vec{p}}{dt} = 0$

↳ 2. NZ:

$$\vec{F}_s = -m\vec{a}_u \rightarrow \vec{a}_u \text{... unášivé zrychlení}$$

Zrychlená sústava



$\ddot{\vec{q}} = \vec{a}_{O'}$ ... čiarkovaná sústava sa pohyb. so zrychlením

$\vec{a} = \vec{a}_{O'} + \vec{a}\,' \implies \vec{a}_u = \vec{a}_{O'}$

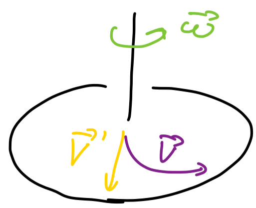
Rotujúcí sústava

• pre obecný vektor $\vec{A}$ platí $\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{d\vec{A}'}{dt} + \vec{\Omega} \times \vec{A}$

kde $\frac{d\vec{A}'}{dt}$ je v rotujúcej sústave a $\vec{\Omega}$ je uhlová rychlost sústavy

→ aplikáciou vzorca na $\vec{A} = \vec{v}$ dostaneme:

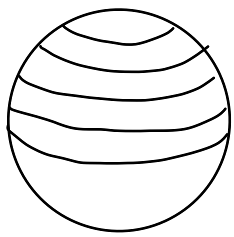
$$\vec{a} = \vec{a}\,' + \underbrace{\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + 2\vec{\omega} \times \vec{v}\,' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})}_{\vec{a}_u}$$



$\vec{F}_E = -\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}$ ... Eulerovo zrychlení

$\vec{F}_C = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}\,'$ ... Coriolisova sila

$\vec{F}_d = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$ ... odstredivé zrýchlenie



• Foucoltovo kyvadlo – stáčení roviny kyvadla vplyvom F_c

↳ dané zem. šírkou $2\pi \sin\varphi$ za den

1. a 2. impulzová veta

- sústava hm. bodov $\vec{x}_i, m_i$
- hmotný stred (ťažisko) $\vec{x}_{cm} = \frac{\sum m_i \vec{x}_i}{\sum m_i} = \sum \frac{m_i}{M} \vec{x}_i$, kde $M = \sum m_i$

- pohybová rovnica i-teho bodu $m \ddot{\vec{x}}_i = \sum_j \vec{F}_{ij} + \vec{F}_i^E$ ← externé sily

sila pôsobiaca z j-teho na i-ty

- vysčítaním ∀ bodov: $\frac{d}{dt}\vec{P} = \sum_i \sum_j \vec{F}_{ij} + \sum_i \vec{F}_i^E$ → $\vec{F}^E$

celková hybnosť

→ 0 lebo $F_{ii} = 0$ a $F_{ij} = -F_{ji}$

1. impulzová veta: $\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}^E$ Časová zmena hybnosti celej sústavy je daná výslednicou vonkajších síl.

↳ pokiaľ $\frac{d}{dt} m_i = 0$ ⇒ $\boxed{M \ddot{\vec{x}}_{cm} = \vec{F}^E}$ → sústava sa pohybuje ako hmotný bod v mieste cm so silou danou výslednicou externých síl

- pre $\vec{F}^E = 0$ platí ZZH celej sústavy

- moment hybnosti i-teho bodu $\vec{l}_i = \vec{r}_i \times \vec{p}_i$
- pohyb. rovnice i-teho bodu $\vec{r}_i \times \left(\sum_j \vec{F}_{ij} + \vec{F}_i^E\right) = \frac{d}{dt}\underbrace{(\vec{r}_i \times \vec{p}_i)}_{\vec{l}_i}$

↳ vysčítaním cez ∀ body: $\sum_{i,j} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} + \underbrace{\sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}^E}_{\vec{M}^E} = \frac{d}{dt}\underbrace{\left(\sum_i \vec{l}_i\right)}_{\vec{L}}$

za predpokladu centrálnych síl !! → 0

2. impulzová veta: $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^E$ Časová zmena celkového momentu hybnosti sústavy je daná výslednicou externých síl.

→ pre $\vec{M}^E$ platí ZZMH celej sústavy
→ mom. hybnosti sú vyjadrené voči tomu istému fixnému bodu

- moment sily voči hm. stredu $\vec{M}^E = \vec{M}^E_{cm} + \vec{r}_{cm} \times \vec{F}^E$
→ 2. IV voči hm. stredu: $\boxed{\frac{d\vec{L}_{cm}}{dt} = \vec{M}^M_{cm}}$ → niečo rovnaké ako 2. IV, lebo hm. stred sa môže hýbať

Königova veta: Celková kinetická energie je daná súčtom kinetickej energie hm. stredu a vnútornej energ.
$T = \frac{1}{2} M v_{cm}^2 + T_I$

↳ $T_I = \frac{1}{2} \sum m_i \dot{x}_{c,i}^2$ → voči hm. stredu

→ pre energiu už nestačí pracovať iba s hm. stredom, treba započítať aj vnútornú energiu

Keplerove zákony

- Keplerova úloha – pohyb planet v centrálnom poli $V(r) = -\frac{GMm}{r} = -\frac{\alpha}{r}$
- sférický symetrický potenciál → sférické súradnice r, φ, Θ
- pohyb je nutne rovinný ⇒ vylúčime Θ
- φ je cyklická, tj. $\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} = \ell = mr^2\dot\varphi$ je zach. sa vel.
- $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$ → zachováva sa celková energia $E = T + V$
- zavedením substitúcie $u = \frac{1}{r}$ → $V(u) = -\alpha u$ dostaneme

$$\boxed{\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{\alpha m}{\ell^2} \quad \text{Binetov vzorec}}$$

→ obecne je pravá strana $-\frac{m}{\ell^2}\frac{dV}{du}$

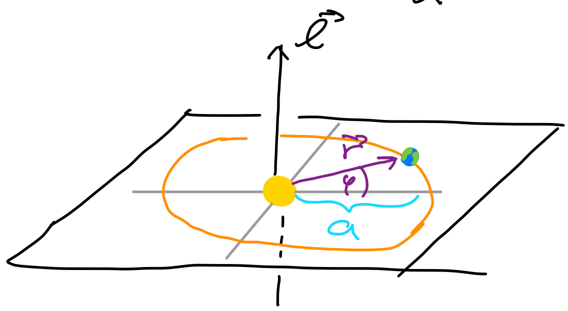
→ riešením dostaneme tvar trajektorie:

$$\boxed{r(\varphi) = \frac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi}}$$

$$p = \frac{\ell^2}{\alpha m}$$

$$\varepsilon^2 - 1 = \frac{2\ell^2 E}{\alpha^2 m} = \frac{2pE}{\alpha}$$

⇒ kužeľosečky
- $\varepsilon = 0$ ... kružnica
- $0 < \varepsilon < 1$ ... elipsa
- $\varepsilon = 1$ ... parabola
- $\varepsilon > 1$ ... hyperbola



$\boxed{\text{1. KZ: Planety sa pohybujú po elipsách so Slnkom v ohnisku.}}$

→ planéty sú viazané ⇒ $E < 0$ ⇒ $\varepsilon < 1$ ⇒ elipsa

$\boxed{\text{2. KZ: Spojnice Slunce a planety opisuje za stejné časové intervaly stejné plochy}}$

- element plochy: $dS = \frac{1}{2}r^2 d\varphi \Rightarrow \frac{dS}{dt} = \frac{\ell}{2m} = konst$ ← zo ZZMH

$\boxed{\text{3. KZ: Pro všechny planety je podíl } \frac{T^2}{a^3} \text{ konstanta.}}$

$$a = \frac{p}{1-\varepsilon^2}$$

→ dostaneme integrací $S = \int dS = \frac{\ell}{2m} T \Rightarrow \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$

↳ a je hlavná poloosa

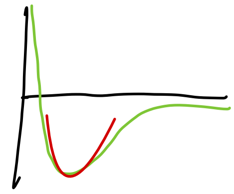
$$b = \frac{p}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$$

→ časovú závislosť vieme dostať z integrácie celk. energie E:

$$\frac{m}{2}(\dot r^2 + r^2\dot\varphi^2) + V(r) = E = konst \Rightarrow t - t_0 = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - V(r) - \frac{\ell^2}{2mr^2}\right]}}$$

↳ $\dot\varphi = \frac{\ell}{mr^2}$

Harmonický oscilátor



- Taylorov polynóm obecného potenciálu v okolí lok. minima a:

$$V(x) = V(a) + x\,\cancel{\frac{dV}{dx}\Big|_a} + \frac{x^2}{2}\frac{d^2V}{dx^2}\Big|_a + \mathcal{O}(x^3) = \alpha x^2 + \beta$$

$\to 0$ lok. minimum

- obecný potenciál něme aproximovat pomocou harmonického potenciálu:

$$V(x) = \frac{1}{2}k(x-x_0)^2 \quad \to \text{potenciálna energia pružiny}$$

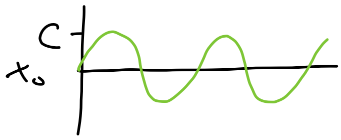
$$F = -V'(x) = -k(x-x_0) \quad \to \text{prislušná sila}$$

- z Newtonovho 2. zákona: $m\ddot{x} = -k(x-x_0)$ $\to$ ODE 2. řadu

$$x(t) - x_0 = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t) = C\cos(\omega t + \delta)$$

$$\dot{x}(t) = -C\omega\sin(\omega t + \delta)$$

$\to$ riešenie sú harmonické kmity s freq $\omega = \sqrt{k/m}$



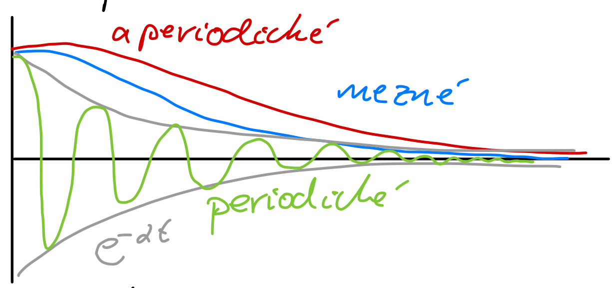
$$E = T + V = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}k(x-x_0)^2 = \frac{1}{2}m\omega^2C^2$$

Tlmený oscilátor

$\to$ trecia, brzdiaca sila $F_t = -b\dot{x}$ $\Rightarrow$ $m\ddot{x} = -kx - b\dot{x}$ $\Rightarrow$ $\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$

$\to$ ODE 2 řadu $\to$ $\lambda_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$

$\to$ 3 druhy riešenia:
- aperiodické: $\delta > \omega_0$ $\quad x(t) = e^{-\alpha t}\left(C_1 e^{\sqrt{\alpha^2-\omega_0^2}\,t} + C_2 e^{-\sqrt{\alpha^2-\omega_0^2}\,t}\right)$
- mezní aperiodické: $\delta = \omega_0$ $\quad x(t) = A(1+\omega_0 t)e^{-\omega_0 t}$
- periodické: $\delta < \omega_0$ $\quad x(t) = Ae^{-\alpha t}\cos(\omega t + \delta)$



Vynucené harmonické kmity

- pridanie budiacej sily $F(t) = F_0\cos\Omega t$ $\Rightarrow$ $\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = S\cos\Omega t$

$\to$ obecné řešení:

$$x(t) = \underbrace{Ae^{-\alpha t}\cos(\omega t + \delta)}_{\text{prechodové}} + \underbrace{\frac{S}{\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^2 + 4\alpha^2\Omega^2}}\cos(\Omega t + \beta)}_{\text{ustálené}}$$

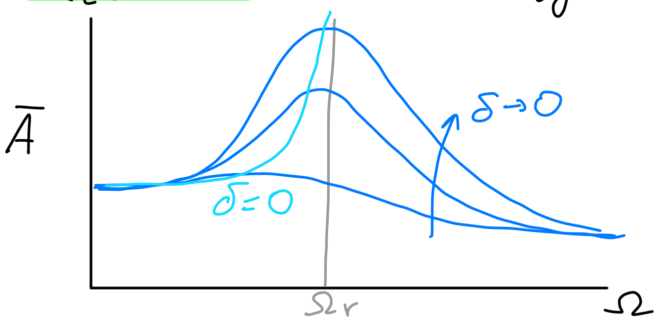
z podmienok (A, δ); dané Ω, α, ω_0 (β)

- amplitúda ustálenej časti: $A' = \dfrac{S}{\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^2 + 4\alpha^2\Omega^2}}$ $\to$ extrém: $\dfrac{dS}{d\Omega} = 0$

$$\Rightarrow \bar{\Omega} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\alpha^2}$$

$$\bar{A}' = \frac{S}{2\delta\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}}$$

- rezonance – budicí sila vyvolá veľkú odezvu



- pre $\delta = 0$ je $\bar{A}' \to \infty$ pokiaľ $\Omega = \Omega_r$

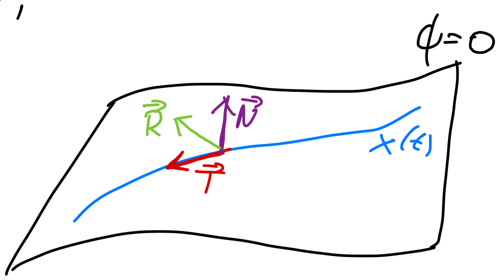
Pohyb s vazbami, d'Almbertov princip

- vazba – apriorní podmínka na pohyb (na kuli, na ploše, ...)
  ↳ přísluší jéj síla $\vec{R}$
  ↳ zadaná implicitní funkcí např. $\phi = x^2+y^2+z^2-r^2=0$

typy vazeb:

obustranná	$\phi = 0$	... om na pod prostor
jednostranná	$\phi > 0$	... om na polo prostor
skleronomní	$\phi(x^i)$	... nezávisí na čase
rheonomní	$\phi(x^i, t)$	... závisí na čase
holonomní	$\phi(x^i)$	... nezávisí na rychlosti
neholonomní	$\phi(\dot{x}^i, x^i)$	... závisí na rychlosti

- vazbovú silu vieme rozložiť ako $\vec{R} = \vec{T} + \vec{N}$ tečnú a normálovú
  ↳ normálovú zložku vieme vyjadriť ako $\vec{N} = \lambda \nabla \phi$,
  kde λ je nejaký parameter



⇒ Lagrangeove rovnice I. druhu

$$m\ddot{\vec{x}} = \vec{F} + \vec{T} + \lambda \nabla \phi \qquad \phi = 0$$

- λ – Lagrangeov multiplikátor – určíme z $\phi = 0$
- $\vec{F}$ – vtištená síla
- $\vec{T}$ sa zaned bává: $\boxed{m\ddot{\vec{x}} = \vec{F} + \lambda \nabla \phi \;,\; \phi = 0}$

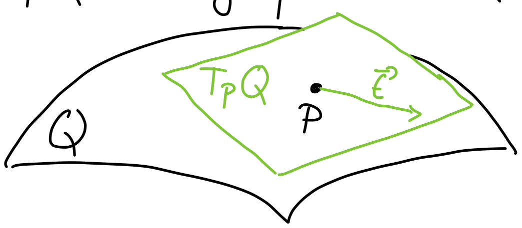
- $\vec{T}$ má v prípade trecí sily tvar $\vec{T} = -f|\vec{N}|\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$
- v prípade V vazeb a N hm. bodov dostaneme

$m_1 = m_2 = m_3$
$\vec{x}_1 = (x_1, x_2, x_3)$

$$m_i \ddot{x}_i = F_i + \sum_{\nu=1}^{V} \lambda_\nu \nabla \phi_\nu \qquad \phi(x_1, \dots, x_{3N}) = 0 \qquad \text{pro } i = 1, \dots 3N$$

- **d'Almbertov princip:** Sústava N hm. bodov sa pohybuje tak, že
  $\sum_{i=1}^{3N} (m_i \ddot{x}_i - F_i)\delta x_i = 0$, pro $\forall$ virtuálne posunutia δx_i v súladu s vazbami.

- Q varieta konfiguračného prostoru → vymezená vazbami $\phi_\nu = 0$
- T_PQ tečný prostor Q v bode P



- geometricky môžeme formulovať:

$$\boxed{(m\ddot{\vec{x}} - \vec{F}) \cdot \vec{\varepsilon} = 0 \quad \text{pro } \forall \vec{\varepsilon} \in T_PQ}$$

- d'Almbertov princip je plne ekvivalentní Lag. rovnicím I. druhu
  ↳ plynie z

$$\nabla \phi \cdot \delta \vec{x} = \nabla \phi \cdot \vec{\varepsilon} = 0 \quad \text{lebo } \nabla \phi \text{ je normála}$$

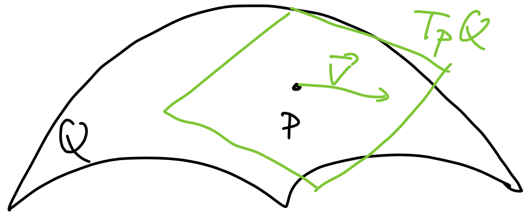
Lagrangeove rovnice II. druhu

- zobecnené súradnice q^i – súradnice „ušité na mieru" problému
  - automaticky splňajú vazbé podmienky
  - $q^1, \dots, q^n$ kde $n = 3N - r$
  - jednoznačne určujú všetky polohy syst. = konfigurace
- pr: kyvadlo ... 2d pohyb x, y → zobecnené súr – výchylka φ

- konfiguračný prostor = prostor všech poloh daný q_i
  - není prostor všech fyz. stavů – chybějí rychlosti
- zobecnené rychlosti $\dot{q}^i$ = dodatečné parametry nezáv. od q_i

→ splňajú: $\frac{\partial q_i}{\partial q_j} = \delta_{ij}$ $\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{q}_j} = \delta_{ij}$ $\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_j} = 0$ $\frac{\partial q_j}{\partial \dot{q}_i} = 0$

→ rychlosti $\dot{q}^i$ sú vektory tečného prostoru.



$\vec{v} = (\dot{q}^1, \dot{q}^2, \dot{q}^3) \in T_pQ$

- prostor všech fyz. stavov je teda tečný bundl $TQ = \bigcup_{p \in Q} T_pQ$

- nech T je celková kinetická energie a $Q_i = \sum_j F_j \frac{\partial x^j}{\partial q^i}$ je zobecnená síla:

$i = 1, \dots, \underbrace{3N - r}_{n}$ $$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q^i} = Q_i}$$ Lagrangeove rovnice II. druhu

→ sú plne ekvival. Lag. rovniciam I. druhu, tj. Newtonovej pohyb. rovnici
→ n ODE 2. řádu pro neznámé $q^i(t)$

- v prípade konzervatívnej sily $F_j = -\frac{\partial V}{\partial x^j}$ platí $Q_i = -\frac{\partial V}{\partial q^i}$ dosadením:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0 \quad , \text{kde } L = T - V}$$

→ mechanika je plne popísaná 1 skalárnou fcí

- konz. sila sa dá ešte zobecniť na prípad

$$Q_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial \dot{q}^i}\right) - \frac{\partial V}{\partial q^i}$$ → zobecnený potenciál

→ aj v takomto prípade $L = T - V$ rieši LR II

- dôležitý prípad zobecneného potenciálu je poten. Lorentzovej sily

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad \rightarrow \quad V = q(\varphi + \vec{v} \cdot \vec{A})$$

kde $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ a $\vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$

Hamiltonovy kanonické rovnice a Poissonovy závorky

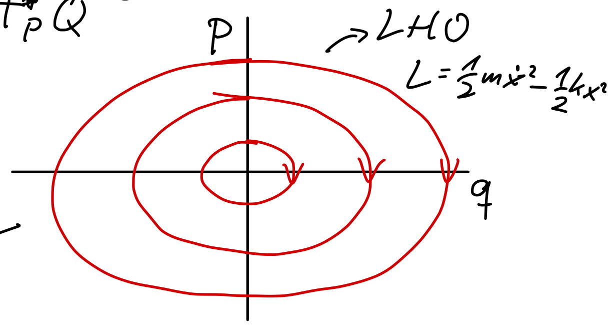
- namiesto rychlostí $\dot{q}^i$ – zobecnené hybnosti $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}$
- popis pomocou združených premenných (q^i, p_j):

$$\frac{\partial p_i}{\partial p_j} = \delta_{ij} \qquad \frac{\partial q_i}{\partial q_j} = \delta_{ij} \qquad \frac{\partial p_i}{\partial q_j} = 0 \qquad \frac{\partial q_j}{\partial p_i} = 0$$

- fázový prostor – prostor všech poloh a hybností dimenze $2n = 2(3N-\nu)$
  - bod fázového prostoru určuje fyzikální stav
  - kotečný bandl $T^*Q = \bigcup_{p \in Q} T^*_p Q$

↳ časový vývoj lze znázornit jako křivku na fázovém prostoru $(q(t), p(t))$

rôzne krivky odpovedají rôznym poč. podm.



- Hamiltonián:

$$\boxed{H(q^i, p_i, t) = \sum_i p_i \dot{q}^i(p_i, q^i, t) - L(q^i, \dot{q}^i(p_i, q^i, t), t)}$$

→ Legendrova transformace L, od $\dot{q}^i$ do p_i

→ invertovaním $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}$ treba rýchlosti vyjadriť pomocou p_i

- Hamiltonián nelze najít vždy → musí byť $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}$ invertovatelné

↳ Lagran. dostaneme spätnou tranformací $\Rightarrow \det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial x_i x_j}\right) \neq 0$

- Hamiltonovy kanonické rovnice

$$\boxed{\frac{dq^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q^i}}$$

→ sústava dvoch ODE 1. rádu

→ ekvivalentní LR II

- Poissonovy závorky dvoch funkcí f, g na fázovém prostoru:

$$\boxed{\{f, g\} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q^i}}$$

→ tvoria Lieovu algebru: linearita, antisymetrie, Jacobiho identita

→ Leibnitzovo pravidlo

- fundamentální Poissonovy závorky: $\{q^i, q^j\} = 0$ $\{p_i, p_j\} = 0$ $\{q^i, p_j\} = \delta^i_j$
- časový vývoj pozorovatelnej f: $\frac{df}{dt} = \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t}$

- f je integrál pohybu $\Leftrightarrow \{f, H\} = 0$
- H je integrál pohybu $\Leftrightarrow \partial_t H = 0$

Hamiltonov variační princíp

- integrálny funkcionál: $F: C^n \longmapsto \mathbb{R}$

$$F = \int_I f(x, y(x), y'(x))\,dx$$

- nech f je extrém funkcionálu F, potom f rieši E-L:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) - \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta F = 0$$

- v klasickej mechanike:

Pohyb sústavy v čase $t \in [t_0, t_1]$ sa deje tak, že

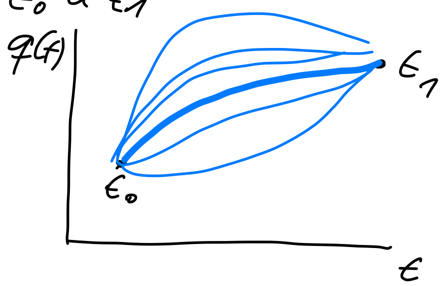
$$\delta S = 0$$

, kde S je funkcionál akce: $S = \int_{t_0}^{t_1} L(t, q^i(t), \dot{q}^i(t))\,dt$

$L = T - V$ je Lag. fce, T je celková kinetická energie, V je zobecnený potenciál:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial \dot{q}^i}\right) - \frac{\partial V}{\partial q^i} = 0$$

→ skutečná trajektorie extremalizuje akci
→ variace prebieha cez ∀ možné trajektorie mezi t_0 a t_1
→ automaticky z $\delta S = 0$ plynú LRII.
→ úloha má fixný poč. a koncový bod
→ predpoklad zobecneného potenciálu
↳ dá sa rozšíriť aj pre nekonz. sily



→ najobecnejší princíp mechaniky

- dá sa zobecniť aj na polné rovnice

$$q^i(t) \longmapsto \phi(\vec{x}, t) \longmapsto \phi(x^\mu) \quad \leftarrow \text{pole}$$
$$\dot{q}^i(t) \longmapsto \phi_{,\nu}(x^\mu)$$

- od Lagrangiánu sa prejde k Lagrangeovej hustote $L = \mathcal{L}\,dV$ a integruje sa cez p.č. element:

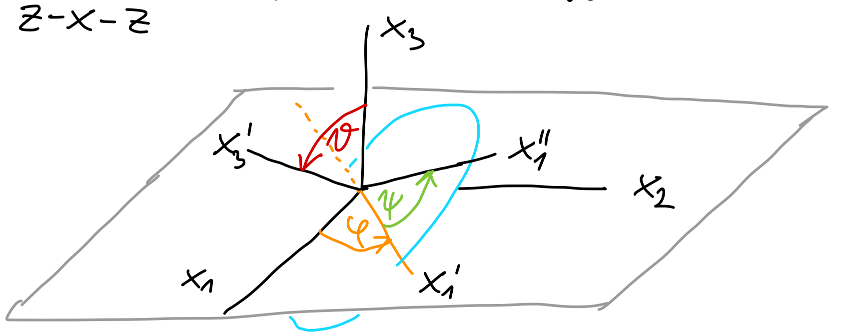
$$S = \int_\Omega \mathcal{L}(x^\mu, \phi(x^\mu), \phi_{,\nu}(x^\mu))\,\underbrace{d\Omega}_{d\Omega = \sqrt{|\det g|}\,dV\,dt} \Rightarrow \sum_{\mu=0}^{3} \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\nu}(x^\mu)}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0$$

Mechanika tuhého telesa

Eulerovy úhly a Eulerove kinematické rovnice

- obecnú rotaci ve 3D môžeme vyjadriť pomocou rotačnej matice $R_{\vec{n}}(\alpha)$, ktorá je param. uhlom α a jednotkového vektoru $\vec{n}$, okolo kt. sa rotuje
- alternatívny popis je pomocou tzv. Eulerových uhlov, kt. vyjadrujú poslopnosť rotací okolo os z-x-z

φ ... precesní úhel
ϑ ... nutační úhel
ψ ... rotační úhel



- rozlišujeme dve báze → korotujúcí a fixní v prostoru
- v bázi spojenej s prostorem:

$$\underset{\text{precese}}{D = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & \\ & & 1 \end{pmatrix}} \qquad \underset{\text{nutace}}{C = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ & -\sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}} \qquad \underset{\text{rotace}}{B = \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & \\ -\sin\psi & \cos\psi & \\ & & 1 \end{pmatrix}}$$

→ výsledná matice $A = BCD$
→ tenzor uhlovej rýchlosti je daný $\Omega = \frac{dA}{dt}A^T$ v korotujúcí bázi
↳ vďaka jeho asym. ho vieme vyjadriť ako vektor

$$\Omega_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\Omega_{jk} \quad \text{... vektor uhlovej rýchlosti}$$

→ celková uhlová rýchlost Ω je daná součtem jednotlivých uhlových rýchlostí v danej súr. sústave:

$$\Omega = \Omega^B + B\Omega^C + BC\Omega^D, \text{ kde } \begin{aligned} \Omega^B &= (0, 0, \dot{\psi}) \\ \Omega^C &= (0, \dot{\vartheta}, 0) \\ \Omega^D &= (0, 0, \dot{\varphi}) \end{aligned}$$

→ dosadením za matice dostaneme Eulerove kinematické rovnice:

$$\boxed{\begin{aligned} \Omega_x &= \dot{\varphi}\sin\vartheta\sin\psi + \dot{\vartheta}\cos\psi \\ \Omega_y &= \dot{\varphi}\sin\vartheta\cos\psi - \dot{\vartheta}\sin\psi \\ \Omega_z &= \dot{\varphi}\cos\vartheta + \dot{\psi} \end{aligned}}$$

→ vyjadrené v bázi korotujúcej s telesom x, y, z

Tenzor setrvačnosti

- N hmotných bodu s hmotnosťami m^a a polohami $\vec r^a$ $\quad a=1,..,N$
- celkový moment hybnosti je daný ako

$$\vec L = \sum_a \vec l^a = \sum_a \vec r^a\times\vec p^a = \sum_a m^a \vec r^a\times\vec v^a = \sum_a m^a \vec r^a\times(\vec\Omega\times\vec r^a)$$

- skalárny súčin s lib. vek $\vec\xi$: $\quad \vec L\cdot\vec\xi = \sum_a m^a(\vec\xi\times\vec r^a)\cdot(\vec\Omega\times\vec r^a)$

⇒ zavedieme tenzor setrvačnosti $\quad I(\vec\xi_1,\vec\xi_2)=\sum_a m^a(\vec\xi_1\times\vec r^a)\cdot(\vec\xi_2\times\vec r^a)$

→ ve složkách $\quad I_{ij} = I(e_i,e_j) = \sum_a m^a(\delta_{ij}\, x_k^a x_k^a - x_i^a x_j^a)$

↳ v prípade spojitého telesa: $\quad \boxed{I_{ij} = \int \delta_{ij}\,|\vec x^a|^2 - x_i^a x_j^a\, dm}$

→ kinetická energia $\quad T=\frac12 I(\vec\Omega,\vec\Omega)=\frac12 I_{ij}\,\Omega_i\Omega_j$

→ mom. hybnosti $\quad L_i = I_{ij}\Omega_j$

→ ide o sym. tenzor (plynie zo skal. súčinu) ⇒ lze diagonalizovať

⇒ báze hlavních os ~> $I_{11}=I_x \quad I_{22}=I_y \quad I_{33}=I_z$

→ $T=\frac12(I_x\Omega_x^2+I_y\Omega_y^2+I_z\Omega_z^2)$

- označením $\vec\Omega=\Omega\,\vec n$, kde $\vec n$ je osa okamžitého otáčení:

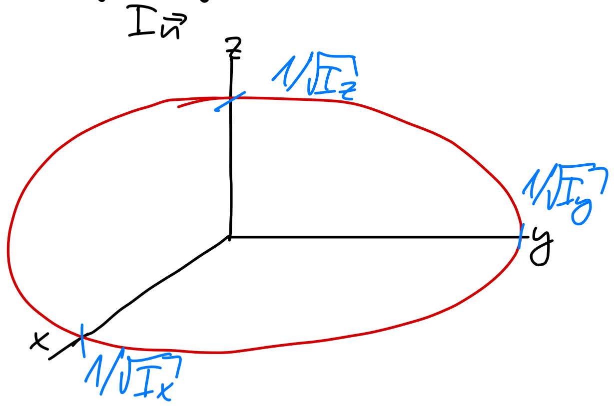
$$I_{\vec n} = I_{ij}\,n_in_j \qquad T=\frac12 I_{\vec n}\,\Omega^2$$

↳ mom. zotrvačnosti voči ose $\vec n$ - skalárna veličina

- I_{ij} určíme z meraní $I_{\vec n}$ voči 6 rôznym osám

→ $\dfrac{I_{ij}n_in_j}{I_{\vec n}}=1$ ⇒ v bázi hlavních os $\quad I_x\xi_1^2+I_y\xi_2^2+I_z\xi_3^2=1$

↳ rovnice elipsy ⇒ elipsoid zotrvačnosti



→ voči ľubovoľnej osi $\vec n$ dostaneme $I_{\vec n}$ vzdialenosťou k elipsoidu

$$I_{\vec n} = \frac{1}{|\vec\xi|^2} \qquad \text{kde } \vec\xi \parallel \vec n$$

- Steinerova věta: Nech I^0_{ij} je voči ose prechádzajúcej ťažiskom, potom voči ose posunutej v smere $\vec a$ je

$$I_{ij}=I^0_{ij}+(\delta_{ij}\,a_ka_k-a_ia_j)\,m$$

$$I_{\vec n}=I^0_{\vec n}+a_\perp^2\, m$$

$a_\perp$ kolmá vzdialenosť od $\vec n$

Eulerove dynamické rovnice, pohyb jednoduchých zotrvačníkov

- 2. impulzová věta: $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$ → platí v bázi prostoru
- $\vec{L}$ známe v bázi korotujíci: $L_x = I_x \Omega_x$ $L_y = I_y \Omega_y$ $L_z = I_z \Omega_z$, kde I_i sú diag. elementy tenzoru I_{ij} v báze hl. os

- vztah mezi bázi v prostoru a korotujíci:

$$\left.\frac{d\vec{L}}{dt}\right|_{prostor} = \left.\frac{d\vec{L}}{dt}\right|_{teleso} + \vec{\Omega} \times \vec{L}$$

kde $\vec{\Omega}$ je uhlová rychlost

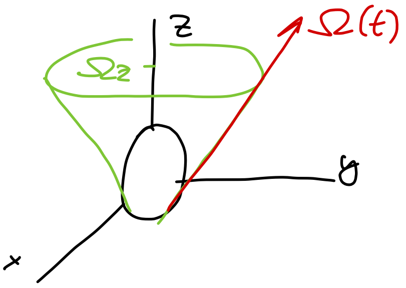
- dosadením za $\dot{\vec{L}}|_{teleso}$ a užitím, že I_i sú konštanty dostaneme

$$\boxed{\begin{aligned} M_x &= I_x \dot{\Omega}_x - (I_y - I_z)\Omega_y \Omega_z \\ M_y &= I_y \dot{\Omega}_y - (I_z - I_x)\Omega_z \Omega_x \\ M_z &= I_z \dot{\Omega}_z - (I_x - I_y)\Omega_x \Omega_y \end{aligned}}$$ Eulerove dynamické rovnice

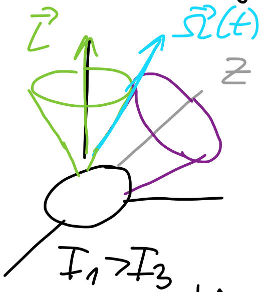
→ zložky $\vec{M}$ musia byť vyjádrené v korotujúcej báze $M_i(\varphi, \vartheta, \psi)$
→ nelin. rovnice 1. řádu, pro obecné $\vec{M}$ - složité řešit

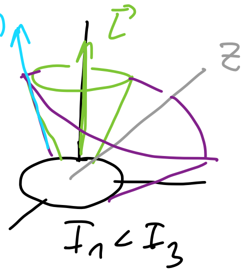
Volný setrvačník

- symetrické telesa okolo osy z: $I_x = I_y$
- volný, bez silový ⇒ $\vec{M} = 0$
- celková uhlová rychlost $|\vec{\Omega}|$ sa zachovava
- Ω_z je konst a Ω_x, Ω_y oscilují ⇒ regulérní precese



- vo vonkajšej (inerciálnej) sústave
↳ válanie dvoch kuželov - $\vec{\Omega}(t)$ je priesečník

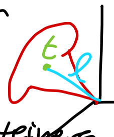


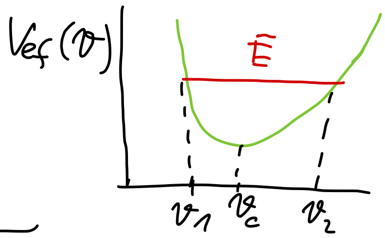


Težký setrvačník

- setrvačník s hmotností m s fixním bodem $V = mgl\cos\vartheta$
- okrem precese a rotace - aj nutace
- ϑ_s ... bod kde sa precese zastaví

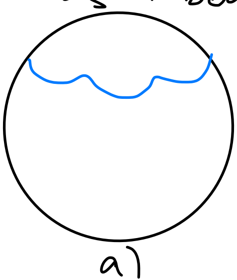
I_x, I_y bodom pomocou Steinera posunúť ⇒ $I_1 \to I_1 + ml^2$

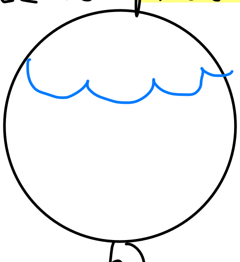


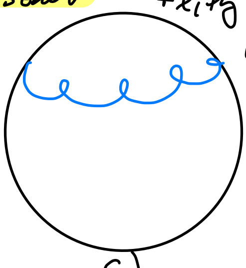


a) $\vartheta_s < \vartheta_1$ → $\varphi(t)$ je rost
b) $\vartheta_s = \vartheta_1$ → $\dot{\varphi}(t) = 0$ → 1 bod sa zastaví
c) $\vartheta_1 < \vartheta_s < \vartheta_2$ → $\dot{\varphi}(t)$ roste i klesá

$\vartheta = \vartheta_c$ → rg. precese


a)


b)


c)

Mechanika kontinua

Tenzor napätí a deformace, Hookov zákon

- trajektórie materiálových častíc je daná $x_i = \chi_i(X_k, t)$ — Lagrange – pohyb; Euler – sedí na mieste

kde X_k je poč. poloha $\chi_i(X_k, 0) = X_i$, χ je deformačné zobrazenie

- deformační gradient $F_{ik} = \frac{\partial x_i}{\partial X_k} = \chi_{i,k}(X_j, t) \rightsquigarrow dx_i = F_{ik}\, dX_k$
- invariantní vzdálenost

po deformaci: $dl^2 = dx_i dx_i = C_{kl}\, dX_k dX_l \quad C_{kl} = F_{ik} F_{il} = \frac{\partial x_i}{\partial X_k}\frac{\partial x_i}{\partial X_l}$

pred deformací: $dL^2 = dX_i dX_i = c_{kl}\, dx_k dx_l \quad c_{kl} = F^{-1}_{ik} F^{-1}_{il} = \frac{\partial X_i}{\partial x_k}\frac{\partial X_i}{\partial x_l}$

- tenzory deformace – rozdiely od jednotky:

lagrangeovský: $E_{ij} = 1/2\,(C_{ij} - \delta_{ij})$ eulerovský: $e_{ij} = 1/2\,(c_{ij} - \delta_{ij})$

- vyjadrením pomocou vek. pole posunutí $x_i = X_i + u_i$ — $U_i(X_k, t) = \chi_i(X_k, t) - X_i$; $u_i(x_k, t) = x_i - \chi_i(x_k, t)$

→ dosadením derivácií

$$\frac{\partial x_i}{\partial X_k} = \delta_{ik} + \frac{\partial U_i}{\partial X_k} \qquad \frac{\partial X_i}{\partial x_k} = \delta_{ik} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k}$$

dostaneme tenzory deformace

$$\boxed{E_{kl} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_k}{\partial X_l} + \frac{\partial U_l}{\partial X_k} + \frac{\partial U_i}{\partial X_k}\frac{\partial U_i}{\partial X_l}\right) \qquad e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right)}$$

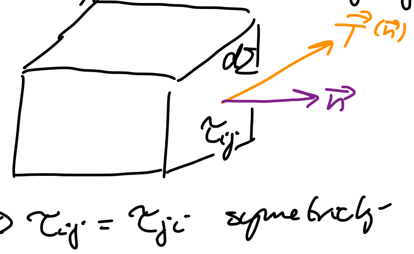
→ zanedbaním členov s druhými der. dostaneme tenzory malých deformací ε_{ij}

→ diagonálne zložky – normálová deformace, offdiag – smyková deformace

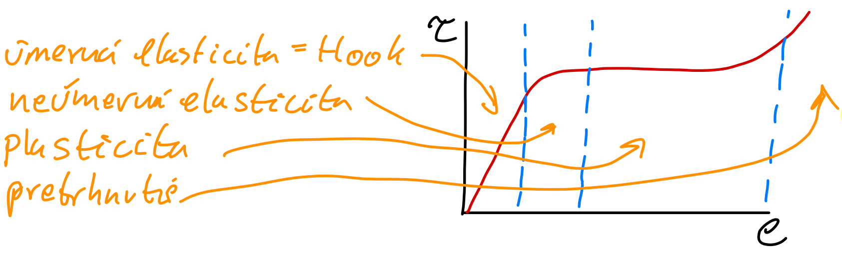
- sila pôsobiaca na plôšku $d\Sigma$: $d\vec{F}_{plocha} = \vec{T}^{(\vec{n})} d\Sigma$, kde $T_i^{(\vec{n})} = \tau_{ij} n_j$ — normála plochy
- τ_{ij} je tenzor napätí
- př.: Maxwellov tenzor napätí

$$T_{ij} = -\left(D_i E_j + B_i H_j - 1/2\, \delta_{ij}(H_k B_k + E_k D_k)\right)$$

→ platí v prípade centrálnych síl



- z 2. impulzovej vety, rovnice kontinuity a pohyb. rovnice $\Rightarrow \tau_{ij} = \tau_{ji}$ symetrický



elasticita → vrátenie do pôv. stavu

plasticita → trvalá deformacia

- Hookov zákon – napätí je úmerné deformaci $\boxed{\tau_{ij} = C_{ijkl}\, \varepsilon_{kl}}$ → charakt. látky

→ v prípade izotropního mat.: $\tau_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu\, \varepsilon_{ij}$ — Lameho koef.

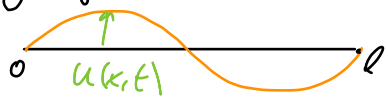
- z informací o pôsob. silách chceme zistiť info o deformacích telesa

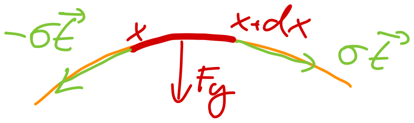
↳ dostupné rovnice → rovnice kontinuity, pohybová rovnice, látkové vztahy (Hook)

- v prípade 1D tahu: $\tau = \frac{F}{S} = E\frac{\Delta l}{l_0} = C\,\varepsilon$

Rovnice struny a její řešení

- struna charakt. lin. hustotou ϱ, napätím σ, dĺžkou ℓ,
- výchylka v bode x a t je $u(x,t)$





- výchylka je popísaná fcí $y=y(x)$, tečna $\vec{t} = \left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{-1/2}\left(1, \frac{dy}{dx}\right)$
- Newton pro dx

$$m\ddot{x} = \varrho\, dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F_y = \sigma\left(t_y(x+dx) - t_y(x)\right) \approx \sigma\, dx \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

↖ pro malé úhly $\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \approx 1$

$\Rightarrow \quad \varrho u_{,tt} - \sigma u_{,xx} = 0$

- kin. ener. dx: $\frac{1}{2}\varrho\, dx \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2$ $\rightsquigarrow$ celková $T = \int_0^\ell \frac{1}{2}\varrho\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dx$
- dĺžka krivky

$$\lambda = \int_0^\ell \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx \approx \int_0^\ell \left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right) dx$$

← malé úhly

- potenciální energie $V = \sigma \cdot \Delta\ell = \sigma(\lambda - \ell) = \int_0^\ell \frac{1}{2}\sigma\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx$

$$\Rightarrow \mathcal{L} = \frac{1}{2}\varrho u_{,t}^2 - \frac{1}{2}\sigma u_{,x}^2 \overset{E-L}{\Rightarrow} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{,x}}\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{,t}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} = 0$$

$$\Rightarrow \varrho u_{,tt} - \sigma u_{,xx} = 0 \qquad c = \sqrt{\frac{\sigma}{\varrho}}$$

d'Almbertova metoda řešení

- transformace súradníc $x,t \to \xi = x - ct \quad \eta = x + ct \Rightarrow u_{,\xi\eta} = 0$

→ jednoduchým vyintegrovaním a použitím podm. $u(x,0) = u_0(x)$, $u_{,t}(x,0) = V_0(x)$

dostaneme $\boxed{u(x,t) = \frac{1}{2}\left(u_0(x-ct) + u_0(x+ct) + \int_{x-ct}^{x+ct} V_0(x')\, \frac{dx'}{c}\right)}$

→ řešení pro nekonečnú strunu

Metoda Bernoulli – Fouriera

→ pro fixní délku ℓ

→ fixné konce: $u(0,t) = u(\ell,t) = 0$

→ řešíme separací proměnných $u(x,t) = X(x)T(t)$

→ z okraj. podm. dostaneme možné riešenia

$$\boxed{u_n(x,t) = \sin\left(\frac{\omega_n}{c}x\right)\left[a_n\cos(\omega_n t) + b_n\sin(\omega_n t)\right]}, \quad \omega_n = n\pi\frac{c}{\ell},\ n\in\mathbb{N}$$

→ obecné riešenie dostaneme LK:

$$\boxed{u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t)}$$

, konstanty určíme z FŘ: $a_n = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell \sin\left(\frac{\omega_n}{c}x\right)u_0(x)\, dx$, $b_n = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell \sin\left(\frac{\omega_n}{c}x\right)V_0(x)\, dx$

- v prípade voľných koncov: $u_{,x}(0,t) = u_{,x}(\ell,t) = 0$

↳ riešenie je podobné len sa zmení $\sin\left(\frac{\omega_n}{c}x\right) \mapsto \cos\left(\frac{\omega_n}{c}x\right)$ a pridá $\frac{a_0}{2}$

- ak je trenie na koncoch struny:

$$\sigma u_{,x}(0,t) = b\, u_{,t}(0,t) \qquad \sigma\left[-u_{,x}(\ell,t)\right] = b\, u_{,t}(0,t)$$

Pohybová rov. ideálni tekutiny, rov. kontinuity, Bernoulliho rov.

- rovnice kontinuity vyjadruje zachovanie hmoty:

$$0 = \frac{dm}{dt} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0}$$

→ kde $\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \rho$

- v prípade nestlačiteľnej kvapaliny je $\rho = konst \Rightarrow \nabla \cdot \vec{v} = 0$

- pohybová rovnica kontinua: $f_i + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = \rho\left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)$

- f_i je hustotná sila a τ_{ij} je tenzor napätí
- v prípade ideálnej tekutiny je $\tau_{ij} = -p\delta_{ij}$.
  ↳ nevisková

Eulerova rovnica

$$f_i + \frac{\partial p}{\partial x_i} = \rho\left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right) \Rightarrow \boxed{\vec{g} - \frac{1}{\rho}\nabla p = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v}} \quad \text{kde } \vec{g} = \frac{1}{\rho}\vec{f}$$

→ rovnica kontinuity + Eulerova rovnice → pro 4 neznáme: $\rho, \vec{v}$
↳ tlak p určíme podľa vlastností plynu, napr. adiab. id. plyn $p = k\rho^\gamma$
→ treba zadať poč. a okrajové podm → pre id. tekutinu je $v_n = 0$ k stene

- úpravou $\vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = \nabla\left(\frac{v^2}{2}\right) - \vec{v} \cdot \nabla \times \vec{v}$, predpokladom nevírivého $\nabla \times \vec{v} = 0$, stacionarity $\partial_t \vec{v} = 0$ a ex. potenciálu $f = -\nabla \varphi$ dostaneme integráciou

$$\boxed{\frac{1}{2}v^2 + \varphi + \int \frac{dp}{\rho} = konst}$$

- pre nestlačiteľnú kapalinu je $\rho = konst \Rightarrow \frac{1}{2}v^2\rho + \rho\varphi + p = konst$
↳ špeciálne ak $\varphi = gh$

$$\boxed{\frac{1}{2}v^2\rho + \rho g h + p = konst}$$

- pre nestlačit. kapalinu je $\nabla \times \vec{v} = 0 \Rightarrow$ ex. ϕ, že $\vec{v} = -\nabla\phi$
↳ navyše z rovnice kontinuity platí $\nabla \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow \nabla^2\phi = 0$... Laplaceova úloha
- analógia z elmag: kladný náboj → vtok, záporný náboj → odtok $\Big\}$ $\vec{E}$ je analógia $\vec{v}$

Viskózni tekutiny, Navier-Stokesovi rov., lamin. a turb. proud.

- pohybová rovnice pre kontinuum: $\boxed{f_i + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)\rho}$
- newtonovská tekutina: $\boxed{\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + \lambda \delta_{ij} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} + \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)}$

↳ kde v_i je rýchlostní proudení tekutiny
↳ p je izotropný tlak a λ, μ sú viskózne parametry

- predpoklad nestlačitelnej kapaliny $\rightarrow \rho = konst$

$\Rightarrow$ z rovnice kontinuity $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\vec{v}) = 0$ dostaneme $\nabla\cdot\vec{v} = 0$
$\Rightarrow$ člen s λ je nulový
$\rightarrow$ úpravou dostaneme:

$$\boxed{\vec{g} - \frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\nabla^2\vec{v} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \vec{v}\cdot\nabla\vec{v}}$$

$\rightarrow$ Navier-Stokesova rovnica

$\rightarrow \nu = \frac{\mu}{\rho}$ je kinematická viskozita, $\eta = \mu$ je dynamická viskozita

- zavedením bezrozmerných velicín

$$g_i \rightarrow g_i' = \frac{g_i}{g} \qquad v_i \rightarrow v_i' = \frac{v_i}{\bar{v}} \qquad x_i \rightarrow x_i' = \frac{x_i}{\ell}$$

kde ℓ je typická délka, $\bar{v}$ je stredná rychlost a g je grav. zrýchlenie má stacionarní rovnice bezrozmerný tvar

$$\boxed{\frac{1}{F}\vec{g} - \nabla P + \frac{1}{Ry}\nabla^2\vec{v} = \vec{v}\cdot\nabla\vec{v}}$$

kde $P = \frac{p}{\rho\bar{v}}$

$Ry = \frac{\ell\bar{v}}{\nu}$ ... Reynoldsovo č.

$F = \frac{\bar{v}^2}{\ell g}$ ... Froudovo č.

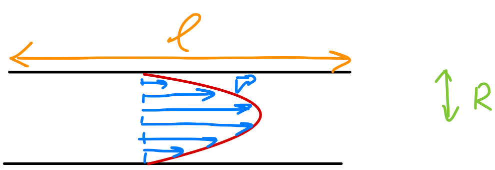
- konstanty Ry a F určujú, ktoré členy budú dominantné
  $\rightarrow$ tie závisia na viac param. $\rightarrow$ riešenia s rovnakými F, Ry nazveme geometricky podobné

- podľa velkosti Ry môžeme rozdelit na:
  - laminárne $Ry \ll Ry_{crit}$
  - turbulentné $Ry \gg Ry_{crit}$

$R_{crit} \sim 10^3 - 10^4$

- laminárne – usporiadané, bez virov, rovnobežné vrstvy
- turbulentní – chaotické, premiešavanie $\rightarrow$ ťažko popisatelné

- parabolický zákon rozdelení rychlosti viskóznej tekuty v trubici: $v(r) = \frac{\Delta p}{4\ell\eta}(R^2 - r^2)$
- množstvo pretečeného objemu $V = \pi\frac{\Delta p}{8\ell\eta}R^4 t$ $\rightarrow$ Hagen-Poisell



Speciální teorie relativity

Otázka éteru a Michelsenov-Morleyov experiment

- Newtonovy pohyb. rovnice – predpohlad existence absolutního času a absolutního prostoru (inerciální soustava) E^3

→ voči tejto sústave sú dané pohyb. rovnice
→ nezávislú na hmote – proste existujú
→ Galileovská transformace – existuje celá trieda iner. sústav

- éter – médium, pole, v ktorom sa svetlo šíri mechanicky priečne
  – nemohol mechanicky interagovať s prostredím

⇒ privilegovaná absolutní soustava éteru

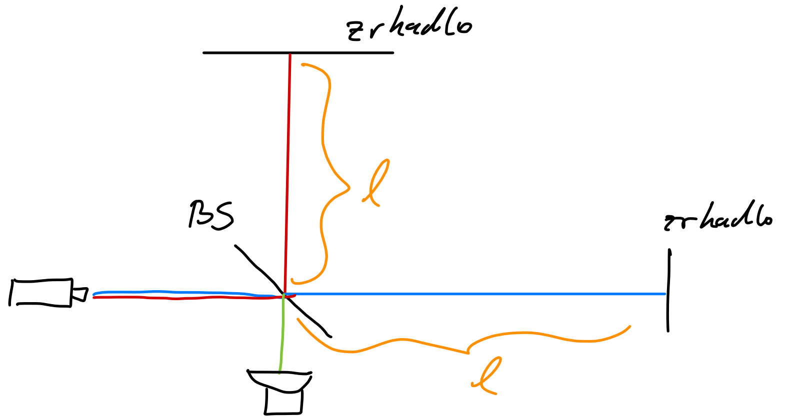
- Maxwellove rovnice – svetlo = elmag. vlnenie
  – konečná rýchlost svetla c
  – niesú inv. voči Galileovskej transf.

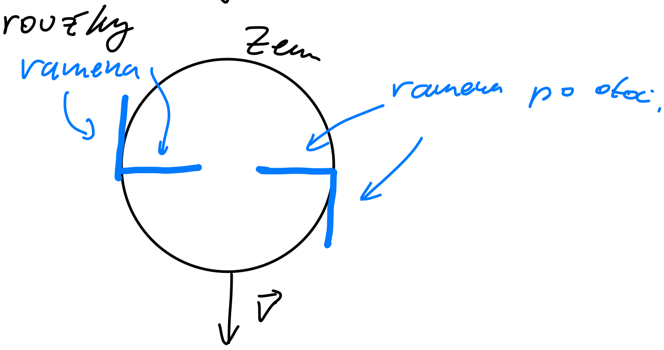
⇒ v inerciálnej sústave, ktorá sa pohybuje rýchlosťou $\vec{v}$ sa bude svetlo šíriť rozdielnymi rýchlosťami v rôznych smeroch
→ sústava éteru = svetlo sa šíri rovnako $\forall$ smermi
→ Zem sa pohybuje voči éteru ⇒ rýchlosť svetla bude v dvoch rôznych smeroch rozdielna

Michelsenov-Morleyov experiment

- chceme zmerať rozdielnu rýchlosť svetla v rôznych smeroch

⇒ interference svetla → interferenční proužky





- posun vlny v medzi dvoma ramenami $\Delta L \approx l\frac{v^2}{c^2}$

↳ približne lebo $v \approx 10^{-4}c$ je cca rýchlosť Zeme

- meranie spravíme druhý krát, len otočíme ramená ⇒ $\Delta L \approx l\frac{v^2}{c^2}$

→ medzi týmito dvomi meraniami by mal byť pozorovateľný posun IF pružkov

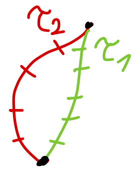
$$n = \frac{2\Delta L}{\lambda} = \frac{2Lv^2}{\lambda c^2}$$

→ pre $\lambda = 500\,\mathrm{nm}$, $L = 11\,\mathrm{m}$ a $v = 30\,\mathrm{km/s}$ je $n = 0{,}44$
→ pozorované nič nebolo ⇒ vyvrátenie teórie éteru

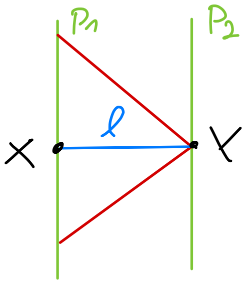
Výchozí principy teorie relativity, Lorentzova transformace

- **maximální rychlost** je konečná, daná rýchlosťou svetla vo vákuu, $c = 3.10^8 \, m.s^{-1}$
- **inerciálny systém** – referenční systém súradníc, voči nemu sa každý voľný pozorovateľ pohybuje rovnomerne priamočiaro
  - existuje celá trieda IS ktorá sa navz. pohyb. rovno. priamoč.
  - **realizace**: 1) sys. tuhých voľných poz., kt. sa navzájom nepoh.
    2) časová súradnica daná vl. časom poz.
    3) synchronizace hodín voľ. poz
    4) E^3 v nadrovine súč. ⇒ kartezská báze

- **ekvivalence IS** – každá IS je rovnako dobrá – neex. privilegovaná
  - c je v každej sústave rovnaké
- **vlastní čas** – čas meraný hodinkami voľného pozorovateľa
  - ekvival biologickém času
  - parameter krivky, svetočiary, poz.



- **svetočiara** – trajektorie poz. ve 4D prostoru
- **synchronizace hodin** – mezi 2 voľnými poz., kt. sa vzájomne nepohyb.
  - definice súčasnosti v 1 sústave vzáj. nepohyb.



1) P_1 vyšle sv. signál
2) P_2 ho odrazí naspäť
3) P_2 nazve $t_1 = 0$ čas keď ho odrazil
4) P_1 nazve $t_2 = 0$ čas v strede vyslaním a odrazením

⇒ súčasnosť je relace ekvival v danej IS.

- z ekvivalence IS nemôže byť Galileova trans správna

Lorentzova transformace

- transformace báze mezi dvoma IS, kt. sa navzájom pohyb. v
- predpoklad linearity transformace → plyne z transf. vlastnosti metriky
- speciální prípad pohyb v 1D

$$t' = At + Bx \qquad x' = At + Bx$$

- pohyb počátku, z rovnocennosti IS a konečnej rýchlosti sv. plyne

$$\Lambda = \begin{array}{cc} t & x \\ \end{array}$$
$$\Lambda = \begin{pmatrix} ch\beta & -sh\beta \\ -sh\beta & ch\beta \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} ch\beta &= \gamma \\ sh\beta &= \gamma \frac{v}{c} \end{aligned}$$

← rapidita

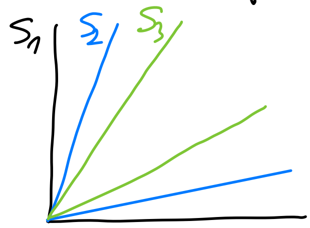
$$ct' = \gamma\left(ct - \frac{v}{c} x\right)$$
$$x' = \gamma(-vt + x)$$

- obecná Lorentzova transformace do súst. s rýchl. $\vec{v}$:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma \frac{\vec{v}}{c} \\ -\gamma \frac{\vec{v}}{c} & \hat{1} + (\gamma - 1) \frac{\vec{v} \otimes \vec{v}}{v^2} \end{pmatrix}$$

Dôsledky:

1) relativita soumístnosti: $\Delta x = v \Delta t$ ← nic nového, má Galilei
2) relativita súčasnosti: $\Delta t' = -\gamma \frac{v}{c^2} \Delta x$
3) kontrakce délek: $\ell = \ell_0 / \gamma$
4) dilatace času: $\Delta t = \gamma \Delta \tau$
5) transformace rychlostí: $v_{13} = (v_{12} + v_{23}) / (1 + \frac{v_{12} v_{23}}{c^2})$
6) invariance p.č. intervalu: $ds^2 = -c dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$



Minkowského prostoročas, svetelný kužeľ

- Minkowského prostoročas – 4D plochý
  - affinní prostor – tj. každým 2 bodom lze jednoznačne priradiť vektor
    ⇒ existence rovnobežnosti
  - kauzálna štruktúra – daná orientáciou sv. kužela
  - metrická štruktúra – meranie vzdialeností
- vďaka plochosti sa dajú všetky tečné prostory zjednodušiť ⇒ glob. affinita
- Minkowského metrika:

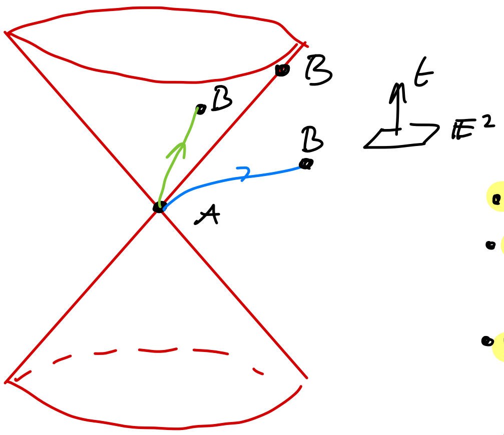
$$\boxed{\eta_{\mu\nu} = diag(-1,1,1,1)}$$

→ pseudo-metrika, lebo vzdialenosť môže byť záp.

- Lorentzova transformace Λ – matice prechodu medzi bázami
- Lorentzove transformace tvorí SO(3,1) grupu
  ↳ generátory: 3 rotace a 3 boosty
- invariantnosť metriky:

$$\boxed{\eta_{\mu\nu} = \Lambda^{\alpha}_{\mu}\, \eta_{\alpha\beta}\, \Lambda^{\beta}_{\nu}}$$

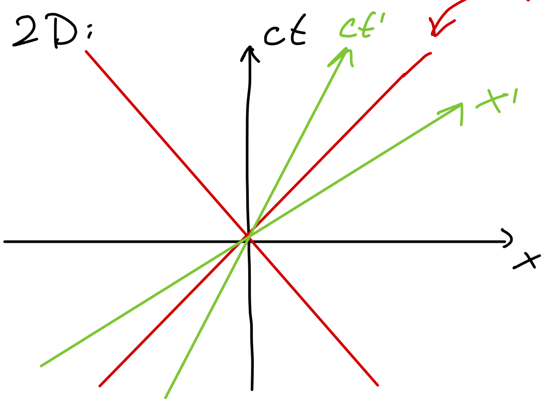
- p.č. interval – invariant: $ds^2 = -c\,dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$
- dve udalosti A, B v p.č. nazveme:
  1) časupodobné $\Delta S_{AB} < 0$
  2) prostorupodobné $\Delta S_{AB} > 0$
  3) svetelné $\Delta S_{AB} = 0$
- časupodobné udalosti sa mohli navzájom ovplyvniť
- svetelný kužel – znázornenie kauzality udalostí



- vektory rozdeľujeme na
  - č.p. $|V|^2 < 0$
  - p.p. $|V|^2 > 0$
  - sv. $|V|^2 = 0$
- hranica – šírenie sv. signálu
- vnútro – časupod. udalosti, mohli sa ovplyvniť
  - minulosť, budúcnosť
- vonkajšok – prostorupod. udalosti

sv. kužel – rovnaký pre ∀ poz

- v 2D:



- S' sa pohybuje voči S
  ↳ rozdielne IS
- svetelný signál sa šíri rovnako

Relativistické pohybové rovnice, ekvivalence hmotnosti a energie

- trajektorie částice — $z(\alpha): \mathbb{R} \to M$, súradnice $x^\mu(z(\alpha)) = x^\mu(\alpha)$
  — tečný vektor $w^\mu = \frac{d}{d\alpha} x^\mu(\alpha)$

  $w^2 < 0$ hmot. častice $\quad w^2 = 0$ nehmotná častice $\quad w^2 > 0$ tachyon

- vlastní čas: $\quad \Delta\tau = \int \sqrt{-\eta_{\alpha\beta} w^\alpha w^\beta}\, d\alpha$

- parametrizace vl. časom: $\quad x^\mu = x^\mu(\tau)$

  → 4-rychlost: $u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$ $\qquad$ → 4-zrýchlenie: $a^\mu = \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = \frac{du^\mu}{d\tau}$

  $\eta_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = -c^2$ $\qquad$ ↳ $\eta_{\mu\nu} a^\mu u^\nu = 0$ → kolmé

  ↳ konštantná dĺžka

  3+1 rozštepení: $\quad x^\mu = \begin{bmatrix} ct \\ \vec{r} \end{bmatrix} \quad u^\mu = \begin{bmatrix} \gamma c \\ \gamma \vec{v} \end{bmatrix} \quad a^\mu = \begin{bmatrix} \frac{v}{c}\gamma^4 A_\parallel \\ \gamma^4 A_\parallel \\ \gamma^2 \vec{A}_\perp \end{bmatrix}$

- 4-hybnost → hmotné částice $\boxed{p^\mu = m_0 u^\mu}$

  ↳ m_0 je hmotnosť v klid. soustave

  $$p^\mu p^\nu \eta_{\mu\nu} = -m_0 c^2$$

  → nehmotná častice $\quad p^\mu = \hbar k^\mu \quad p^\mu p_\nu = 0 \quad k^\mu$

- ZZ4H: $\quad \sum_{\text{před}} p^\mu = \sum_{\text{po}} p^\mu$

- 3+1 rozštepení: $\quad p^\mu = \begin{bmatrix} m_0 \gamma c \\ m_0 \gamma \vec{v} \end{bmatrix}$ → $\vec{p} = m_0 \gamma \vec{v} = m\vec{v} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$
  → $E = m_0 \gamma c^2 = mc^2$

  $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ → relat. hmotnost

  $p^\mu = \begin{bmatrix} E/c \\ \vec{p} \end{bmatrix}$ → ZZ4H ⇒ ZZE + ZZH

  → norma: $\quad p^\mu p_\nu = -m_0 c^2 = \frac{E^2}{c^2} + p^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{E^2 = (m_0 c^2)^2 + (pc)^2}$

- svět. častice: $\quad E = \hbar\omega \quad \vec{p} = \hbar\vec{k} \quad \Rightarrow \quad p^\mu = \begin{bmatrix} \hbar\omega/c \\ \hbar\vec{k} \end{bmatrix} \quad p^\mu p_\nu = \hbar\left(-\frac{\omega^2}{c^2} + k^2\right) = 0$

- pohybová rovnice: $\quad \boxed{F^\mu = \frac{dp^\mu}{d\tau}}$

  • kinetická energie: $T = E - m_0 c^2$

  $$\frac{d}{d\tau}\begin{bmatrix} E/c \\ \vec{p} \end{bmatrix} = c\begin{bmatrix} \frac{dm}{d\tau} \\ \frac{d\vec{p}}{d\tau} \end{bmatrix} = \gamma c \begin{bmatrix} \frac{dm}{dt} \\ \frac{d\vec{p}}{dt} \end{bmatrix} = \gamma c \begin{bmatrix} \frac{dm}{dt} \\ \vec{f} \end{bmatrix}$$

  $$\frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a} + \left(m_0 \gamma^2 \frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c^2} + \frac{dm_0}{dt}\right)\gamma\vec{v}$$

  → rozdelenie na kolmú a pozdĺžnu zložku rýchlosti: $\quad m\vec{a}_\perp = \vec{f}_\perp$, $\quad m\gamma^2 \vec{a}_\parallel = \vec{f}_\parallel$

Maxwellovy rovnice 4-rozmerného prostoru

Klasická formulace

$\nabla\cdot\vec{E} = -\rho/\varepsilon_0$

$\nabla\times\vec{E} = -\partial_t\vec{B}$

$\nabla\cdot\vec{B} = 0$

$\nabla\times\vec{B} = -\mu_0\vec{j} + 1/c^2\,\partial_t\vec{E}$

- zdroje : $\vec{j}, \rho$
- potenciály : $\vec{B} = \nabla\times\vec{A}$ $\quad \vec{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$
- kalibračná voľnosť: $\vec{A}' = \vec{A} + \nabla\chi \quad \phi' = \phi + \frac{\partial\chi}{\partial t}$

Relativistická formulace

- prostoročasový gradient : $\partial_\mu = [\frac{1}{c}\partial_t, \vec{\nabla}]$
- zdroje :

$$\rho = \frac{dq}{dV} \to \rho_0 = \frac{dq}{dV_0} \Rightarrow \boxed{\rho = \gamma\rho_0}$$ v klidovej sus tave

$$\vec{j} = \rho\vec{v}$$

$$\Rightarrow j^\mu = \rho_0 u^\mu = \begin{bmatrix}\rho_0 c\gamma\\ \rho_0\gamma\vec{v}\end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix}c\rho\\ \vec{j}\end{bmatrix} = j^\mu}$$

- 4-potenciál: $A^\mu = \begin{bmatrix}\phi/c\\ \vec{A}\end{bmatrix}$ $\quad A_\mu = [-\phi/c \ \ \vec{A}]$

- Maxwell-Faradayov tenzor:

$$\boxed{F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu} \qquad F_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{c}\vec{E} \\ \frac{1}{c}\vec{E} & \overleftrightarrow{B}\end{bmatrix} \qquad \overleftrightarrow{B} = \begin{bmatrix} 0 & B_z & -B_y \\ -B_z & 0 & B_x \\ B_y & -B_x & 0\end{bmatrix}$$

$\hookrightarrow F = dA$ $\qquad B_{ij} = \varepsilon_{ijk}B_k$

- Maxwellove rovnice

$\boxed{\nabla_\nu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\mu}$ $\rightarrow$ zdrojová rovnica $\rightarrow$ ekvival: $\nabla\cdot\vec{E} = -\rho/\varepsilon_0$, $\nabla\times\vec{B} = \mu_0\vec{j} + 1/c\,\partial_t\vec{E}$

$\boxed{\nabla_{[\alpha}F_{\beta\gamma]} = \nabla_\alpha F_{\beta\gamma} + \nabla_\gamma F_{\alpha\beta} + \nabla_\beta F_{\gamma\alpha} = 0}$ $\rightarrow$ pob. rovnice $\rightarrow$ ekvival: $\nabla\cdot\vec{B} = 0$, $\nabla\times\vec{E} = -\partial_t\vec{B}$

- rovnice kontinuity: $\boxed{\partial_\mu j^\mu = 0} \Leftrightarrow \partial_t\rho + \nabla\cdot\vec{j} = 0$

- Lorentzova síla: $\phi^\nu = F^\nu{}_\mu j^\mu$ $\rightarrow$ hustota síly

$$F^\mu = q\,F^\mu{}_\nu u^\nu = \gamma\begin{bmatrix}\frac{\vec{v}\cdot\vec{E}}{c}\\ q(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B})\end{bmatrix}$$ $\rightarrow$ síla na 1. částici

- kalibračná voľnosť $\boxed{A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu\Psi}$ pro Ψ skalarní fce

- Lorentzova kalibrace $\nabla_\mu A^\mu = 0 \Rightarrow \boxed{\Box A^\mu = \mu_0 j^\mu}$

- duální tenzor $\ast F^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}$

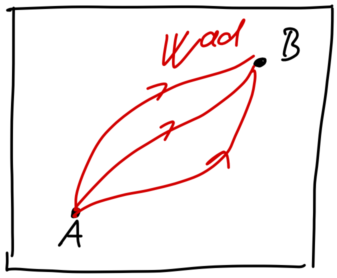
- invarianty : $-1/4\,F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = 1/2(E^2/c^2 - B^2) = \mathcal{L}_{EM}$

$\frac{1}{4}\ast F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = \frac{1}{c}\vec{E}\cdot\vec{B}$

Termodynamika a stat. fyz.

Teplo, teplota, tepelný kapacita, tlak

- systémy mnoha častíc miesto H, popisujeme makroskopicky → stredovanie
  → tým do popisu zanášame istú mieru „neznalosti"
- systém môže interagovať:
  1) konaním práce – kontrolovaná zmena TD parametrov
  2) výmenou tepla – efektívny popis nekontrolovaných st. voľnosti
     – forma energie daná neusp. pohybom častíc syst.
- TD parametry – kontrolované st. voľnosti
  – vymezují stavový prostor
  - extenzivní: V, N, P, M
  - intenzivní: p, μ, T, E
  - vnější
  - vnitřní
  - stavové → ex. úplný dif.
  - dejové → neex. úplný dif.



- adiabatický dej – len konaním práce W^{ad} – bez výmeny tepla
  – nezávisí na spôsobe vykonania, len poč. a koncovom st.
  ⇒ nezáv. na dráhe ⇒ je integ. ⇒ ex. stavová veličina

$$\oint W^{ad} = 0 \Rightarrow W^{ad}_{A\to B} = U(B) - U(A)$$

↳ vnitřní energia
↳ miera energie stavu

– postulát, že každé 2 body lze sp. ad. dejom vaspoň 1. smere
⇒ def. U pro $\forall$ body $U(X) = W^{ad}_{0\to X} + U(0)$

$$\boxed{\text{1. TDZ Pro obecný dej platí } \Delta U = W + Q}$$

neúplné dif.

↳ pro kvazistat. dej (jemná posl. rovnováž. st.): $dU = đW + đQ$

- dva systémy sú v tep. rovnováhe keď ich necháme dlho interagovať, že $đQ = 0$

$$\boxed{\text{0. TDZ ... Tep. rovnováha je tranzitivní.} \quad A\sim B \wedge B\sim C \Rightarrow A\sim C}$$

→ tepelná rovnováha je relace ekvivalence ⇒ každej triede ekvival. priradíme číslo ≡ stavová veličina ≡ empirická teplota ϑ

$$\boxed{\text{Carnotov thm.: Vratný dej je ten najúčinnejší.}} \quad \eta_R(\vartheta_1, \vartheta_2)$$

→ TD teplotu definujeme pomocou tejto účinnosti – tá závisí iba teploty poč. a koncového stavu: $T = T_0[1 - \eta_R(T, T_0)]$, kde T_0 je lib. konst
↳ volíme $T_0 = -273{,}16\,K$

- tepelná kapacita: $C_X = \frac{đQ}{dT}\Big|_X = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_X$ speciálne $X = p, V$
  ↳ Meyerov vzťah: $C_p - C_V = TV\frac{\alpha^2}{\kappa_T} \geq 0$ pro id. plyn $C_p - C_V = Nk_B$

$$\alpha = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$$

$$\kappa_T = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T$$

- tlak $đW = -p\,dV$
  ↳ integrační faktor práce

Vnitřní energie, TD potenciály

- adiabatický dej – interakce syst. len konaním práce W^{ad}
  - nezávisí na dráhe len na poč. a konc. bode

$$\oint W^{ad} = 0 \Rightarrow \text{ex. stavová veličina } U(B) - U(A) = W^{ad}_{A\to B}$$

- vnútorná energia $U(x) = W^{ad}_{0\to x} + U(0)$

1.TDZ $dU = dW + dQ$, 2.TDZ $dQ = TdS$, $dW = -pdV + \mu dN$

$$\Rightarrow \boxed{dU = TdS - pdV + \mu dN} \rightarrow \text{z extrem. postulátu} \Rightarrow \delta U|_{S,V,N} = 0$$

↳ S nabýva max. voči vnút. param ↳ zmena voči vnút. param.

- U je aditívna, extenzívna a stavová rovnice je kalorická
  ↳ pro id. plyn: $U(T) = cT$ $\quad c = \frac{3}{2}k_B$ pro 1 zlož. plyn
- pro obecnú prácu $dW = \sum y_i dX_i$ je $dU = \sum y_i dX_i + TdS$

- niekedy nie je pod kontrolou S, V, N → výhodnejšie pracovať v premenných ktoré mám fixované ⇒ Legendrova transformace
→ transformujem do premenej, kt. je fixovaná

$$\tilde{U}(Y_1 \dots) = U(X(Y_1 \dots), \dots) - Y X(Y_1 \dots), \quad \text{kde } Y = \frac{\partial U}{\partial X}$$

- pre $\tilde{U}$ potom plynie $\delta U|_{X_1 \dots} = 0 \Leftrightarrow \delta \tilde{U}|_{Y_1 \dots} = 0$

Bestiár TD potenciálov

Eulerov tlm:
S je extenzívní ⇒ $S = \frac{1}{T}U + \frac{p}{T}V - \frac{\mu}{T}N$
U je extenzívní ⇒ $U = TS - pV + \mu N$

Volná energie (S→T)

$$F(T,V,N) = U - TS = -pV + \mu N$$
$$dF = -SdT - pdV + \mu dN$$
$$\delta F|_T = 0, \quad [\Delta F]_T = W$$

→ vhodne pri konst. teplote, tep. rez.

Entalpie (V→p)

$$H(S,p,N) = U + pV = TS + \mu N$$
$$dH = d(U + pV) = dU + dpV + pdV = Vdp + \mu N$$
$$\delta H|_p = 0, \quad [\Delta H]_{p,N} = Q$$

→ vhodné pri konst. tlaku, chem. reak.

Gibbsov potenciál (V→p, S→T)

$$G(T,p,N) = U - TS + pV = \mu N$$
$$dG = -SdT + Vdp + \mu dN$$
$$\delta G|_{p,T} = 0 \quad [\Delta G]_{p,T} = W^{chem}$$

Grand kanonický potenciál (N→μ, S→T)

$$\Omega(T,V,\mu) = U - \mu N - TS = -pV$$
$$d\Omega = -SdT - pdV - Nd\mu$$
$$\delta\Omega|_{\mu,T} = 0$$

→ v syst. s rez. častíc

Hlavní zákony termodynamiky

0. TDZ: Tepelná rovnováha je tranzitivní.

→ tepelná rovnováha = sys. v kontakte necháme tep. ext. kým nenastane rovnováh

⇒ tep. rovnováha je relace ekvival ⇒ třídy ekvivalence – empirická teplota

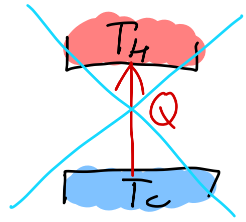
1. TDZ: $\Delta U = Q + W$, diferenciálne $dU = đQ + đW$

→ podmienky – existenci ad. izolace
- každé 2 body prost. sa dajú sp. ad. dejom
- adiabatický dej nezav. na dráhe

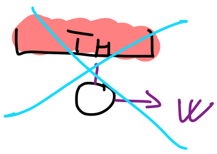
} → pro def. U

2. TDZ

Clausius: Pokud teplo samovolne prechádz z telesa A do telesa B, potom nieje možné realizovat proces, kde teplo samovolne prechádza z B do A.



Kelvin: Nelze realizovat proces, jěho jedinym výsledkom by bola vykonaná práce.



→ Kelvin a Clausius sú ekvival

- vratný proces – kvazistat. proces, kt. môže prebiehat v opačnom smere a stav systému a okolia sa vráti do poč. stavu.
  – systém a okolie je v rovnováhe

Carnotov teorém: Vratný stroj je zo všetkých strojov pracujúcich medzi stejnými lázněmi ten najúčinnejší.

→ definujeme TD teplotu pomocou tejto účinnosti $T = T_0[1 - \eta_R(T_0, T)]$

Clausiusova nerovnost: Pre všetky cyklické procesy platí $\oint \frac{đQ}{T'} \leq 0$ ← teplota okolia

- pre vratný cyklický dej platí: $\oint_{rev} \frac{đQ}{T} = 0$ ← v rev. dej – syst. a okolie v rovnováhe

⇒ nezav. na trajekt ⇒ ex. stavová veličina S, že $S(B) - S(A) = \int_A^B \frac{đQ}{T}$

- každé dva body stav. prostoru lze spojit. rev. dejom:

$$\boxed{S(x) = S(0) + \int_0^x \frac{đQ}{T}}$$

pro kvazi stat: $dS = \frac{1}{T} đQ$ ← integ. faktor pre $đQ$

$dU = TdS + \sum_i y_i dX_i$

adiabata = izoentropa

- pre nevratné deje: $\Delta S_{irr} \geq \int \frac{đQ}{T'}$ $\quad đQ = 0 \Rightarrow \Delta S^{ad} \geq 0 \Rightarrow \boxed{\Delta S^{ad}_{rev} = 0}$

- entropie sa maximalizuje – systém sa ustáli v stave kde je možný najvyšší počet mikrostav. pro daný makrostav
  $S = k_B \ln \Omega$
  – maximalizácia fáz. objemu

3. TDZ Absolútni nuly nelze dosáhnout konečným počtom cyklov.

$S \xrightarrow{T \to 0^+} 0$ – platí len pre čisté krystalické látky
– pre syst. s nedeg. zákl. hladina, lebo $S = k_B \ln(\#st)$

$\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{X_i} \xrightarrow{T \to 0} 0$ – S jde ku konstante

Ideální plyn, stavová rovnice, Carnotov cyklus

- ideální plyn – plyn neinteragujúcich hm. bodov
  – stejné častice

$$H = \sum_i \frac{p_i^2}{2m_i}$$

- $S = k_B \ln \Sigma_i$, kde $\Sigma = \int d\tau_N \, \delta(H(p,q) - E)$, $d\tau_N = \frac{d^N q \, d^N p}{h^{3N} N!}$

→ dosadením dostaneme v TD limite:

$$\boxed{S(U,V,N) = N k_B \ln\left(\left(\frac{U}{U_0}\right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{V}{V_0}\right)\left(\frac{N_0}{N}\right)^{\frac{5}{2}}\right) + N s_0}$$

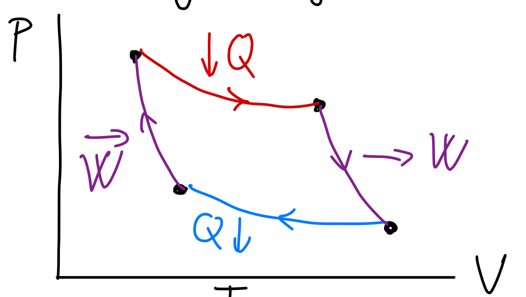
$$\frac{1}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial U}\right)_{V,N} = \frac{3}{2}\frac{N k_B}{U} \Rightarrow U = \frac{3}{2} N k_B T \rightarrow \text{kalorická rovnice}$$

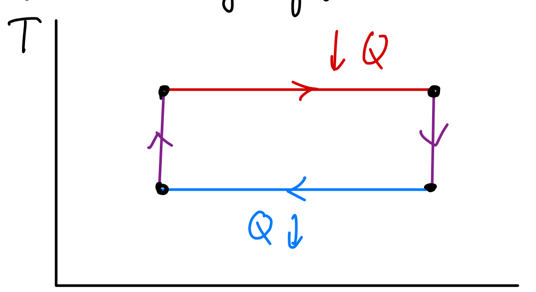
$$-\frac{p}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_{U,N} \Rightarrow \boxed{pV = N k_B T} \rightarrow \text{stavová rovnice}$$

- stavové rovnice – rovnice zväzujúce stavové TD premenné
  – charakterizujú danú látku
- vdW plyn: $\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = k_B T$ $\frac{a}{v^2}$ → interakce b → rozmer

Carnotov thm: Vratný stroj je zo všetkých strojov pracujúcich medzi stejnýma lázněmi ten najúčinnejší.

- účinnost $\eta = \frac{|W|}{Q_H}$ ... stroj $\eta = \frac{Q_C}{W}$ ... chladnička
  $\eta = \frac{|Q_H|}{W}$ ... tep. čerpadlo
- z definície TD teploty $\eta_R = 1 - \frac{T_C}{T_H}$
- Carnotov cyklus je realizace vratného stroja pomocou izoterm. a adia. dejov

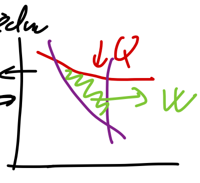




$$\eta = 1 - \frac{T_C}{T_C}$$

$$\eta = \frac{W}{Q_H} \Rightarrow W = \left(1 - \frac{T_C}{T_H}\right) Q_H = (T_H - T_C)\Delta S$$

- podmienky existence:
  1) izotermy sa nepretnú → spojujú st. s rovnakou T, stav má iba jednu
  2) adiabaty sa nepretnú → ak by sa pretli, tak ex. syst. ⇒ spor 2TD



  3) adiabaty sú strmšie ako izotermy

$$\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_S > \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T \rightarrow \text{plynie z Mayerova vzťahu } c_p - c_v = TV\frac{\alpha^2}{\kappa_T} = k_B N > 0$$

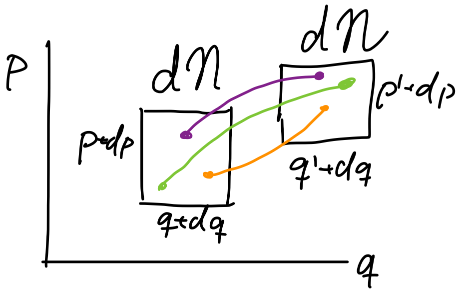
Fázový prostor, rozdelovací funkce, Liovillova rovnice

- fázový prostor = prostor všech poloh q^i a hybností p_i
  - bod fázového prostoru = (mikro)stav systému $\{q^i, p_i\}$
  - kotečný bandl T^*Q
  - dimenze je daná # častic a # vazeb $\quad \dim T^*Q = (3N-v)^2$
  - v QM je fázový prostor diskrétny, rozmazaný
    ↳ veľkosť najmenšieho elementu je h^{3N}

- infinit. objem fázového prostoru $\quad d\tau = \prod_{i=1}^{3N} dq_i\, dp_i = d^{3N}q_i\, d^{3N}p_i$
- QM oprava na → veľkost elementu
  ↳ nerozliš. častice $\quad d\tau = \prod_{i=1}^{3N} \frac{dq_i\, dp_i}{h^{3N}\, N!}$

- rozdelovací funkce = hustota pravd. výskytu μstavu v danom makrostave
  - $w(\{q^i, p_i\}, t)$ ... hustota pravd.

- v QM odpovedá matice hustoty $\hat{\varrho} = \sum_i p_i |\mu_i\rangle\langle\mu_i|$, kde $\varrho : \{p_i, |\mu_i\rangle\}$ je stat. soubor stavů $|\mu_i\rangle$ a ich pravd. p_i



dN ... # prístupných stavov v $(q+dq)(p+dp)$
N ... celkový # prístup. stavov

$$\frac{dN}{N} = w(\{p_i, q_i\}, t)\, d\tau$$ ← pravd. daný μstav. v $(q+dq)(p+dp)$

→ fázový objem $d\tau = d\tau'$ sa nemení pri časovém vývoji
→ # stavov dN a N sa nemení v čase ⇒ $w(\{p_i, q_i\}, t)$ sa nemení

⇒ Liovillelova rovnice $\quad \boxed{0 = \frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + \{w, H\}}$ → rovnice kontinuity

- $\boxed{\text{Liouvillova věta: Rozdelovací funkce se správa ako nestlačitelná kapalina na fázovem objemu.}}$

- pre systém v rovnováhe $\frac{\partial w}{\partial t} = 0$ → w je funkce IP ⇒ $w = w(E)$
- pro systém s $E = \text{konst}$ v rovnováhe splňují všetky stavy $H(\{q^i, p_i\}) = E$ ⇒ všetky μstavy sú rovnako pravd.

⇒ $w(\{p_i, q_i\}) = \frac{1}{\Sigma}\, \delta(E - H(\{q_i, p_i\}))$ $\qquad Z = \int d\tau\, \delta(E-H)$
↳ partiční fce = normalizace

Maxwellovo-Boltzmannovo rozdelení

- hľadáme rozdelenie rýchlostí v ideálnom plyne pri fixnej teplote T
- fixná teplota = kanonický soubor

$$\Rightarrow w(\{q^i,p_i\},t)=\frac{1}{Z_c}e^{-\beta H} \quad \text{, id. plyn: } H=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{p_i^2}{2m}$$

- pro 1čás. id. plynu: $w(p_i,q_i)=(2\pi m k_B T)^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{p^2}{2mk_BT}}$
- pravd. že μstav má hybnost $\vec{p}$: $w(\vec{p})\,d^3p=(2\pi m k_BT)^{-\frac{3}{2}}e^{-\frac{p^2}{2mk_BT}}d^3p$
- pravd., že μstav má rychlosti $\vec{v}$: $w(\vec{v})\,d^3v=\left(\frac{m}{2\pi k_BT}\right)^{\frac{3}{2}}e^{-\frac{mv^2}{2k_BT}}d^3v$

$\Rightarrow$ hustota pravd. pre 1 zložku rýchlosti:

$$\boxed{f(v_i)=\left(\frac{m}{2\pi k_BT}\right)^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{mv_i^2}{2k_BT}}} \qquad \mu=0,\quad \sigma=\sqrt{\frac{k_BT}{m}}$$

ekvipartice thm: $\boxed{\left\langle \frac{1}{2}mv^2\right\rangle=\frac{1}{2}k_BT}$

↳ 1 kvadr. st. volnosti dá $\frac{1}{2}k_BT$

- pravd, že μstav má veľkost rýchlosti v: $w(v)\,dv=4\pi\left(\frac{m}{2\pi k_BT}\right)^{\frac{3}{2}}v^2e^{-\frac{mv^2}{2k_BT}}dv$

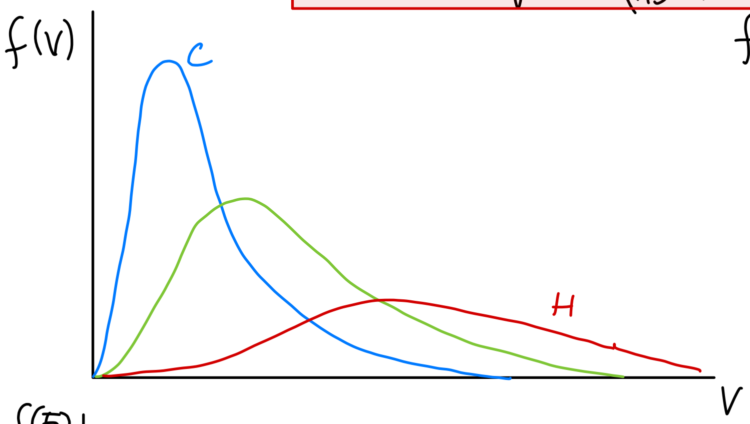
$\Rightarrow$ hustota pravd. pre veľkosť rýchlosti

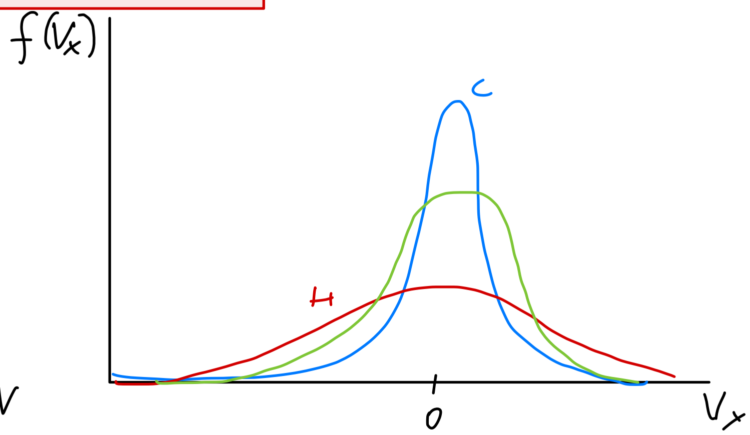
$$\boxed{f(v)=\left(\frac{m}{2\pi k_BT}\right)^{\frac{3}{2}}4\pi v^2e^{-\frac{mv^2}{2k_BT}}} \qquad \langle v\rangle=\frac{2}{\sqrt{\pi}}v_{max}$$

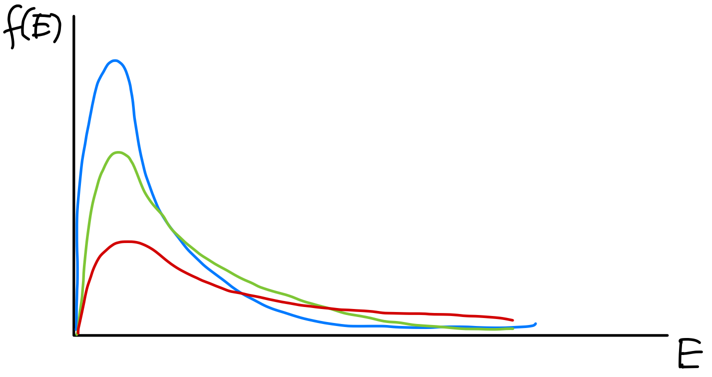
$\frac{df}{dv}=0 \rightarrow$ najpravd rýchlosť $v_{max}=\sqrt{\frac{2k_BT}{m}}$ $\quad \sqrt{\langle v^2\rangle}=\sqrt{\frac{3}{2}}\,v_p=\sqrt{\frac{3k_BT}{m}}$

$\Rightarrow$ hustota pravd. pre energiu stavu:

$$\boxed{f(E)=2\sqrt{\frac{E}{\pi}}\left(\frac{1}{k_BT}\right)^{\frac{3}{2}}e^{-\frac{E}{k_BT}}}$$







Základní statistické rozdelení, statistická entropie

- statistické rozdelení = hustota pravd. $f(x)$
  → z definice pravd: $\int f(x)\,dx = 1$, Lebesgueova míra $f(x)$

δ-distribuce, rozdelení

$$f(\vec{z}) = \frac{1}{\Sigma}\delta\left(w - g(\vec{z})\right) \qquad \Sigma = \int \delta(E - g(\vec{z})) \quad \ldots \text{ normalizace}$$

$\leftarrow \vec{z} = (q_i, p_i)$

- μkanonický soubor: $w(\vec{z}) = \frac{1}{\Sigma}\,\delta(E - H(\vec{z})) \longrightarrow S = k_B \log \Sigma$

Boltzmannov/Gibbsovo

$$f(\vec{z}) = \frac{1}{Z}\, e^{\sum_i \lambda_i g_i(\vec{z})} \quad , \text{ normalizace } \quad Z = \int e^{\sum_i \lambda_i g_i(\vec{z})}$$

$$\langle g_i \rangle = \frac{\partial}{\partial \lambda_i} \log Z$$

- kanonický soubor $\qquad f(\vec{z}) = \frac{1}{Z} e^{-\beta H(\vec{z})} \qquad \beta = \frac{1}{k_B T}$
  ↳ rez. tepla – fixovaná teplota

$F = -k_B T \log Z \qquad \langle H \rangle = -\frac{\partial}{\partial \beta} \log Z \qquad \langle H^2 \rangle = \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \log Z$

← TD limita

- grandkanonický soubor $\qquad f(\vec{z}) = \frac{1}{Z} e^{-\beta H(\vec{z}) + \alpha N}$
  ↳ rez. tepla + rez. častic

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} \int e^{-\beta H + \alpha N}$$

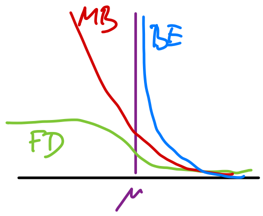
← TD limita

$\Omega = -k_B T \log Z \qquad \langle N \rangle = \frac{\partial}{\partial \alpha} \log Z \qquad \langle N^2 \rangle = \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \log Z$

Rozdelení počtu častic $\langle N_i \rangle$ v stave i

pri degeneraci treba vynásobiť g_i

$$\langle N_i \rangle_{MB} = \frac{1}{e^{\frac{E_i - \mu}{k_B T}}} \qquad \langle N_i \rangle_{BE} = \frac{1}{e^{\frac{E_i - \mu}{k_B T}} - 1} \qquad \langle N_i \rangle_{FD} = \frac{1}{e^{\frac{E_i - \mu}{k_B T}} + 1}$$



Maxwell-Boltzmann
→ rozliš. častice
→ klasicky

Bose - Einstein
→ nerozliš. bozóny
→ ∀ chcú na najnižš. hladinu pri $T \to 0$

Fermi - Dirac
→ nerozliš. fermióny
→ 1 čas na stav → pri $T \to 0$ budú obsadené stavy do $E_F = \mu$, pre $E < E_F$ sú obsad. pre $E > E_F$ nie

Statistická entropie

- entropie = miera ignorancie, chýbajúcej informácie
  – stredná hodnota prekvapenia nájdenia nejakého stavu → max. prekvapenie
- Shanon – teoria informácií

hust. pravd., rozdelovací fce

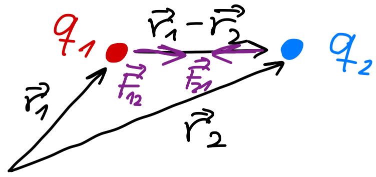
- $$\boxed{S(p) = -k_B \sum_i p_i \log p_i = -k_B \int d\tau\, p(x) \log p(x)}$$
- v QM: $\boxed{S(\rho) = -k_B \operatorname{Tr}(\rho \ln \rho)} = -k_B \sum_i p_i \log p_i$, kde $\rho = \sum p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$
- vlastnosti:
1) $S \geq 0$
2) $S = 0$ pre čistý stav $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$
3) $S = k_B \log N$ je max. entropie pro $\rho = \frac{1}{n}\mathbb{1}$
4) aditivné přes pod systémy

Elstat., stac. el. a mag. pole

Elektrostatické pole vo vákuu

Coulombov zákon – sila medzi dvoma bodovými nábojmi

$$\boxed{\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|^2}\frac{\vec{r}_1-\vec{r}_2}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|}}$$



→ príslušný potenciál $V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|}$

• pre viacej nábojov: $\vec{F}_{ij} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i\neq j}\frac{q_i q_j}{|\vec{r}_i-\vec{r}_j|^2}\frac{\vec{r}_i-\vec{r}_j}{|\vec{r}_i-\vec{r}_j|}$

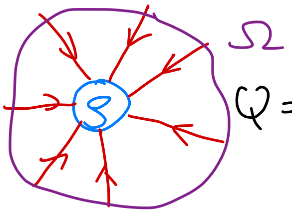
→ pre $\vec{r}_1 = 0$ → $V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r}$ → radiálny potenciál

• energia sústavy nábojov $W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i<j}\frac{q_i q_j}{|\vec{r}_i-\vec{r}_j|}$

– **intenzita el. poľa** $\vec{F} = q\vec{E}$ → bodový náboj $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{|\vec{r}-\vec{r}'|^2}\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$

Gaussov zákon

$$\boxed{\oint_\Omega \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \qquad \nabla\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$



$Q = \rho\Delta V$

$$\boxed{\nabla\times\vec{E} = 0 \leftrightarrow \oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0} \Rightarrow \vec{E} \text{ je konz.}$$

• **elstat. potenciál** ϕ → $\vec{E} = -\nabla\phi$ ⇒ $\boxed{\nabla^2\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}}$ → Poisson

→ riešenie je dané ako $\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(r')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}d\vec{r}'$, kde $G(\vec{r},\vec{r}') = \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$

→ energia v prípade spojitého rozloženia

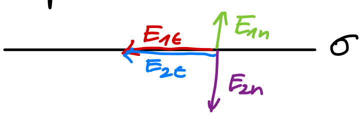
$$\boxed{W = \frac{1}{2}\int\rho(\vec{r})\phi(\vec{r})d^3\vec{r} = \frac{1}{2}\int\varepsilon_0\vec{E}\cdot\vec{E}\,d^3\vec{r}}$$

• nábojová hustota bodového náboja: $\rho(\vec{r}) = Q\,\delta(\vec{r}-\vec{r}')$

• elektrické pole na rozhraní

← plošný náboj

$$\boxed{[\vec{E}_1-\vec{E}_2]\cdot\vec{n} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \qquad [\vec{E}_1-\vec{E}_2]\times\vec{n} = 0}$$

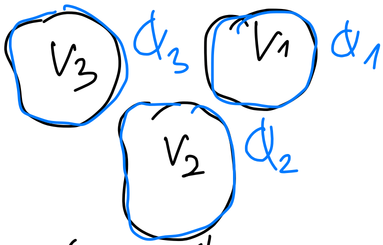


→ tangenciálne zložky sa zhodujú
→ normálové zložky sa líšia o plošný náboj
→ ϕ je vždy spojité

Elektrostatické pole v prítomnosti vodičov a dielektrikách

• **vodič** – neomezený zdroj náboja
 – $\vec{E}=0$ vo vnútri
 – $\vec{E}$ je kolmé na povrch
 – plocha vodiča tvorí ekvipotenciálu
 – Faradayova klec – vo vnútri dutého vodiča je $\vec{E}=0$

- základná úloha elstat: zo znalosti rozloženia vodičov a potenciálov na nich určiť ϕ



$$\nabla^2\phi=0$$
$$\phi(\partial V_i)=\phi_i$$

$$\psi_b=\begin{cases}0 & \vec{x}\in\partial V_{a\neq b}\\ 1 & \vec{x}\in\partial V_b\end{cases}$$

$$C_{ab}=\varepsilon_0\oint_{\partial V_a}-\nabla\psi_b\cdot d\vec{S}$$

kapacita

• potenciál na vodiči je úmerný náboju na vodiči $\boxed{Q=UC}$
• pre systém nác vodičov $\boxed{Q_a=\sum_b C_{ab}U_b}$, kde C_{ab} je mat. kapacity
 ↳ mat. je symetrická, diag. členy kladné, off diag záporné
• energia na nabitie 1 vodiča $W=\frac{1}{2}CU^2$ → energia kondenz.
 → pre syst. vodičov: $W=\frac{1}{2}\sum_{i,j}C_{ij}U_iU_j$

Multipólový rozvoj

• obecné riešenie $\phi(\vec{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}d\vec{r}'$
→ zložité riešiť pre obecné ρ → rozvoj do rady:

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}=\frac{1}{r}+\left[\partial_i\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right]_{r'=0}r_i'+\left[\partial_{ij}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right]_{r'=0}r_i'r_j'+\dots$$

$$\Rightarrow\phi(\vec{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r}\underbrace{\int\rho(\vec{r}')d\vec{r}'}_{\text{monopól } Q}+\frac{r_i}{r^3}\underbrace{\int r_i'\rho(\vec{r}')d\vec{r}'}_{\text{dipól } p_i}+\frac{3r_ir_j-r^2\delta_{ij}}{r^5}\underbrace{\int r_i'r_j'\rho(\vec{r}')d\vec{r}'}_{\text{kvadrupól } Q_{ij}}+\dots\right]$$

• **dipól** – dva náboje v tesnej blízkosti
 – dipólový moment: $p_i=\int r_i'\rho(\vec{r}')d\vec{r}'=Q\vec{\ell}$, $\phi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}\cdot\vec{p}}{r^3}$

$\vec{F}=(\vec{p}\cdot\nabla)\vec{E}$ ↳ sila
$\vec{M}=\vec{p}\times\vec{E}$ ↳ moment
$W=-\vec{p}\cdot\vec{E}$ ↳ energia
→ vonk. poli sa snaží dipól narovnať s poľom

Dielektrikum

→ látka s viazanými nábojmi – nemôžu sa hýbať
→ atómy sa ale môžu polarizovať → separácia nábojov ⇒ dipólové momenty
• hustota dipólového momentu $\vec{P}(\vec{r})=\frac{\Delta\vec{p}}{\Delta V}=N(\vec{r})\vec{p}$ → vektor polarizace

$\boxed{\nabla\cdot\vec{P}=-\rho,\quad \vec{P}\cdot\vec{n}=\sigma}$ → hustota viazaných nábojov → nemôžu sa hýbať

$\boxed{\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}}$ → vek. ele. indukce → viazané + voľné náboje

• Gaussov zákon v dielektriku $\boxed{\nabla\cdot\vec{D}=\rho \leftrightarrow \oint\vec{D}\cdot d\vec{S}=\rho}$
 ↳ na rozhraní $\vec{n}\cdot[\vec{D}_1-\vec{D}_2]=\sigma$
• **materiálové vzťahy** – dávajú do súvislosti $\vec{P}$ a $\vec{E}$
 – lineárne, izotropné dielektrikum $\boxed{\vec{P}=\varepsilon_0\chi_e\vec{E}}$, pre neizotrop $\vec{P}=\varepsilon_0\overleftrightarrow{\chi}_e\vec{E}$ → mäkké dielek

relat. permitivita

$\vec{D}=\varepsilon_0(1+\chi_e)\vec{E}=\varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E}$

$\vec{P}=\vec{P}_0$ = konšt v $\vec{E}$ → tvrdé

 – pre nelineárne – odpovede na $\vec{E}$ tvoria hysterézu • energie $w=\frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E}$
 – piezoelektrikum, elektroskrikce

Stacionární elektrické pole a elektrický proud

- stacionární přiblížení
$$\nabla\cdot\vec{D}=\rho \qquad \nabla\times\vec{E}=0$$
$$\nabla\times\vec{B}=\mu_0\vec{j} \rightarrow \nabla\cdot\vec{j}=0$$

- proud – $I=\frac{dQ}{dt}$
  - hustota prúdu $I=-\int_S\vec{j}\cdot d\vec{S}$
  - mechanizmy vedenia:
    1) konvekčný prúd – pohyb vo voľnom priestore $\boxed{\vec{j}=\rho\vec{v}}=\rho_+\vec{v}_+-\rho_-\vec{v}_-$
    2) kondukčný prúd – pohyb v látke $\vec{j}=\mu\vec{E}$ μ... pohyblivosť
    3) polarizačný prúd – viazaný v dielektriku $\vec{j}=-\frac{\partial\vec{P}}{\partial t}$

- rovnica kontinuity: $\boxed{\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot\vec{j}=0}$, stac. prípad $\nabla\cdot\vec{j}=0$

Ohmov zákon

- homogénny vodič – platí ohmov zákon $\boxed{U=IR}$
  ↳ R je konštanta úmery, odpor v ohmech
  ↳ U je napätie $U=\Delta\varphi=\int\vec{E}\cdot d\vec{l}$
  - empirický vzťah pre vodič: $R=\rho\frac{l}{S}$ ρ... merný odpor
  - differenciálny vzťah: $\boxed{\vec{j}=\gamma\vec{E}}$ → kde $\gamma=\frac{1}{\rho}$ merná vodivosť
  - $\boxed{\rho=0}$ → žiadne viazané/voľné náboje

- nehomogénny vodič – rovnica kontinuity ⇒ uzavrené smyčky $\vec{j}$
  - nemôže byť realizovaný elstat polem – potenciálové
  ⇒ externé nekonzerv. sily

$$\boxed{I=\frac{1}{R}(U+\mathcal{E})} \quad \mathcal{E}\text{ ... elektromot. napätie} \qquad \boxed{\vec{j}=\gamma(\vec{E}+\vec{E}^*)} \quad \vec{E}^*\text{ ... externé nekonz.}$$

- výkon obvodu $\boxed{N=\frac{dW}{dt}=UI}$ → Joulovo teplo
  $\boxed{n=\vec{j}\cdot\vec{E}}$ → hustota výkonu

Drudeho model

→ model častice pohyb. sa s odporovou silou $\vec{F}_{od}=\frac{mv}{\tau}$

$$\boxed{m\dot{v}=qE-\frac{mv}{\tau}} \Rightarrow \dot{v}+\frac{v}{\tau}=\frac{q}{m}E$$

→ ustálený pohyb pre $\dot{v}=0$ ⇒ $\vec{v}_D=\frac{q\tau}{m}\vec{E}$ ⇒ $\mu=\frac{q\tau}{m}=\frac{\gamma}{nq}$

$$\langle\vec{j}\rangle=\underbrace{nq}_{\rho}\vec{v}_D=\frac{nq^2\tau}{m}\vec{E} \Rightarrow \gamma=\frac{nq^2\tau}{m} \Rightarrow \tau=\frac{m\gamma}{nq^2}$$

Stacionárni mag. pole

- príslušné Maxwellky: $\nabla\times\vec B = \mu_0 \vec j$, $\nabla\cdot\vec B = 0$ → uzavrenosť mag. čiar
- Lorentzova sila $\vec F = q(\vec E + \vec v\times\vec B)$ → mag. pole nekoná prácu
- Amperov zákon $\boxed{\oint_\ell \vec B\cdot d\vec\ell = \mu_0 I \quad\leftrightarrow\quad \nabla\times\vec B = \mu_0\vec j}$

→ riešením dostaneme Biot-Savart:

$$\boxed{\vec B = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec j\times\vec R}{R^3}\,dV = \frac{\mu_0}{4\pi} I\oint\frac{d\vec\ell\times\vec R}{R^3}}$$

- $\nabla\cdot\vec B=0 \Rightarrow$ ex $\vec A$, že $\boxed{\vec B=\nabla\times\vec A}$ lebo $\nabla\cdot\nabla\times = 0$

→ $\vec A$ nie je jednoznačné: $\vec A' = \vec A + \nabla\chi$, lebo $\nabla\times\nabla = 0$

- voľbou kalib. podmienky $\nabla\cdot\vec A = 0$ dostaneme $\boxed{\nabla^2\vec A = -\mu_0\vec j}$

→ Poisson v 3. súradniciach ⇒ v prípade kartéz. súradníc:

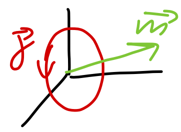
$$\boxed{\vec A = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec j}{|\vec r-\vec r'|}\,d^3\vec r'}$$

- plošné prúdy: $\vec j\to\vec j_S$ ⇒ $\vec A$ je sp., $\vec B$ je sp. kromne plochy
- na rozhraní: $\vec n\cdot[\vec B_2-\vec B_1]=0$ $\quad$ $\vec n\times[\vec B_2-\vec B_1] = \mu_0\vec j_S$ ← plošné prúdy

↳ sp. normálová zlož. $\quad$ ↳ nesp. tangenciálna

- multipólový rozvoj: $\quad$ → priblíženie dipólu — malá slučka

$$\frac{1}{|\vec r-\vec r'|} = \cancel{\frac{1}{r}}^{\,0} + \underbrace{\left[\partial_i\frac{1}{|\vec r-\vec r'|}\right]_{r_i'=0}}_{\frac{x_i}{r^3}} x_i' + \dots$$



→ z asym $x_i' j_i$ ⇒ $\boxed{\vec A = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec m\times\vec r}{r^3}}$ $\quad\boxed{\vec m = \frac{1}{2}\int\vec r\times\vec j\,d\vec r} = IS$

$W = -\vec m\cdot\vec B$ $\quad$ $\vec F = (\vec m\cdot\nabla)\vec B$ $\quad$ $\vec M = \vec m\times\vec B$

↳ energie $\quad$ ↳ sila $\quad$ ↳ moment

- hustota mag. dipólov $\vec M = \frac{\Delta m}{\Delta V} = \vec m\, n$ ← hustota dipólov

$$\boxed{\begin{aligned}\nabla\times\vec M &= \vec j\\ \vec M\times\vec n &= \vec j_S\end{aligned}}$$

→ objem. prúdy
→ plošné prúdy

Magnetické pole v látkovom prostredí

- magnetizace $\vec{M} = \frac{\Delta \vec{m}}{\Delta V} = n\vec{m}$ ... hustota mag. dipólov
- aproximace látky – viazané magnetické dipóly

$\boxed{\begin{array}{l}\nabla \times \vec{M} = \vec{j}_b \\ \vec{n} \times \vec{M} = \vec{j}_s\end{array}}$ → viazané objemové prúdy
→ viazané plošné prúdy

$$\mu_0(\vec{j}_f + \vec{j}_b) = \nabla \times \vec{B} - \frac{\nabla \times \vec{M}}{\mu_0} = \mu_0 \nabla \times \vec{H} \Rightarrow \boxed{\nabla \times \vec{H} = \vec{j}}$$

$\boxed{\vec{H} = \frac{1}{\mu_0}\vec{B} - \vec{M}}$ → vektor. mag. pola $\quad \vec{P}_m = \mu_0 \vec{M}$ mag. polarizace

- na rozhraní $\vec{n} \cdot [\vec{B}_1 - \vec{B}_2] = 0 \qquad \vec{n} \times [\vec{H}_1 - \vec{H}_2] = \vec{j}_s$

Materiálové vzťahy

Slabomag. materiály

$\boxed{\vec{M} = \chi_m \vec{H}}$ $\qquad \vec{B} = \mu_0(\chi_m + 1)\vec{H} = \mu_0 \mu_R \vec{H} = \mu \vec{H}$

$\chi_m > 0$ ... paramag. → orientácia v smere $\vec{B}$ (K, Na, ..)
$\chi_m < 0$ ... diamag. → orientácia v protismere $\vec{B}$ (C, Cu, Au, H_2O, ..)
$\chi_m \propto \frac{1}{T}$ → nulové pre $T > T_c$. Curieova teplota

Silnomag. materiály

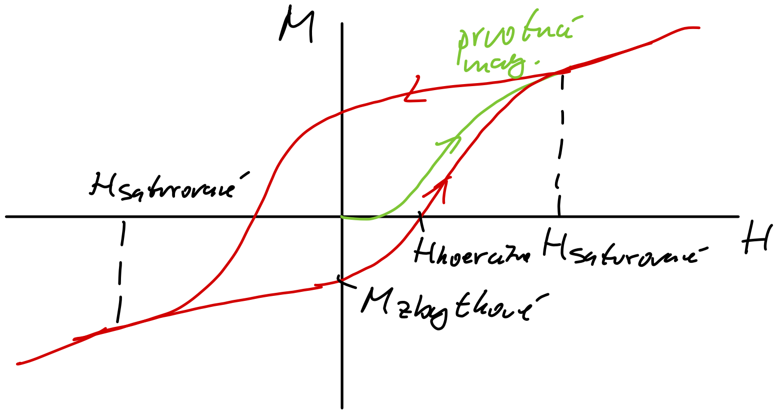
- magnetické domény
- spontánna magnetizácia

feromagnet ↑↑↑↑
antiferomagnet ↑↓↑↓
ferimagnet ↑↓↑↓

Hysteréza

→ nelin. chovanie
→ pamäťový jav

→ pre dostatočne veľké polia je lineárne



- tvrdý magnet – neovplyvní ho vonkajšie pole
- mäkký magnet – lineárne chovanie

- energie $w_e = \frac{\vec{B} \cdot \vec{H}}{2}$

Elektrodynamika

Elekromagnetická indukce

• príslušná Maxwellka: $\nabla \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B}$

→ integrací cez objem $\int d\vec{S}$ dostaneme: $\boxed{\mathcal{E} = -\frac{d\Psi}{dt}}$

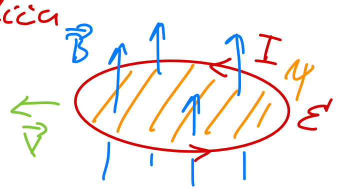
Faradayov zákon elmag indukce

Lenz

• tok mag. pola $\Psi = \int \vec{B} \cdot d\vec{S}$

• el. mot. napätie $\mathcal{E} = \oint_\gamma \frac{d\vec{F}_{EM}}{dq} \cdot d\vec{s} = \oint_\gamma (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{s}$

elmag sila, premenné $\vec{B}$, pohyb vodiča



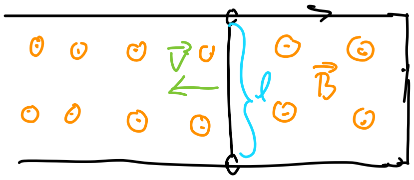
• Lenzov zákon – indukované napätie oponuje poli

• vznik $\mathcal{E}$ → striedavé magnetické pole $\vec{B} = \vec{B}_0 \sin(\omega t)$

$\mathcal{E} = -A\omega \cos\omega t$

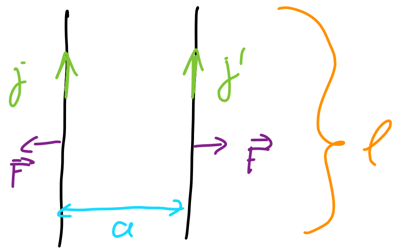
• striedavý prúd indukuje mag. pole

• pohybujúci sa vodič → railgun

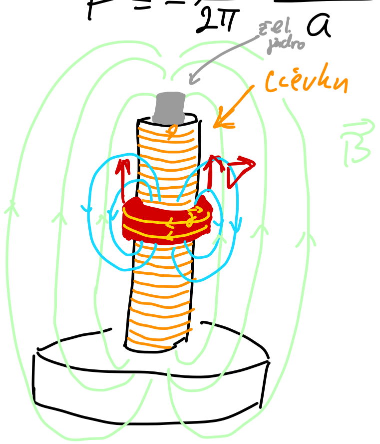


$\mathcal{E}_F = \int \vec{v} \times \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = vB\ell$

• definícia ampéra $\vec{F} = -\frac{\mu_0}{2\pi} \frac{II'\ell}{a}$



• elmag launcher



Kvazistacionárni elektrické a mag. pole

• príslušné Maxwellky:

$$\nabla\cdot\vec D = \rho \qquad \nabla\cdot\vec B = 0$$
$$\nabla\times\vec E = -\partial_t \vec B \qquad \nabla\times\vec H = \mu_0 \vec j + \cancel{\partial_t \vec D}$$

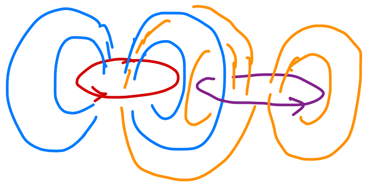
→ kvazistacionarita – zmeny mag. pola sú pomalé
– zanedbanie konečnej rýchlosti c

• elmag indukce – Faradayov zákon $\nabla\times\vec E = -\partial_t\vec B \rightarrow \mathcal{E} = -\frac{d\Psi}{dt}$

→ tok mag. pola $\Psi = \int \vec B\cdot d\vec S$

→ elektromotorické napätie $\mathcal{E} = \int \frac{d\vec f_{EM}}{dq}\cdot d\vec l = \int \vec E + \vec v\times\vec B \, d\vec l$

• tok pole dvou smyček: $\boxed{\Psi_{\text{skrz 1 od 2}} = L_{12} I_2}$



• indukčnost $L_{ij} = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{\gamma_i}\oint_{\gamma_j}\frac{d\vec l_i\cdot d\vec l_j}{|\vec r_i - \vec r_j|}$ → pre ∞ tenké vodiče

• systém smyček: $\Psi_i = \sum_j L_{ij} I_j$

↳ nelze na samoindukčnosť: $L_{kk} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{I_k^2}\iint \frac{\vec j_k(\vec x_1)\,\vec j_k(\vec x_2)}{|\vec x_1-\vec x_2|}\, dV_1 dV_2$

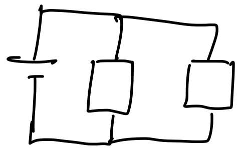
• samoindukčnosť – $\Psi = LI \Rightarrow \boxed{\mathcal{E} = -L\frac{dI}{dt}}$

• práce $\frac{dA}{dt} = -\frac{dq}{dt}\mathcal{E} = I\frac{d\Psi}{dt} \Rightarrow \boxed{P = I\frac{d\Psi}{dt}}$ ... výkon

• energie jednej smyčky $W = \frac{1}{2} L I^2$

• energie více smyček $W = \frac{1}{2}\sum_{i,j} I_i L_{ij} I_j = \frac{1}{2}\sum_k I_k \Psi_k$

Obvody



- elekronické súčiastky spojené vodiči
- diagramy obvodov – ideálny vodič bez odporu
  – odpor reprez. rezistorom
- Ohmov zákon $U = IR$
- elektromotorické napätie $\mathcal{E} + U = IR$ → nekonz. sily

- základné prvky elektrických obvodov

odpor	kondenzátor	cievka	zdroj DV	zdroj AV	zdroj C
$U = IR$	$Q = UC$	$U = L\dot{I}$	$\mathcal{E}$	$\mathcal{E}(t)$	$I(t)$

- uzol → miesto vetvenia el. vodiča
- slučka → uzavretá časť obvodu
- Kirchhoffove zákony:

$\boxed{\begin{array}{l} 1.\ KZ:\ V\ každom\ uzle\ \ \sum I_i = 0 \\ 2.\ KZ:\ V\ každej\ slučke:\ \mathcal{E} = \sum U_i \end{array}}$ → dôsledky $\nabla \cdot \vec{j} = 0$ a $\partial_t \rho = 0$

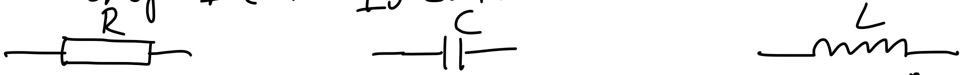
AC → časovo zmenný prúd: $I = I(t) = I_0 \sin \omega t$ → väčšina harmonický
↳ obecný ako LK

DC → prúd konštantný v čase: $I = I_0 = konst$

- prechodové javy – pri zapájaní, odpájaní prvkov
- ustálený stav – bez prechodových javov

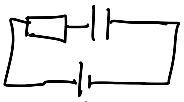
- v striedavých obvodoch – impedance $Z = \frac{U_m}{I_m}$, kde $I_m = max\, I(t)$
  $U_m = max\, U(t)$

→ zdroj $I(t) = I_0 \sin \omega t$



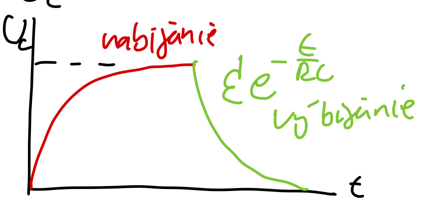
R	C	L
$U = IR$	$Q = UC$	$U = -\dot{I}L$
$U = I_0 R \sin \omega t$	$U = \frac{1}{C\omega}\sin(\omega t - \frac{\pi}{2})$	$U = L\omega \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$
$Z = R$	$Z = 1/C\omega$	$Z = L\omega$
$\Delta\varphi = 0$	$\Delta\varphi = -\frac{\pi}{2}$	$\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$

- RC obvod

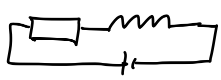


$konst = \mathcal{E} = IR + \frac{Q}{C}$

$\left.\begin{array}{l} I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \\ U_c(t) = \mathcal{E}(1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \end{array}\right\}$ nab.



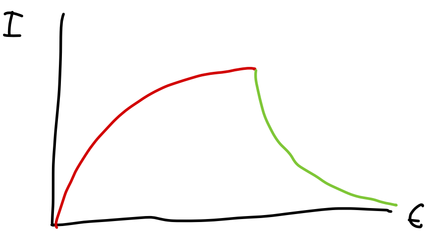
- LR obvod



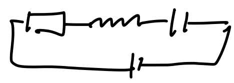
$\mathcal{E} = IR + L\dot{I}$

$I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t})$ ← zap

$I(t) = \mathcal{E}_R\, e^{-\frac{R}{L}t}$ ← vyp.



- RLC obvod



→ rezonančný obvod

$L\ddot{I} + \dot{I}R + \frac{1}{C}I = \dot{\mathcal{E}} \neq 0$

→ rovnice tlmeného buzeného LHO

→ rezonance

Komplexná symbolika

$I = I_0 \sin(\omega t + \varphi_I) \longmapsto \hat{I} = I_0 e^{i\omega t + \varphi_I} = \bar{I} e^{i\omega t}$

$\hat{U} = U_0 e^{i\omega t + \varphi_U} = \bar{U} e^{i\omega t}$

- odpor: $\bar U_R = R \bar I_R$ $\quad \bar Z_R = R$
- kapacita: $\bar U_C = \frac{-i}{\omega C}\bar I_C$ $\quad \bar Z_C = \frac{-i}{\omega C} = \frac{1}{\omega C} e^{-i\frac{\pi}{2}} = Z_{0C}\, e^{i\varphi_C}$
- indukcia: $\bar U_L = i\omega L\, \bar I_L$ $\quad \bar Z_L = i\omega L = \omega L\, e^{i\frac{\pi}{2}} = Z_{0L}\, e^{i\varphi_L}$

Ohm $\bar U = \bar Z \bar I$ $\quad$ 1KP: $\sum_i \bar I_i = 0$ $\quad$ v lib. čase $\quad$ 2KP: $\sum_i \bar{\mathcal{E}}_i = \sum_l \bar Z_l \bar I_l$

Metódy riešení

- základná úloha – nájsť prúd v každej vetve
  ↳ určiť napätie medzi potrebnými bodmi

→ Kirchhoffove pravidlá $\quad \sum_i \bar I_i = 0$

$\sum_i \bar{\mathcal{E}}_i = \sum_l \bar Z_l \bar I_l$

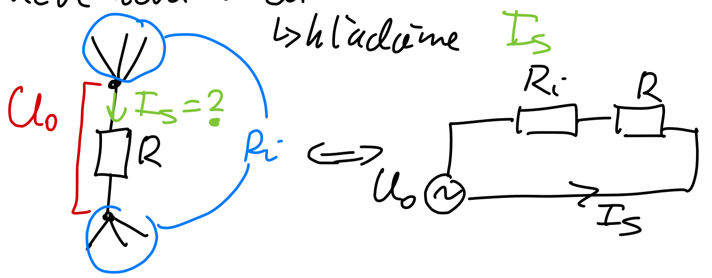
↳ vytvorenie úplného stromu – grafová štruktúra
– metódy lin. algebry na syst. rovníc

- metoda smyčkových proudů – každá smyčka má vlastní proud → součet
- metoda uzlových napätí – každý uzel má svoje napätie (voči ref) → 1KP

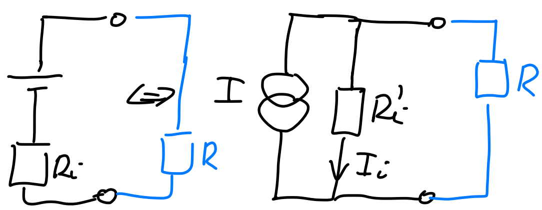
↳ založené na metódach lingebry, pre rozklad do vhodnejšej báze

Théveninova veta

↳ hľadáme I_S



Nortonova veta



$I = \frac{\mathcal{E}}{R_i + R}\left(\frac{R_i + R}{R_i'}\right)$

Maxwellove rovnice

Maxwellov posuvný prúd

• ve vákuu :

$$\boxed{\begin{aligned} &\nabla\cdot\vec{E} = \rho/\varepsilon_0 && \nabla\cdot\vec{B} = 0 \\ &\nabla\times\vec{E} = -\partial_t\vec{B} && \nabla\times\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \overbrace{\tfrac{1}{c^2}\partial_t\vec{E}} \end{aligned}}$$

• integrálny tvar :

$$\boxed{\begin{aligned} &\oint\vec{E}\cdot d\vec{S} = Q/\varepsilon_0 && \oint\vec{B}\cdot d\vec{S} = 0 \\ &\oint\vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -\int\partial_t\vec{B}\cdot d\vec{S} && \oint\vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I + \tfrac{1}{c^2}\oint\partial_t\vec{E}\cdot d\vec{S} \end{aligned}}$$

→ lin. rovnice pre 6 neznámych $\vec{E}, \vec{B}$

→ zadané sú zdroje $\rho, \vec{j}$ → rovnica kontinuity $\boxed{\partial_t\rho + \nabla\cdot\vec{j} = 0}$

• v látke:

$$\boxed{\begin{aligned} &(1)\ \nabla\cdot\vec{D} = \rho && (3)\ \nabla\cdot\vec{B} = 0 \\ &(2)\ \nabla\times\vec{E} = -\partial_t\vec{B} && (4)\ \nabla\times\vec{H} = \vec{j} + \partial_t\vec{D} \end{aligned}}$$

+ materiálové vzťahy $\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}$ $\quad \vec{B} = \mu_0\vec{H} - \vec{M}$

+ podmienky na rozhraní: $\vec{n}\cdot[\vec{D}_2 - \vec{D}_1] = \sigma$ $\quad \vec{n}\cdot[\vec{B}_2 - \vec{B}_1] = 0$

$\vec{n}\times[\vec{E}_2 - \vec{E}_1] = 0$ $\quad \vec{n}\times[\vec{H}_2 - \vec{H}_1] = \vec{j}_S$

→ # rovníc: $\overbrace{1+3+1+3}^{\text{maxw}} + \overbrace{3+3}^{\text{mate}} = 14$ pro $4\times 3 = 12$ premenných

↳ preurčené ? div. rovnice sú len okrajové podm.

→ z $\nabla\cdot(2)$ dostaneme $\partial_t(3)$
z $\nabla\cdot(4)$ dostaneme $\partial_t(1)$
$\Big\}$ ⇒ (1), (3) určujú konšt.

• bez zdrojov → symetrické pre $\vec{E}$ a $\vec{B}$

• obecné riešenia ve vákuu:

$\vec{r} = \vec{x} - \vec{x}'$

$r = |\vec{x} - \vec{x}'|$

$$\vec{E}(t,\vec{x}) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \overbrace{\frac{\rho(t-\frac{r}{c},\vec{x}')}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}}^{\text{Coulomb}} + \overbrace{\frac{\partial\rho}{\partial t}(t-\tfrac{r}{c},\vec{x}')\frac{\vec{r}}{cr^2} - \frac{\partial\vec{j}}{\partial t}(t-\tfrac{r}{c},\vec{x}')\frac{1}{c^2 r}}^{\text{žiarenie}}\, d^3x'$$

$$\vec{B}(t,\vec{x}) = -\frac{\mu_0}{4\pi}\int \underbrace{\vec{j}(t-\tfrac{r}{c},\vec{x}')\times\frac{\vec{r}}{r^3}}_{\text{Biot-Savart}} + \underbrace{\frac{\partial\vec{j}}{\partial t}(t-\tfrac{r}{c},\vec{x}')\times\frac{\vec{r}}{cr^2}}_{\text{žiarenie}}\, d^3x'$$

Potenciály elmag pola

• Maxwellly: $$\boxed{\begin{array}{ll} (1)\ \nabla\cdot\vec{E} = \rho/\varepsilon_0 & (3)\ \nabla\cdot\vec{B} = 0 \\ (2)\ \nabla\times\vec{E} = -\partial_t\vec{B} & (4)\ \nabla\times\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \frac{1}{c^2}\partial_t\vec{E} \end{array}}$$

$$\left.\begin{array}{ll} (3) \Rightarrow & \vec{B} = \nabla\times\vec{A} \\ (2) \Rightarrow & \vec{E} = -\nabla\varphi - \partial_t\vec{A} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \vec{A}\ \text{vek. potenciál} \\ \varphi\ \text{skalárny potenciál} \end{array}$$

• pot. nie sú určené jednoznačne - kalib. voľnosť:

$$\vec{A}' = \vec{A} + \nabla\chi \qquad \varphi = \varphi' + \partial_t\chi$$

• voľbou pot → aut. splnené (3) a (2)
• rovnice pre $\vec{A}$ a φ zo (1) a (4)

$$\left(\nabla^2\vec{A} - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\vec{A}\right) - \nabla\left(\nabla\cdot\vec{A} + \frac{1}{c}\partial_t\varphi\right) = -\mu_0\vec{j}$$
$$-\nabla^2\varphi - \partial_t\nabla\cdot\vec{A} = \rho/\varepsilon_0$$

→ Lorentzova kalib. podmienka: $\nabla\cdot\vec{A} + \frac{1}{c}\partial_t\varphi = 0$

$$\boxed{\begin{array}{l} \nabla^2\vec{A} - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\vec{A} = \Box\vec{A} = -\mu_0\vec{j} \\ \nabla^2\varphi - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\varphi = \Box\varphi = -\rho/\varepsilon_0 \end{array}}$$ → zdrojové vlnové rovnice

→ Coulombova kalib. podm.: $\nabla\cdot\vec{A} = 0$

$$\nabla^2\varphi \overset{\text{akauzálne}}{=} -\rho/\varepsilon_0 \qquad \Box\vec{A} + \frac{1}{c}\partial_t\nabla\varphi = -\mu_0\vec{j}$$

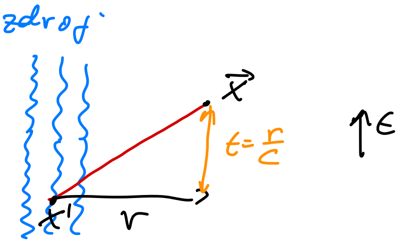
→ Weylova kalib. podm.: $\varphi = 0$

Riešenia vlnových rovníc

$\left.\begin{array}{l} \text{– retardované} \\ \text{– advancované} \end{array}\right\}$ konečná rýchlosť šírenia

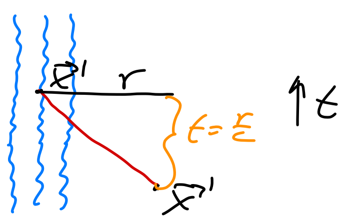
$$\varphi_{\substack{ret \\ adv}}(t,\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho\left(t \mp \frac{|\vec{x}-\vec{x}'|}{c}, \vec{x}'\right)}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\, d^3x'$$

retard:



$$\vec{A}_{\substack{ret \\ adv}}(t,\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\vec{j}\left(t \mp \frac{|\vec{x}-\vec{x}'|}{c}, \vec{x}'\right)}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\, d^3x'$$

advanc:

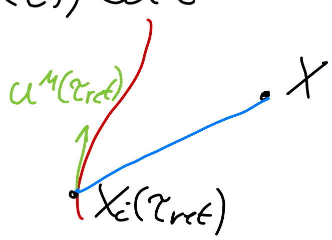


• bodové zdroje:

$$\vec{j} = \rho\vec{v} = q\,\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{x}')\,\vec{v} \Rightarrow j^\mu = \int q\, u^\mu(\tau)\,\delta^{(4)}(X|X_i(\tau))\, c\, d\tau$$

$$\phi(t,\vec{x}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{r}\,\frac{1}{\left(1-\frac{\vec{r}\cdot\vec{v}}{c}\right)}\Bigg|_{\tau=\tau_{ret}}$$
$$\vec{A}(t,\vec{x}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\,\frac{\vec{v}}{r}\,\frac{1}{\left(1-\frac{\vec{r}\cdot\vec{v}}{c}\right)}\Bigg|_{\tau=\tau_{ret}}$$

→ $\vec{v}, \vec{r}$ vyčíslené v čase $\tau = \tau_{ret}$



Zákony zachování

• obecný tvar rovnice kontinuity: $\partial_t w + \nabla \cdot \vec{w} = S$

hustota vel — hust toku — hustota tvorby; $\vec{w} = w\vec{v}$

Zachování náboje

→ rovnice kontinuity: $\boxed{\nabla \cdot \vec{j} + \partial_t \rho = 0}$ $\quad \partial_\mu j^\mu = 0$

↳ vybudovaná do Maxwellích, stačí $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{B}) = \dots$

Zachování energie

hustota výkonu

$$\boxed{w = \nabla \cdot \vec{S} + \partial_t u}$$

$$u = \frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E} + \frac{1}{2}\vec{H}\cdot\vec{B} \rightarrow \text{hust. energie}$$

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B} \rightarrow \text{Poyinting}$$

$w = \vec{j}\cdot\vec{E}$

→ v prípade vakua: $\boxed{\nabla \cdot \vec{S} + \partial_t u = 0}$ … rov. kont. pre hust. energie

Zachovanie hybnosti

$$T_{ij} = -\varepsilon_0\left[E_i E_j + c^2 B_i B_j - \frac{1}{2}\delta_{ij}\left(E_i E_i + c^2 B_i B_i\right)\right]$$ … tenzor toku hybnosti

$$\vec{g} = \varepsilon_0 \vec{E}\times\vec{B} = \frac{1}{c^2}\vec{S}$$ … vektor hustoty hybnosti

$$\boxed{\nabla \cdot \overleftrightarrow{T} + \partial_t \vec{g} = -\vec{f}} = -(\rho\vec{E} + \vec{j}\times\vec{B})$$ … rovnica kontinuity pre hybnosti

Zachovanie 4-hybnosti

→ ZZE + ZZH

$$T_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} u & c\vec{g} \\ \frac{1}{c}\vec{S} & \overleftrightarrow{T} \end{bmatrix} \qquad \boxed{\partial_\mu T^{\mu\nu} = \phi^\nu}$$

hustota 4-síly

$$\phi^\nu = j^\mu F_\mu{}^\nu = \begin{bmatrix} w/c \\ \vec{f} \end{bmatrix}$$

$$T^{\mu\nu} = \varepsilon_0 c^2 \left[F^{\mu\alpha} F^{\nu\beta}\eta_{\alpha\beta} - \frac{1}{4}F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}\eta^{\mu\nu}\right]$$

Elekromagnetické vlny

Vlnová rovnice, rovinná elmag vlna

• Maxwellly bez zdrojov, mimo prostredia: $\nabla\cdot\vec{E}=0 \quad \nabla\cdot\vec{B}=0$
$\nabla\times\vec{E}=-\partial_t\vec{B} \quad \nabla\times\vec{B}=\frac{1}{c^2}\partial_t\vec{E}$

→ spojením dostaneme:

$$\boxed{\begin{aligned}\nabla^2\vec{E}-\frac{1}{c^2}\partial_t^2\vec{E}=\Box\vec{E}=0\\ \nabla^2\vec{B}-\frac{1}{c^2}\partial_t^2\vec{B}=\Box\vec{B}=0\end{aligned}}$$

→ vlnové rovnice pre $\vec{E}$ a $\vec{B}$

• v prípade prostredia $c^2=\frac{1}{\varepsilon_0\mu_0} \rightarrow v^2=\frac{1}{\varepsilon_r\varepsilon_0\mu_0}=\frac{c^2}{n^2}$ index lomu

• $n=\frac{c}{v}\geq 1$ ... index lomu

• $v(\omega)=\frac{c}{n(\omega)}$ ... rýchlosť šírenia $\quad k(\omega)=\frac{n(\omega)\omega}{c} \quad \lambda(\omega)=\frac{\lambda_0}{n(\omega)}$

$\omega=ck$ ... disperzní relace

Rovinná vlna

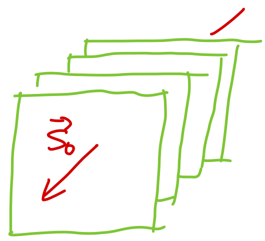
harmonická vlna $\qquad$ kpl. formalizmus

$$\boxed{\vec{E}=\vec{E}_0\sin(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t+\delta)}=\vec{E}_0e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t+\delta)} \qquad \boxed{\vec{B}=\vec{B}_0\sin(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t+\delta)}$$

$\vec{k}=\frac{2\pi}{\lambda}\vec{s}_0$, kde $|\vec{s}_0|=1$ je smer šírenia

$\omega=2\pi f=\vec{k}\cdot\vec{s}_0c=kc$

$\vec{s}_0=\frac{\vec{k}}{|\vec{k}_0|}$ $\qquad$ $\vec{s}_0\cdot\vec{r}=\text{konst}$ → rovina ⇒ rovinná vlna



$\vec{E}\perp\vec{B}\perp\vec{s}_0$

$\left.\begin{aligned}\vec{s}_0\times\vec{E}=v\vec{B}\\ \vec{s}_0\times\vec{B}=-\frac{1}{v}\vec{E}\end{aligned}\right\}$ smer šírenia je kolmý na el. a mag. pole ⇒ priečne vlnenie

• Lorentzove invarianty $\mathcal{L}\propto E^2-c^2B^2=0 \qquad \mathcal{G}\propto\vec{E}\cdot c\vec{B}=0$

• energia vlny:

$\langle u\rangle=\langle u_E\rangle+\langle u_B\rangle=\frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r E_0^2$ → hust. energ.

$\langle cu\rangle=\langle\varepsilon_0E^2c\rangle$ → žiarivý výkon

$\langle S\rangle=\frac{1}{2}\varepsilon_0cnE_0^2$ → Pointing

$$\boxed{\langle I\rangle=\frac{1}{2}\varepsilon_0cnE_0^2}$$ → intenzita

• z linearity Maxwellich plynie princip superpozície:

$$\vec{E}=\sum_n\vec{E}_n$$

všeobecná vlna → Fourierka → stačí skúmať harmonické

pre nestredovanú intenzitu v komplexnej notácii:

$$\boxed{I=\frac{1}{4}\varepsilon_0n^2\vec{E}\cdot\vec{E}^*}$$

Polarizační vlastnosti elmag. vlny

• BUNO $\vec{k} = k\,\vec{e}_z$

$$\left.\begin{aligned} E_x &= a_x\cos(kz-\omega t)\\ E_y &= a_y\cos(kz-\omega t+\delta)\end{aligned}\right\}\quad \vec{E} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y e^{i\delta}\end{pmatrix} e^{i(kz-\omega t)}$$

→ v závislosti na a_x, a_y, δ dostaneme rôzne polarizácie

• polarizačný valec:

$$\left(\frac{E_x}{a_x}\right)^2 - 2\frac{E_x}{a_x}\frac{E_y}{a_y}\cos\delta + \left(\frac{E_y}{a_y}\right)^2 = \sin^2\delta$$

elipsa

$a_x = a_y = a$, $\delta = \pm\frac{\pi}{2}$ → kruhovo

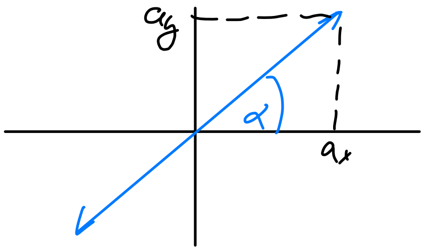
$\delta = 0$ → lineárne

Jonesov formalizmus

• polarizačný stav = 2D vektor

$$\vec{E} = E_{ef}\begin{pmatrix}\cos\alpha \\ \sin\alpha\, e^{i\delta}\end{pmatrix} e^{i\varphi}$$

$$E_{ef} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$



$$\vec{J} = \begin{pmatrix}\cos\alpha \\ \sin\alpha\, e^{-i\delta}\end{pmatrix}$$ → Jonesov vektor

$$\langle u_E\rangle = \frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r E_{ef}^2$$

• špeciálne prípady:

1) lineárne: $\vec{J} = \begin{pmatrix}\cos\alpha \\ \sin\alpha\end{pmatrix}$ $\delta = 0$, α určuje rovinu polarizace

2) kruhovo $\vec{J} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 \\ -i\end{pmatrix}$

LCP RCP

Príprava polariz. svetla:
1) lineárny dvojlom
2) odraz pod θ_{Br}
3) dichroizmus – $\vec{E}$ je v jednom smere abs

Polarizačné zariadenia – menia polarizačný vektor ⇒ matice

1) **rotátor** – rotuje polarizační rovinu o uhol ϕ

$$R = \begin{pmatrix}\cos\phi & \sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi\end{pmatrix}$$

2) **polarizátor** – projektuje do nejakého smeru daného uhlom β

⇒ nezachováva energiu

$$T = \begin{pmatrix}\cos\beta \\ \sin\beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\beta & \sin\beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos^2\beta & \sin\beta\cos\beta \\ \sin\beta\cos\beta & \cos^2\beta\end{pmatrix} = T$$

3) **fázová doštička** – vytvára fázový posun medzi x, y smermi

– neizotropný materiál

$$\phi = \frac{2\pi}{\lambda}(n_y - n_x)d$$

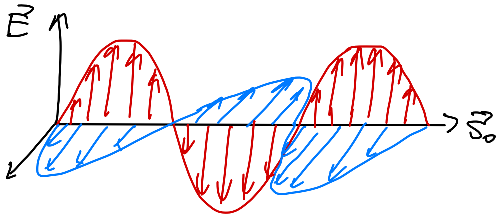
$$\Rightarrow\quad T = \begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & e^{i\phi}\end{pmatrix}$$

Šíření elmag. vlny v látkovom prostředí

• v prípade **látkového prostredia**:
→ nemagnetického $\vec{B} \approx \mu_0 \vec{H}$ ⇒ dominuje elek. zložka:

$$\boxed{\Box \vec{E} = \mu_0 \partial_t \vec{j}_f + \mu_0 \partial_t^2 \vec{P} + \frac{1}{\varepsilon_0} \nabla \rho_f - \frac{1}{\varepsilon_0} \nabla(\nabla \cdot \vec{P})}$$

1) **nemagnetické** $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ (dominuje $\vec{E}$)
2) **nevodivé** $\rho_f = 0$, $\vec{j}_f = 0$
3) **izotropné** $\nabla(\nabla \cdot \vec{P}) = 0$
4) **lineárne** $\vec{P} = \varepsilon_0 \chi(\omega) \vec{E} = \varepsilon_0 (\varepsilon_r(\omega) - 1) \vec{E}$



$$\Rightarrow \nabla^2 \vec{E} - \mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon_r(\omega) \vec{E}_{tt} = \nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{v^2(\omega)} \partial_t^2 \vec{E} = 0$$

• vázová rychlost $v(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon_r(\omega)}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}} = \frac{c}{n(\omega)}$

disperzní relace

• index lomu $n(\omega) = \frac{c}{v(\omega)} \geq 1$, vlnový vektor $\boxed{k(\omega) = \frac{n(\omega)\omega}{c}}$

$\lambda(\omega) = \frac{\lambda_0}{n(\omega)}$

$v_g = \frac{d\omega}{dk}$

→ v prípade vodivého prostredia $\vec{j} = \gamma \vec{E}$

$$\Rightarrow \boxed{\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{v^2(\omega)} \partial_t^2 \vec{E} = \gamma \mu_0 \partial_t \vec{E}}$$ → pohlcovanie $\vec{E}$ v prostredí

• intenzita $I = I_0 e^{-\alpha z}$ → absorpce záření
Lambert-Beerův zákon → α absorpční koef.

• pre komplexnú rovinnú vlnu $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(k_R z - \omega t)} \underbrace{e^{-k_I z}}_{\text{útlm}}$ $\qquad \alpha = 2k_I$

$$\left.\begin{array}{l} \tilde{k} = k_R + i k_I \\ k_R = \frac{\omega}{c} n \\ k_I = \frac{\omega}{c} \varkappa \end{array}\right\} \quad \tilde{n} = n + i\varkappa \rightarrow \text{komplexní idx lomu}$$

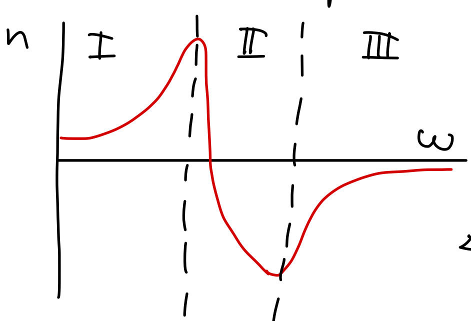
• pri pohlcovaní iba $\vec{E}$ ⇒ $\vec{B}$ a $\vec{E}$ nekmitajú vo fázy: $\Delta\varphi = \frac{\varkappa}{n}$

Lorentzov model

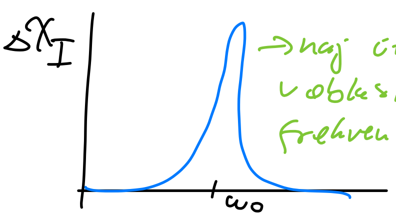
→ popis dielektrika ako klas. LHO, tlmený, budený vlnov
→ hľadáme disperzní relaci

$$\vec{P} = qN(\vec{z} - \vec{z}_0) = \varepsilon_0 \chi \vec{E} \Rightarrow \chi = \chi(\omega)$$

polarizace; řešení LHO; $\vec{E} = E_0 e^{i\omega t}$

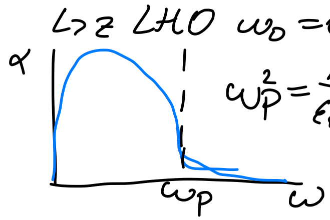


I, III normální disperze $\frac{dn}{d\omega} > 0$
II anomální disperze $\frac{dn}{d\omega} < 0$



• **Drudeho model**
→ z LHO $\omega_0 = 0$

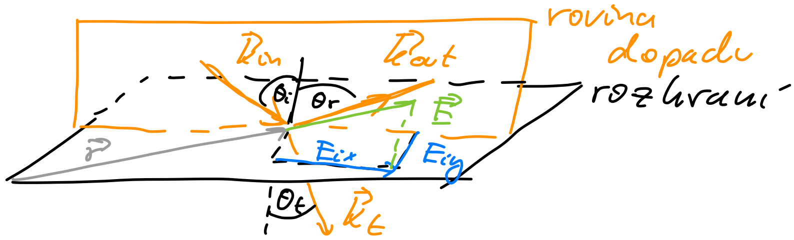
$\omega_p^2 = \frac{Nq}{\varepsilon_0 m}$

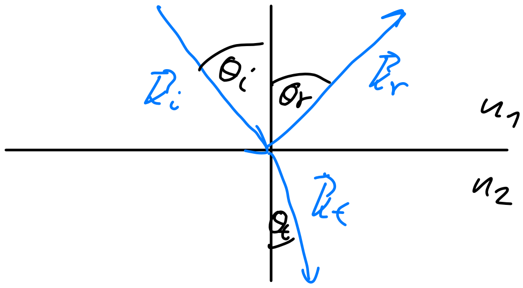


Odraz a lom elmag vĺn na rozhraní dvou prostředí

• výchozí rovnice → maxwelly na rozhraní (bez zdrojov)

$[\vec{E}]\times\vec{n}=0$, $[\vec{H}]\times\vec{n}=0$ } sp. tečných zložek





→ z Maxwellových: 1) $\omega_i=\omega_r=\omega_t$

2) $\vec{k}_i\cdot\vec{r}=\vec{k}_r\cdot\vec{r}=\vec{k}_t\cdot\vec{r}$

⇒ zákon odrazu: $\theta_i=\theta_r$, Snellov zákon lomu: $n_1\sin\theta_i=n_2\sin\theta_t$

$$\sin\theta_c=\frac{n_2}{n_1}$$ → kritický uhol, pre $\theta>\theta_c$ → tot. odraz

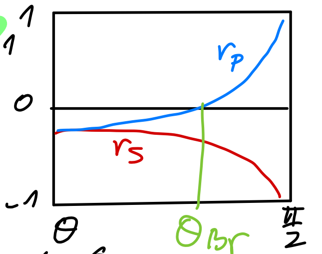
↳ len ak $n_2<n_1$

Fresnelovy vzorce

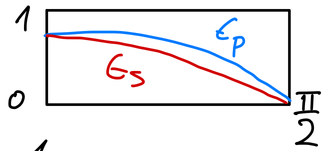
• výchozí principy → spojitost na rozhraní

→ $\vec{s}_0\times\vec{E}=\frac{c}{n}\vec{B}$

$n_2>n_1$



$\operatorname{tg}\theta_{Br}=\frac{n_2}{n_1}\Rightarrow r_p=0$



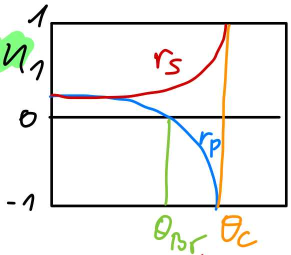
→ s-polarizace = kolmo na rovinu dopadu

↳ tečne k rovine prostredí

$$r_s=\frac{E_r}{E_i}=\frac{n_1\cos\theta_i-n_2\cos\theta_t}{n_1\cos\theta_i+n_2\cos\theta_t}$$ ... reflexe

$$t_s=\frac{E_t}{E_i}=r_s+1$$ ... prechod

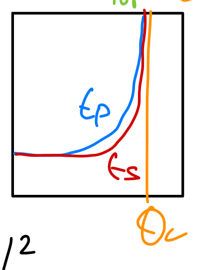
$n_2<n_1$



→ p-polarizace = tečne na rovinu dopadu

$$r_p=\frac{E_r}{E_i}=\frac{n_1\cos\theta_t-n_2\cos\theta_i}{n_1\cos\theta_t+n_2\cos\theta_i}$$

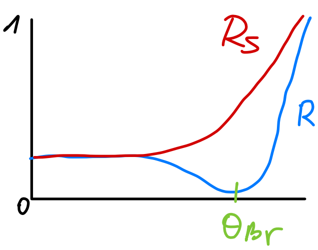
$$t_p=(r_p+1)\,\frac{\cos\theta_i}{\cos\theta_t}$$

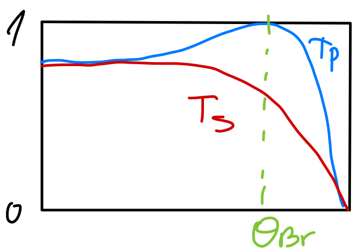


• výkon $J=IA$ ← plocha vlny

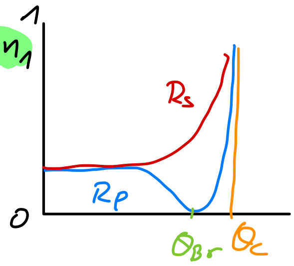
$$R=\frac{J_r}{J_i}\overset{\text{zo ZZE}}{=}\left|\frac{E_r}{E_i}\right|^2=|r_{s,p}|^2\qquad T=\frac{J_t}{J_i}\overset{\text{ZZE}}{=}\frac{n_2\cos\theta_t}{n_1\cos\theta_i}|t_{s,p}|^2$$

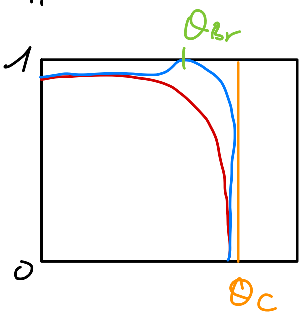
$n_2>n_1$





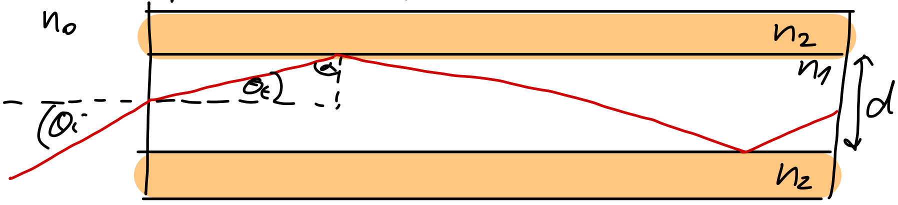
$n_2<n_1$





Elmag vlnenenie vo vlnovodoch

- optické vlákna
- založené na princípe úplného odrazu



$n_1 > n_2$

- podmienka na vstupný uhol pre totálny odraz:

$$\sin\theta_i^m = \frac{\sqrt{n_1^2-n_2^2}}{n_0}$$ → medzný uhol ⇒ $\theta_i < \theta_i^m$ pre úplný odraz

$NA = \sqrt{n_1^2-n_2^2}$ ... numerická aparatura vlákna

- pri odrazoch a samotným šírením sa posúva fáze

$$\Delta\varphi = 2kd\cos\alpha + \underbrace{\Delta\varphi^{odraz}}_{\text{zanedbáme}} \approx 2n_1 k_0 d\cos\alpha = 2m\pi \qquad m = 0,\dots,M$$

→ maximálny počet módov je daný α_c:

$$M = \left\lfloor \frac{2d}{\lambda_0} n_1 \cos\alpha_c \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2d}{\lambda_0} NA \right\rfloor$$ ⇒ max. počet módov je $M+1$

- útlm → zníženie výkonu spôsobený pohltením

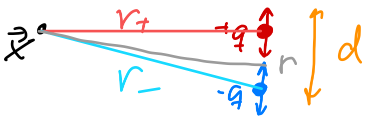
$$B = 10\log_{10}\frac{P_1}{P_2}$$

P_1 → výkon na vstupe
P_2 → výkon na výstupe

- vplyv disperzie - signál sa šíri vo forme pulzov → grupová rýchlosť $v_g(\omega)$

Dipólové elmag. žiarenie

- časovo závislý dipólový moment: $\vec{p}(t) = p_0 \cos\omega t$, kde $p_0 = q d \vec{e}_z$



- skalární potenciál: $$\varphi = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\cos\big(\omega(\overbrace{t-\frac{r_+}{c}}^{\text{retardace}})\big)}{r_+} - \frac{\cos\big(\omega(\overbrace{t-\frac{r_-}{c}}^{\text{retardace}})\big)}{r_+}\right)$$

aproximace:
1) $r \gg d$ → oscilace dipólu sú malé v por. zo vzdial.
2) $d \ll \lambda$ → kmity sú pomalé
3) $r \gg \lambda$ → v rad. zóne

$$\Rightarrow \varphi(r,\theta,t) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\omega}{c}\frac{p_0\cos\theta}{r}\sin\left(\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right)$$

$$\vec{A}(r,\theta,t) = -\frac{\mu_0}{4\pi}\omega\frac{p_0}{r}\sin\left(\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right)\vec{e}_z$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned}\vec{E} &= -\frac{\mu_0 p_0\omega^2}{4\pi}\frac{\sin\theta}{r}\cos(\omega t - kr)\,\vec{e}_\theta\\ \vec{B} &= -\frac{\mu_0 p_0\omega^2}{4\pi c}\frac{\sin\theta}{r}\cos(\omega t - kr)\,\vec{e}_\varphi\end{aligned}}$$

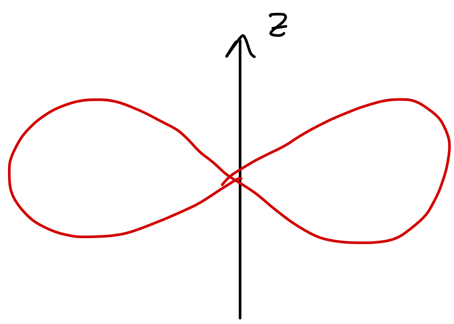
→ v prípade $\theta \approx 0$ → v rovine dipólu ⇒ kulové vlny $\psi(r) = \frac{A}{r}e^{i(\omega t - kr)}$

→ Poyntingov vektor:

$$\boxed{\langle\vec{S}\rangle = \frac{\langle\vec{E}\times\vec{B}\rangle}{\mu_0} = \frac{\mu_0 p_0^2\omega^4}{32\pi^2 c}\frac{\sin^2\theta}{r^2}\vec{e}_r}$$

- celkový vyžiarený stredný výkon

$$\langle P\rangle = \int\langle\vec{S}\rangle\cdot d\vec{S} = \frac{\mu_0 p_0^2\omega^4}{12\pi^2 c}$$



Optika

Interference, optické interferometry

- interference dvoch monochrom zväzkov:

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_{01} e^{i(\vec{k}_2\cdot\vec{r}-\omega t+\delta_2)}, \quad \vec{E}_2 = \vec{E}_{02} e^{i(\vec{k}_1\cdot\vec{r}-\omega t+\delta_1)} \qquad |\vec{k}_1| = |\vec{k}_2| = k$$

α je uhol medzi polarizacemi

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \qquad I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\alpha\cos\delta_{12}$$

$$\cos\alpha = \frac{\vec{E}_{01}\cdot\vec{E}_{02}}{|\vec{E}_{01}|\,|\vec{E}_{02}|}$$

$$\delta_{12} = k(\vec{s}_{01}-\vec{s}_{02})\cdot\vec{r} + \delta_{01} - \delta_{01}$$

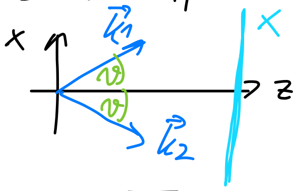
→ pre stejní polarizaci ⇒ $\cos\alpha = 1$

$$\text{viditelnost} = \frac{I_{max}-I_{min}}{I_{max}+I_{min}} = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1+I_2}$$

→ pre stejné amplitudy $I_1 = I_2 = I_0$: $I = 4I_0\cos^2\frac{\delta_{12}}{2}$

- rôzne frekvencie $\vec{E}_i = E_0\cos(k_i z-\omega_i t) \Rightarrow \vec{E} = E_0\cos(\bar{k}z-\bar{\omega}t)\cos(\delta k z-\delta\omega t)$
  → $\bar{k} = \frac{1}{2}(k_1+k_2)$, $\delta k = \frac{1}{2}(k_2-k_1)$, ...

- nekolineárne zväzky

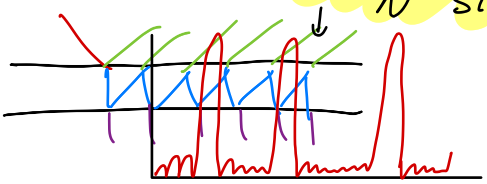


$$I = 4I_0\left(1+\cos\left(\frac{4\pi}{\lambda_0}\sin\vartheta\, x+\delta_0\right)\right)$$

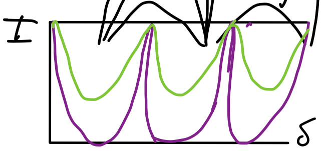
- interference mnoha vln

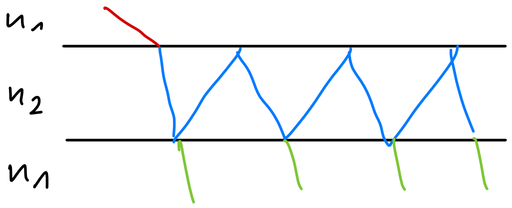
1) stejné amplitudy

$$E_m = E_0 e^{i\varphi} e^{im\delta} \Rightarrow E_{tot} = \sum_m E_m \Rightarrow I = I_0 N^2 \frac{\sin^2\left(\frac{N\delta}{2}\right)}{N^2\sin^2\frac{\delta}{2}}$$



2) rozdielne amplitudy
mnohonásobný odraz — odrazh esca





→ interference - daná rozdielom prejdenú vzdialenosťou
→ pri každom odraze niečo prejde
↳ strata danú reflexí

prejdené

$$E_{tot} = t_{21} t_{12} e^{i\frac{\delta}{2}} E_i \sum_{l=1}^{\infty} (r_{21}^2 e^{i\delta})^l$$

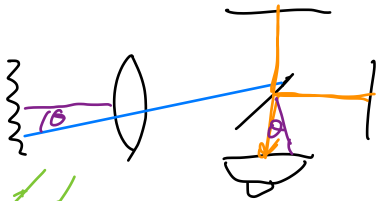
$$I = \frac{I_0}{1+F\sin^2\frac{\delta}{2}}, \quad F = \frac{4R}{(1-R)^2} \dots \text{jemnost}$$

Interferometry

→ kontrolovaná zmena δ

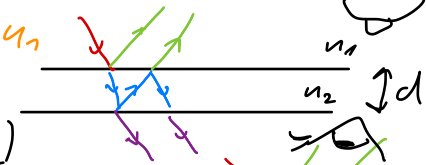
uhol pod ktorým sa vysiela

- Michelsonov IF
  → max: $\Delta d \cos\theta = \frac{\lambda}{2n} m$
  → min: $\Delta d \cos\theta = \frac{\lambda}{2n}(m+\frac{1}{2})$

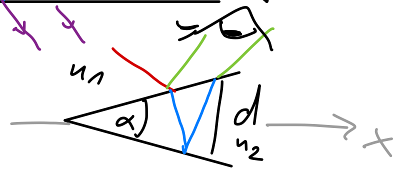


- planparalel. doštička
  → $\delta_t = \frac{4\pi}{\lambda} n_2 d\cos\theta_t$
  ↳ $\delta_r = \frac{4\pi}{\lambda} n_2 d\cos\theta_t + \pi$

$n_2 > n_1$



- interferenční proužky → max: $x_{max} = \frac{\lambda}{2\alpha\cos\theta_t}(m-\frac{1}{2})$



Koherence svetla

- korelace záření, stat. vlastnosti světla
- dobré IF ⟺ ∝ koherentní
- kvazimonochrom. záření $\omega \in \bar{\omega} + [\Delta\omega, -\Delta\omega]$ $\Delta\omega \ll \bar{\omega}$
  ↳ popíšeme $\vec{E} = \vec{A}(t)\, e^{i(\varphi(t) - \bar{\omega} t)}$
- korelační funkce:

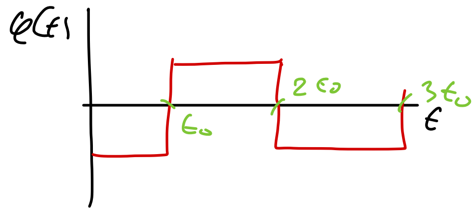
$$\Gamma_{12}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \tau) = \langle \vec{E}_1(\vec{r}_1, t+\tau)\, \vec{E}_2(\vec{r}_2, t) \rangle_{t_D} = \frac{1}{t_d} \int_{-\frac{t_D}{2}}^{\frac{t_D}{2}} \vec{E}_1(\vec{r}_1, t+\tau)\, \vec{E}_2^*(\vec{r}_2, t)\, dt$$

- intenzita IF záření:

$$I = \frac{1}{4} \varepsilon_0 \varepsilon_r \langle (\vec{E}_1 + \vec{E}_2)(\vec{E}_1^* + \vec{E}_2^*) \rangle_{t_D} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\, \mathrm{Re}\{\gamma_{12}(\tau)\}$$

1 = koher
0 = nekor

$$\gamma_{12}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \tau) = \frac{\Gamma_{12}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \tau)}{\sqrt{\Gamma_{11}(0)}\sqrt{\Gamma_{22}(0)}}$$ → komplexní st. koherence



Časová koherence

- jedno místo, ale posun v čase
- v prípad Michel. IF: $\tau = \frac{d_2 - d_1}{c}$
- skoková fáze → $\varphi(t) = H_n(t)$ ... skoková fce, kde po t_0 dá náhodný skok
  ↳ pošleme do IF → dostane τ rozdiel

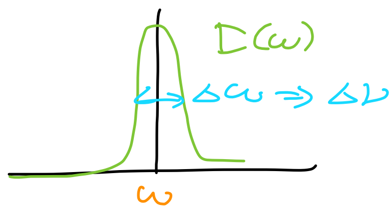
$$I(\tau) = 2I_0\left(1 + \cos(\omega_0 \tau)\left(1 - \frac{|\tau|}{t_0}\right)\right) \rightarrow \gamma(\tau) = e^{-i\omega_0 \tau}\left(1 - \frac{|\tau|}{t_0}\right)$$

$$V = |\gamma(\tau)| \text{ ... viditelnost IF obrazce}$$

- koherenční čas – typický čas poklesu $\gamma(\tau)$, pre skoky je $\tau_c = t_0$
- koherenční délka – $l_c = c\tau_c$

→ pre polychromatický svazek $I_\omega(\omega)$

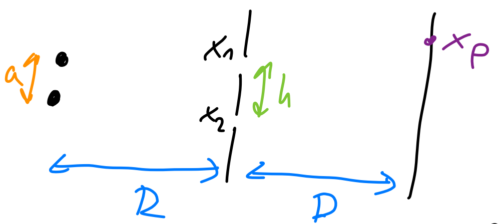
$$l_c \approx \frac{c}{\Delta\nu}, \text{ kde } \Delta\nu \text{ je FWHM}$$

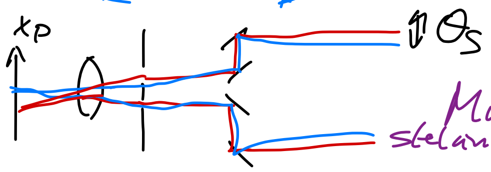


Prostorová koherence

- rovnaký čas t, ale rozdielne $\vec{r}_1, \vec{r}_2$
- sledujeme korelaci záření prich. z bodov X_1 a X_2
- Youngova dvojštěrbina → 1 bod zdroj → $I \propto E_0^2\left(1 + \cos\left(\omega h \frac{x_p}{R}\right)\right)$
  - ↳ 2 bod. zdroje → $V = \left|\cos\left(\frac{kah}{2R}\right)\right|$
  - viac bod. zdroj. → $V = \frac{\sin\left(\frac{kah}{2R}\right)}{\frac{kah}{2R}}$
  - kruhový zdroj → $V = \left|\frac{2J_1\left(\frac{kah}{2R}\right)}{\frac{kah}{2R}}\right|$

aj pre zdroje, kt. niesú navzájom korelované po dosiahnutí vzdial. skorelujú





Michelsonov stelární IF

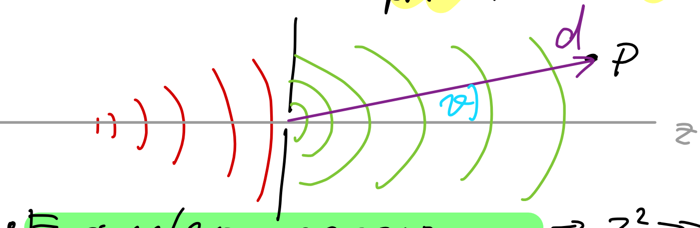
⇐ zlepší sa viditelnost ⇐

Ohyb svetla

- difrakce, Huygensov princip ⇒ ohyb
- difrakčný integrál
- vlna dopadá na aperatúru → IF → obraz je FT operatúry

$$E(x,y,z) = -\frac{i}{\lambda}\int_{\text{apratúra}} E(X,Y,0)\,\frac{e^{ikd}}{d}\,\kappa(\vartheta)\,dX\,dY$$ → skalárna app

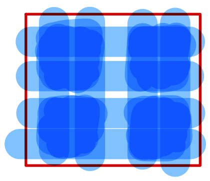
↳ ≈ 1 parax. app. malých uhlov



$$d^2 = z^2 + (x-X)^2 + (y-Y)^2$$

rovinná ↓ vlna

- **Fresnelova aproximace** → $z^2 \gg (x-X)^2 + (y-Y)^2$ + $E(X,Y,0) = E_0$



← rozmer prekážky

→ pre malé otvory a veľké vzdialenosti + blízko osy

$$\Rightarrow d = z + \frac{(x-X)^2 + (y-Y)^2}{2z}$$ • $\lambda \ll z < z_{mez}$

→ rozmer IF obrazcov ~ rozmer prekážky

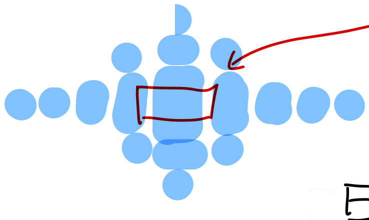
- **Fraunhof. aproximace** → Fresnel $+\exp\left(ik\frac{X^2+Y^2}{2z}\right) \approx 1$ s priemerom D X^2+Y^2

→ $2z \gg k(X^2+Y^2)$

→ v prípade kruhového otvoru $z > z_{mez} \approx k\frac{D^2}{8}$

→ veľká vzdialenosť + veľké vlnové dĺžky

→ rovinná vlna



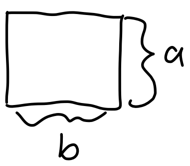
$$E(x,y,z) = -\frac{iE_0}{\lambda}\frac{e^{ikz}}{z}\,e^{ik\frac{x^2+y^2}{2z}}\int_{aper} e^{ik\frac{xX+yY}{2z}}\,dY\,dX$$

- **Babinetov princíp:** $E_{\text{diera}} + E_{\text{prekážka}} = E_{\text{voľné}}$

  ↳ Poissonova škvrna – najsvetlejšie pri kruhu je v strede kruhu

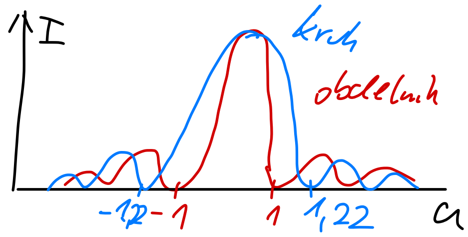
- **difrakce na šterbine** $I = I_0\frac{\sin^2 u}{u^2}$

- **difrakce na obdelníkovom otvore** (Fraunhof)



$$I(x,y,z) = I_0\frac{\sin^2 v}{v^2}\,\frac{\sin^2 u}{u^2}$$

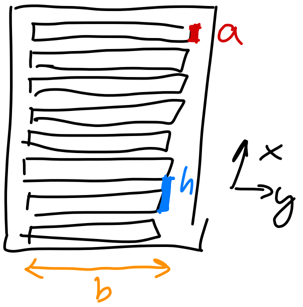
$$v = \frac{bky}{2z} \qquad u = \frac{akx}{2z}$$



→ 1. max → kruh = 1,22
→ obdelník = 1

- **difrakce na rade šterbín** = optická mriežka (Fraunhof)

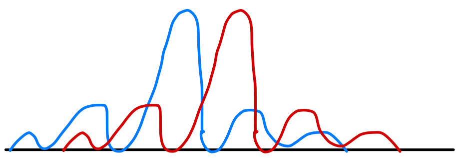
  ↳ súčet vĺn, kt. každá prechádza inou dierou



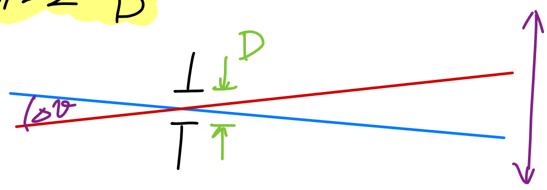
$$I = I_0\underbrace{\left(\frac{\sin\left(N\frac{\delta}{2}\right)}{N\sin\frac{\delta}{2}}\right)^2}_{\text{IF mnoho vĺn}}\frac{\sin^2 u}{u^2}\,\frac{\sin^2 v}{v^2}$$

$$u = \frac{ak}{2}\frac{x}{z} \qquad v = \frac{bk}{2}\frac{y}{z} \qquad \delta = kh\sin\vartheta$$

• **Rayleightovo kriterium** – rozlišenie dvoch zdrojov svetla
– 1. min jedného je 1. max druhého



$$\Delta\vartheta \approx 1{,}22 \frac{\lambda}{D}$$



• **mriežková rovnica** $\delta = \frac{2\pi}{\lambda}(d\sin\vartheta - d\sin\vartheta_{in})$

↳ max: $\delta = 2\pi m \Rightarrow \lambda m = d(\sin\vartheta - \sin\vartheta_{in})$

↳ min: $\delta = 2\pi(m+\frac{1}{2})$

Braggova rovnice → IF na rovinách kryštálu

$\Rightarrow$ $2d\sin\vartheta = m\lambda$

Šírenie svetla v anizotrop. látkach

$$(n^2-n_1^2)E_x = n^2 S_{ox}\, \vec{S}_i\vec{E}$$
$$(n^2-n_2^2)E_y = n^2 S_{oy}\, \vec{S}_i\vec{E}$$
$$(n^2-n_3^2)E_z = n^2 S_{oz}\, \vec{S}_i\cdot\vec{E}$$

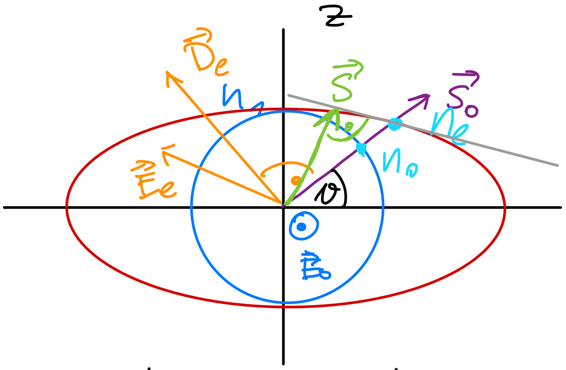
$$\vec{P} = \varepsilon_0(1-\overleftrightarrow{\varepsilon}_r)\vec{E} \qquad \overleftrightarrow{\varepsilon}_r = \begin{pmatrix} n_1^2 & & \\ & n_2^2 & \\ & & n_3^2 \end{pmatrix}$$

$\vec{k}\cdot\vec{D} = 0$, ale $\vec{k}\cdot\vec{E} \neq 0$ → $\vec{E}$ nie je kolmé na $\vec{k}$

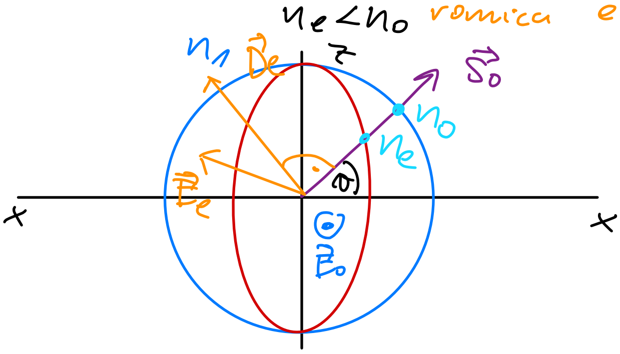
$$\frac{S_{ox}^2}{n^2-n_1^2} + \frac{S_{oy}^2}{n^2-n_2^2} + \frac{S_{oz}^2}{n^2-n_3^2} = \frac{1}{n^2}$$ → Fresnelova rovnica → n je neznáma → udáva idx lomu v smere $\vec{S}$

- $n_1 = n_2$ → jednoosé materiály
  - ↳ prvé riešenie $n_o = n_1 = n_2$ → tzv. ordinárna vlna
  - ↳ druhé riešenie n_e → extraordinárna vlna : $\dfrac{1}{n_e^2} = \dfrac{\sin^2\vartheta}{n_3^2} + \dfrac{\cos^2\vartheta}{n_1^2}$ ← rovnica elipsy ($y=0$)

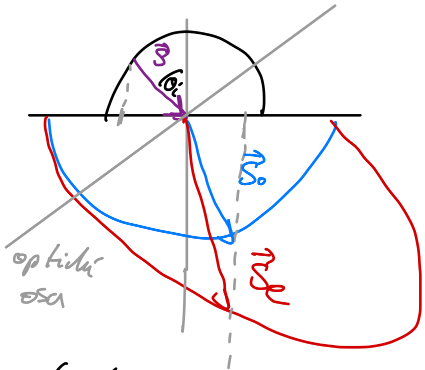
$n_e > n_o$



$n_e < n_o$



- optická os – n = konšt v ϑ → os z pre $n_1 = n_2$
- rovina hlavného rezu – daná optickou osou a smerom šírenia $\vec{S}_o$
- ordinárna vlna je polariz. kolmo na rovinu hl. rezu
- extraord. vlna je polariz. v rovine hl. rezu
- smer Poyntinga $\vec{S}$ = normála k elipse v bode kde $\vec{S}_o$ pretne elipsu
- lom svetla → ord : $n_1 \sin\Theta_i = n_o \sin\Theta_t$
  - e-ord: $n_1 \sin\Theta_i = n_e(\Theta_t)\sin\Theta_t$

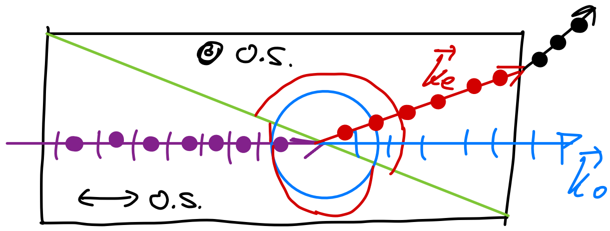


- indikatrix – alt. popis pomocou elipsoidu:

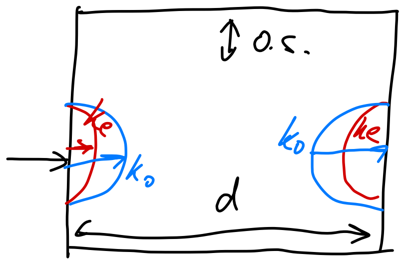
$$\frac{D_x^2}{n_1^2} + \frac{D_y^2}{n_2^2} + \frac{D_z^2}{n_3^2} = 1$$ → n je dané v záv. od smeru $\vec{D}$
→ $\vec{E}$ je tečna k normále

- použitie
→ $\vec{E}_e$ kmitá v smere o.s., $\vec{E}_o$ kolmo

1) Rochonov polarizátor



2) Fázová doštička

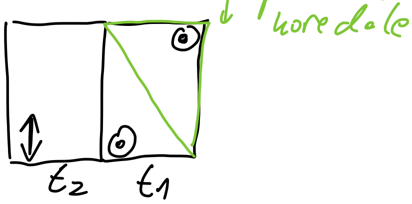


posun fáze

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}d(n_e - n_o)$$

3) kompenzátor
→ posúvaním sa nastaví obecná fáze

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}d(n_e-n_o)(t_2-t_1)$$



Geometrická optika

• veľkosť objektov $\gg \lambda$

• nehomog. prostredie $\varepsilon=\varepsilon(\vec r)$, $n=n(\vec r)$; $d=\vec s_0\cdot\vec r$ ... optická dráha

• eikonálová aproximace: $\vec E=\vec E_0 e^{ik_0\varphi(\vec r)}e^{-i\omega t}$ $\quad\varphi(\vec r)$ .. eikonál

• eikonálová rovnice: $\nabla\varphi(\vec r)=n\vec s_0$ $\quad\varphi(\vec r)=$ konst je vlnoplocha

• paprsek = param. křivka $\vec r(s)$, ktorej je $\vec s_0$ tečna $\frac{d}{ds}\vec r(s)=\vec s_0$

$$\rightarrow \frac{d}{ds}\left[n(\vec r(s))\,\vec s_0(\vec r(s))\right]=\nabla n(\vec r(s))$$ → paprsková rovnice

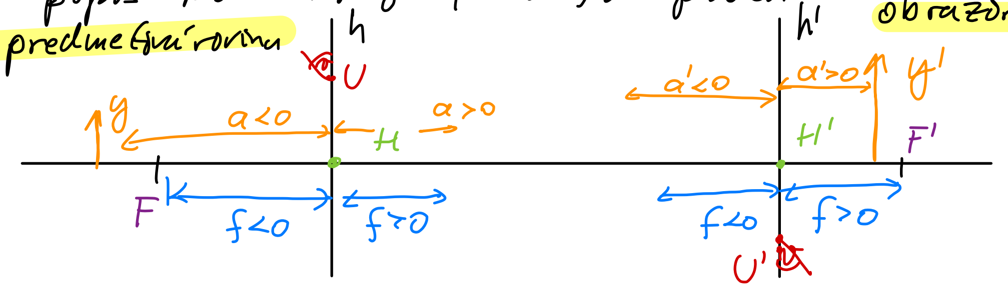
• Lag. invariant: $$\oint_l n(\vec r)\,\vec s_0(\vec r)\cdot d\vec l=0$$

• Fermatov princip – svetlo sa šíri po najkratšej optickej dráhe

$$T=\int_A^B dt=\int_A^B \frac{n(\vec r)}{c}\,ds \qquad \delta T=0$$

Gaussova zobrazovacia rovnica

• popis opt. sústavy sferických plôch



H, H' → hlavné body
↳ predmet v H sa zobrazí na obraz H' stejnej výšky

F, F' → ohniskové body
↳ obraz je v ∞, obraz pred. z ∞

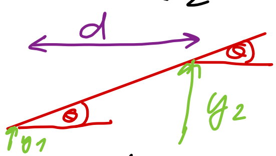
U, U' → uzlové body
↳ konjug. priamky pod rovnakým ϑ

$$\frac{f}{a}+\frac{f'}{a'}=1 \qquad \frac{y'}{y}=\frac{f}{f-a}=\frac{f'-a'}{f'}$$

• paraxiální app. → malé uhly

• maticová optika: $$\begin{pmatrix}y_2\\ \theta_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A&B\\ C&D\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ \theta_1\end{pmatrix}$$ prenosová matica → daná O.S.

1) voľné šírenie:

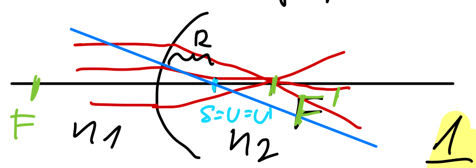


$$T_d=\begin{pmatrix}1&-d\\ 0&1\end{pmatrix}$$

2,5) zrcadla

$$f=f'=\frac{R}{2}$$
$$\frac{1}{a}+\frac{1}{a'}=\frac{2}{R}$$

2) lom na kulovej ploche



$$T_R=\begin{pmatrix}1&0\\ \left(1-\frac{n_1}{n_2}\right)R&\frac{n_1}{n_2}\end{pmatrix}$$ → rovinná plocha $R=0$

$$\frac{1}{f'}=\left(1-\frac{n_1}{n_2}\right)\frac{1}{R}$$ → poloha ohniska

Abbeov invariant
$$n_1\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{R}\right)=n_2\left(\frac{1}{a'}-\frac{1}{R}\right)$$

$\forall$ paprsky idúce z bodu osi z v l a dopad na osu z v vzdiál. a' ⇒ nez. od uhlu

↳ zobrazení kulovou plochou $T=T_aT_RT_{-a}$ ⇒ Gaussova rovnice

3) tenká čočka = dve kulové plochy

$T_{\text{čočka}}=T_{R_1}T_{R_2}$, zobrazení tenk. čoč.: $T=T_aT_{R_1}T_{R_2}T_{a'}$

$$\frac{1}{f'}=\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)(n_2-n_1)=-\frac{1}{f}$$

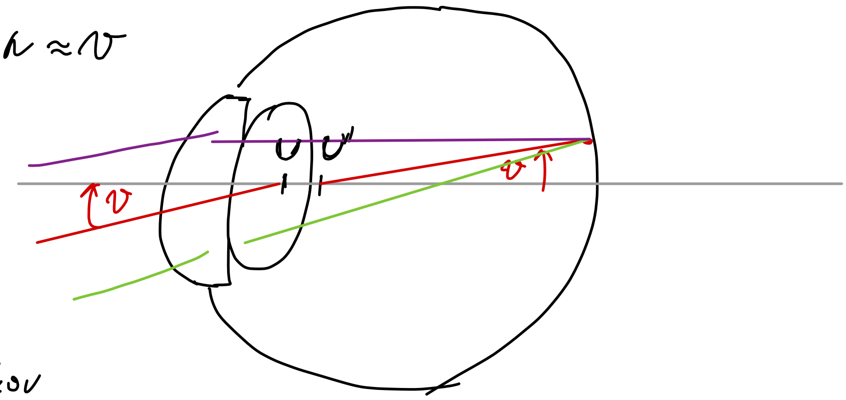
Zväčšenie:
→ priečne $M_T=\frac{y'}{y}=A$
→ pozdĺž. $M_L=\frac{\delta a'}{\delta a}$
→ uhlové $M_\theta=\frac{\theta'}{\theta}=D$

optická mohutnosť $D=\frac{1}{f}$ dioptria

Optické zobrazovacie prístroje

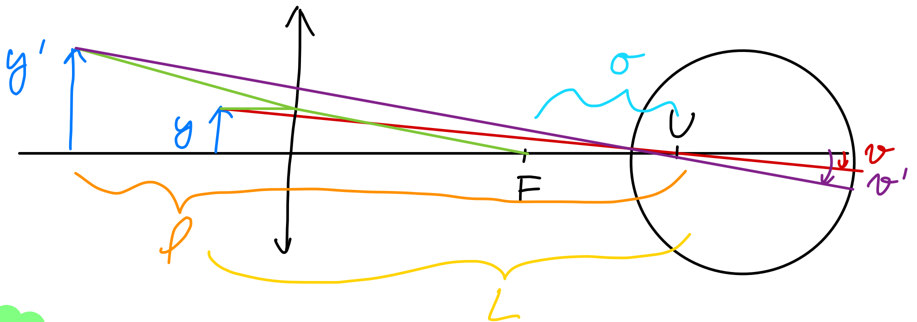
Oko

• lom na rohovke a šošovke
• veľkosť veľmi vzdialeného objektu ≈ ϑ
• vytvorenie reálneho obrazu na rohovke → tyčinky, čapíky
• pointa zobraz. prístroja
– zväčšenie ϑ : $\Gamma = \frac{\vartheta'}{\vartheta}$
• svaly šošovky – prispôsobovanie f



Lupa

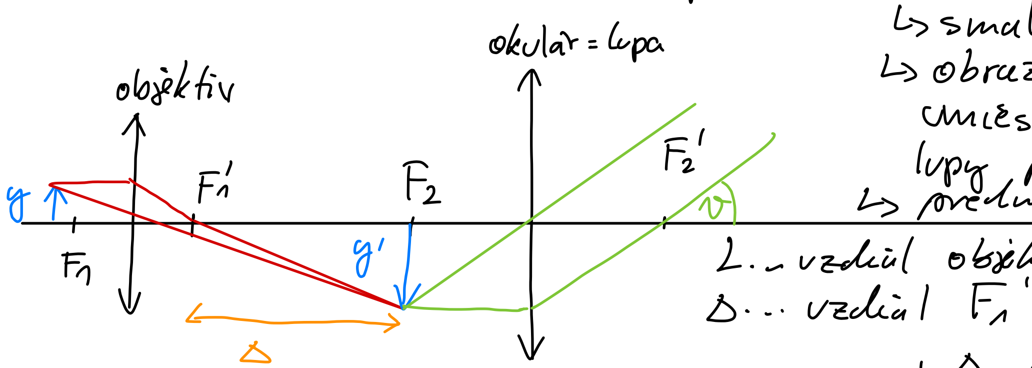
• zväčšenie malých objektov so spojkou



$$\Gamma_{MG} = \frac{\vartheta'}{\vartheta} = \frac{L}{f}\left(1+\frac{\sigma}{\ell}\right)$$

Mikroskop

• zväčšovanie ešte menších objektov pomocou dvoch spojok
↳ s malou f
↳ obraz objektívu sa umiestni do ohniska lupy pre čo najväčšie zväčšenie
↳ predmet medzi F a 2F



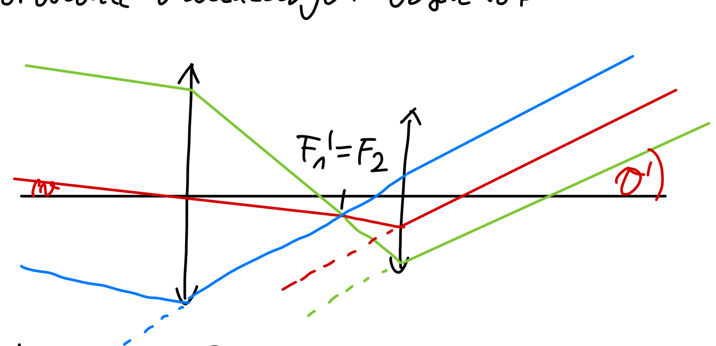
L... vzdial objektu od oka
Δ... vzdial F_1' a y'

$$\Gamma_{mikroskop} = \left|\frac{\Delta}{f_1'}\frac{L}{f_2}\right|$$

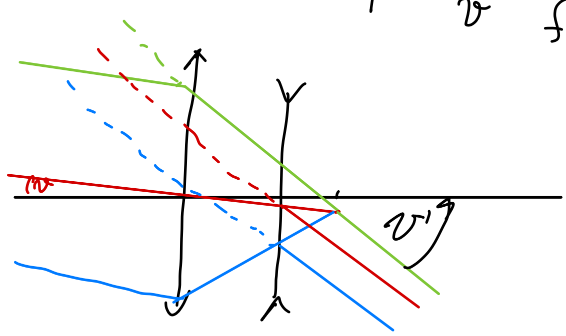
Ďalekohľad

• pozorovanie vzdialených objektov

$$\Gamma = \frac{\vartheta'}{\vartheta} = \frac{f_1'}{f}$$



Keplerov: 2 spojky → prevrát. obraz



Galileov: 1 spoj. a 1 rozptyl → vz. obr

Fotoaparát

• malá dierka – snímanie scény na plátno → zmenšený prevrátený obraz
• každý bod sa zobrazí ako kruh – polomer daný veľ. dierky
• na zaostrenie – šošovky

Spektrálne prístroje a základní metody opt. spektroskopie

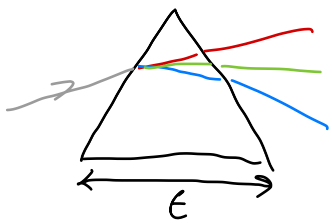
- **spektrometrie** – studium vlastností látek pomocou svetla
  – absorbce, emise, transmise, luminiscence
- **spektrální přístroje** – prístroje, kt. merajú intenzitu svetla v záv. na vlnové délce $I(\lambda)$
  – spektrometry, interferometry

- **spektrometer** – dopadajúce svetlo je zobrazené na rovinu, kde poloha v rovine je daná vlnovou délkou
  – optický hranol, optická mřížka

- **transmisní meření**: $I(\lambda) = I_0 e^{-\varepsilon(\lambda) d}$ → d je hrúbka vzorku; → extinkční koeficient

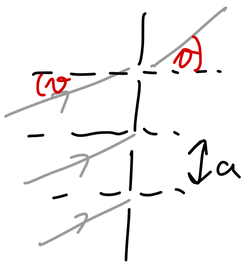
- **spektrálne rozlíšenie** $R_S = \left|\frac{\lambda}{\Delta\lambda}\right|$, kde $\Delta\lambda$ je najmenší rozdiel mezi rozliš. λ
  ↳ dané Rayleigho krit.
  $\frac{d\theta}{d\lambda}$ ... úhlová disperze

Optický hranol
- dvojný lom
- spektrometrická: $n = n(\lambda)$, ide lom závisí na λ



$$R_S = \varepsilon \left|\frac{dn}{d\lambda}\right|$$

Optická mriežka
- interference svetla – závisí na λ → $d(\sin\vartheta - \sin\vartheta_i) = m\lambda$ ... max.
  mriežková ramira (d); dif. rad (m)



$$\frac{d\theta_m}{d\lambda} = -\frac{m}{a\cos\theta_m} \qquad R_S = N|m|$$

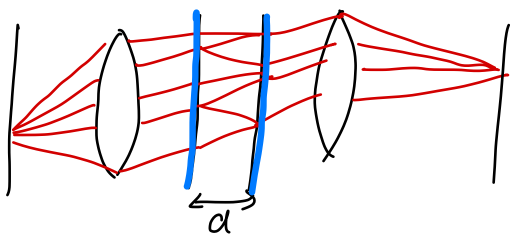
← počet štěrbin (N); ← poz. dif. rádu (m)

- F_S – volný spektr. interval = int. λ_1, kt. sa v danom m neprekrýva s inými λ_2 v iném m'

$m\lambda_2 = (m+1)\lambda_1 \Rightarrow F_{Sm} = \frac{\lambda_1}{m}$ ⇒ vyšší rády ⇒ vyšší R_S ale menší F_S

$$\Rightarrow \frac{\langle\lambda\rangle}{mN} \leq \Delta\lambda \leq \frac{\langle\lambda\rangle}{m}$$
← šírka spekt. oboru

Fabry-Perot IF
- dve zrkadlá vzdialené d → mnohozväzkový IF ⇒ IF krúžky ⇝ Airyho fce



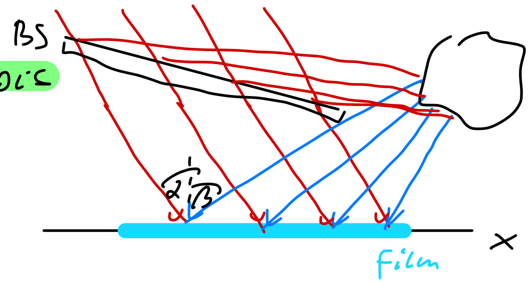
- dve λ → dve sady krúžkov
- rozlíšime ak vzdial. je väčší jak FWHM

$$R_S = \frac{\pi}{2} m\sqrt{F} \qquad F_S = \frac{\lambda^2}{2d}$$

Základy holografie → transmisní holografie

- hologram → záznam obrazu aj s info o hĺbke ↳ info o 3D
- konvenčné filmy – iba intenzita – bez info o fázy ⇒ modulace ref. vlny
- pomocí ref. vlny sa zaznamenie I_F aj fáze
  ↳ při čtení sa ref. vlnu zase presvítí pre vytvorenie obrazu

- zápis



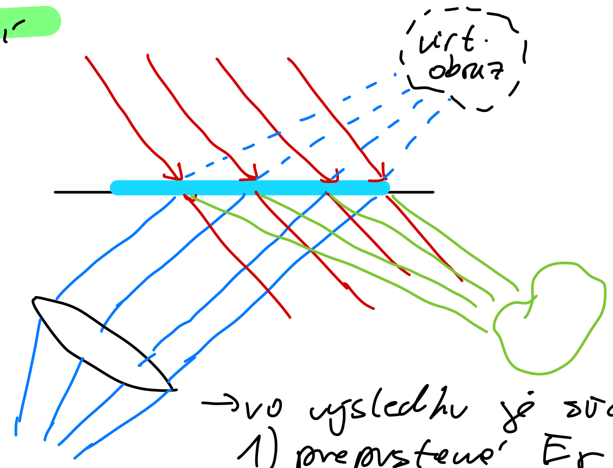
koherentní s laser

$$E_r = A_r e^{-i\omega t} e^{\overbrace{ik_r \sin\alpha\, x}^{\varphi(x)}}$$
$$E_o = A_o(x) e^{-i\omega t} e^{\underbrace{ik_o \sin\beta\, x}_{\theta(x)}}$$

$$I_F(x) = (E_r + E_o)^2 = I_r + I_o + \underbrace{f + f^*}_{\text{záznam o fázy}}$$

→ v intenzite je záznam o fázy → sčernanie filmu

- čtení



$$t(x) = t_0 - a I_F(x)$$ → amplitudová propustnost

$$E_H = t(x) E_r = t_0 E_r - a(I_r + I_o)E_r - f E_r - f^* E_r$$

→ vo výsledku je súčet 4 vĺn
1) prepustené E_r
2) prepustené, oslabené $I_r + I_o$
3) virt. obraz na mieste kde bol → difraktovaná vlna
4) reálny obraz na mieste kde nebol

Princip laseru

- laser = Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation
- v látke nastávajú 3 procesy → spontánna emise – náhodné smery, fáze ⇒ nekoh.
  → absorpce
  → stimulovaná emise – smer a fáze stejné ⇒ koh.

- frekvence svetla pri prechodoch: $f = \frac{E_2 - E_1}{h}$

spon. em/abs. ($i=2$, $i=1$) stim. emise/absorpce ($i=2$, $i=1$)

- počet e^- v i-tom stave: $\frac{dN_i}{dt} = -AN_i - B_{ij}\,g(\lambda)N_i$ spektrálna hustota

$N_2(t) = N_2(0)\,e^{-\frac{t}{\tau}}$ → spontánna

- svietime na vzorek hrúbky z: $I(z) = I(0)\,e^{B_{12}(N_1 - N_2)\frac{hf}{c\Delta f}z}$ ↳ spek. šírka zdroja

→ pre Boltzmannovo rozdelenie $\frac{N_1}{N_2} = e^{-\frac{hf}{k_B T}}$ ⇒ $I(z) = I(0)\,e^{-a_0 z}$

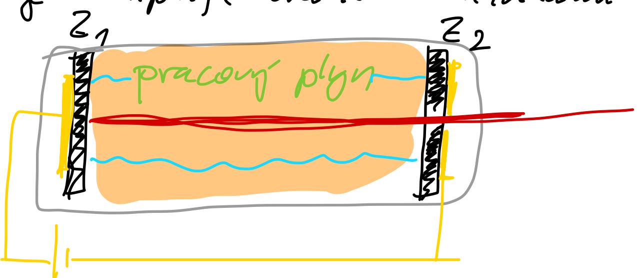
zanedbáme 2. pop. → $a_0 = B_{12} N_1 \frac{hf}{c\Delta f}$ $\quad a_0 > 0$

→ dochádza primárne k absorpci

$B_{12}(N_1 - N_2)\frac{h\nu}{c\Delta\nu}$

- pre $N_2 = N_1$ → bezezmeny
- pre $N_2 > N_1$ → dochádza k zosilneniu $\quad I(z) = I(0)\,e^{gz}$

- základný princip → treba excitovat do vyšších hladín, aby $N_2 > N_1$
  = čerpanie
- zosilnenie je amplifikované zrkadlami → tzv. opt. rezonátor



- najčastejšie je pracovní látka He-Ne
- výbojom sa excitujú hladiny He → tie predajú energiu Ne a ten stimulovanou emisiou vyžaruje svetlo

Žáření černého tělesa

- při prechode žiarenia látkou dochádza k
  1) absorpci $\alpha(\nu) = \frac{I_a(\nu)}{I_0(\nu)}$, kde I_a je int. abs. žiar.,
  2) reflexi $\rho(\nu) = \frac{I_r(\nu)}{I_0(\nu)}$, kde I_r je int. ref. žiar.,
  a I_0 je int. dop. žiarení

→ pro nepropustné teleso

$$I_0 = I_r + I_a \quad \Rightarrow \quad \alpha + \rho = 1$$

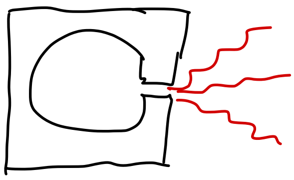
- teleso konečnej teploty môže aj vyžarovať

$$\varepsilon = \frac{I_e}{I_0} \;\ldots\; \text{emisivita}$$

- dokonale čierne teleso je také, ktoré všetko svetlo absorbuje a jediné vyžaruje tepelné žiarenie
→ pro dve telesá v TD rovnováhe $\left.\frac{\varepsilon}{\alpha}\right|_1 = \left.\frac{\varepsilon}{\alpha}\right|_2 \Rightarrow \varepsilon_{BB} = \left.\frac{\varepsilon}{\alpha}\right|$ lib. teleso v TD rovnováhe

- vyžarovaný výkon → Stefan-Boltzmann: $P = \sigma T^4 \; [W.m^{-2}]$
  ↳ $0{,}5\,nW.m^{-2}.K^{-4}$

- čierne teleso realizujeme dutinou s malým otvorom



↳ žiarenie je v TD rovnováhe so stenami
↳ emisia len cez malú dierku

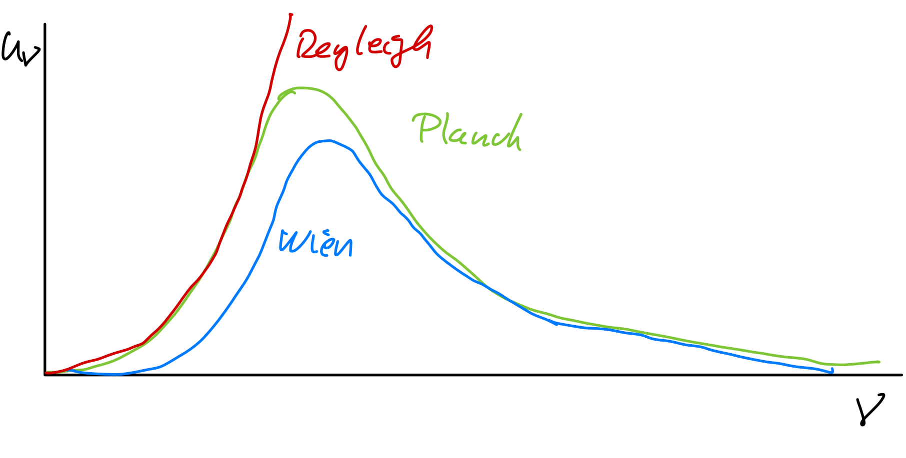
- spektrální hustota záření: $B_\nu(\nu, T, \vartheta) = \frac{c}{4\pi} u_\nu(\nu, T) f(\vartheta) \left[\frac{W}{sr.m^2.Hz}\right]$
  ↳ pro BB $f = \cos\vartheta$

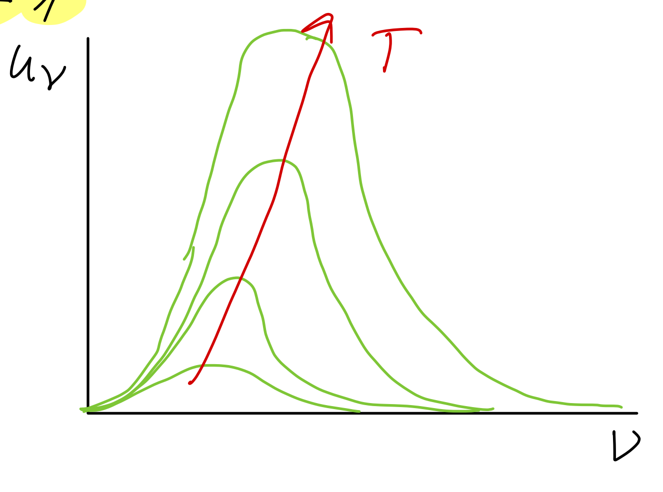
  u_ν je objemová hustota toku

- Wienov. posunovací zákon: $\lambda_m T = konst$ → λ_m = max λ pri teplote T

- Wienov zákon $u_\nu = A\nu^3 e^{-\frac{B\nu}{T}}$ → IR katastrofa
- Reyleigh-Jeansov z.: $u_\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} k_B T$ → UV katastrofa

- Planckov vyž. zákon $u_\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1}$





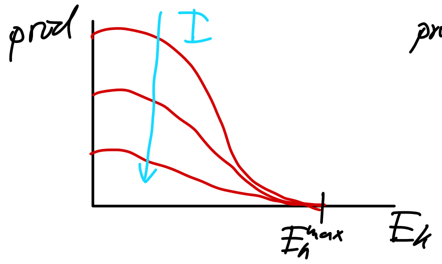
Štrukt. atomov, molekúl a kond.

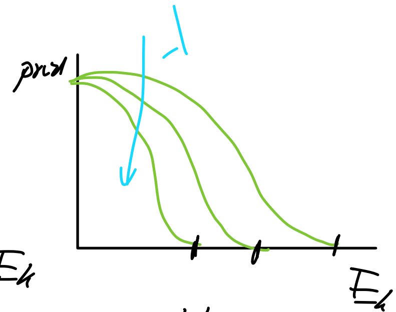
Dualizmus vlna-častice, fotoefekt, Comptonov rozptyl

- svetlo bolo vďaka Maxwellovi považované za vlnenie
- bolo pozorované uvolňovanie e^- z kovov pri ožarovaní

Predpoklady na vlny
1) väčšia I ⇒ viac energie e^- E_k
2) malá I ⇒ trvá predávanie e^- na vyrazenie
3) prebieha pre $\forall \lambda$

Pozorovanie ⇒ častice:
1) E_k nezáv. od I
2) e^- sa uvoľňujú okamžite
3) ex. prahová λ a E_k závisí od λ



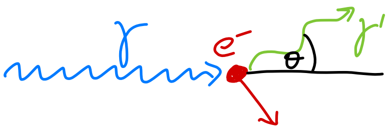


⇒ Fotoefekt − γ ako častica o energii $E = hf = \hbar\omega$ je pohltená e^- ktorý sa uvoľní z atómu

$$\boxed{E_k = hf - W}$$ ← výstupná práca, pričom $hf > W$

Comptonov rozptyl

- neelastický rozptyl γ na e^-



$$E' = \frac{E}{1 + 2\frac{E}{m_e c^2}\sin^2\frac{\theta}{2}} \Rightarrow \Delta\lambda = \frac{2h}{m_e c}\sin^2\frac{\theta}{2}$$

↳ nez. od E

- γ predá časť energie e^- → posun λ
- kvázi voľný e^- s nulovou energiou
- max. predaná energia e^- → pri $\theta = \pi$ ⤳ Comptonova hrana

de-Broglieho vlnová dĺžka

↳ častice sa správajú ako vlny s $\boxed{\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{h}{p}}$ → deB. vlnová dĺžka

- disperzní relace $\omega = \omega(k)$
  ↳ pro hmotní částice

$$E = \sqrt{(mc^2)^2 + (pc)^2}$$

$p = \hbar k$, $E = \hbar\omega$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\left(\frac{mc^2}{\hbar}\right)^2 + (kc)^2}$$

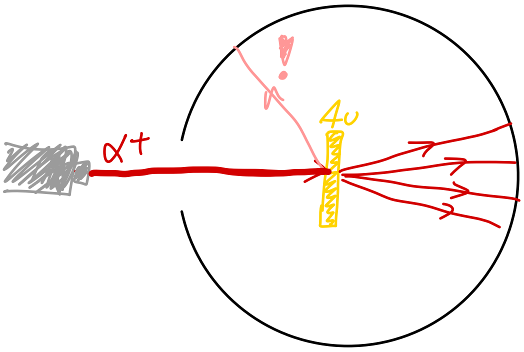
Bohrov model atómu

- zo spektroskopie – známy vzťah pre energie žiarenia:

$$\hbar\omega_{mn} = R_y\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right) \rightarrow \text{empiricky}$$

- J. J. Thompson objavil e^- v katódových paprskoch
- Thompsnov model atómu: e^- sú rozinky v pudingu kladného náboja
  ↳ problém so stabilitou e^-

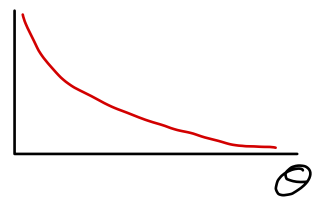
Rutherfordov experiment



- ostreľovanie Au tercíka α časticami
- očakávanie: malý uhlový rozptyl v smere zväzku
- pozorovanie: rozptyly aj o takmer 180°
- výsledok: kladný náboj je konc. v centre

⇒ objav jadra atómu

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left|\frac{Ze'^2}{T_\alpha}\right|^2 \frac{1}{4\sin^4\frac{\theta}{2}}$$

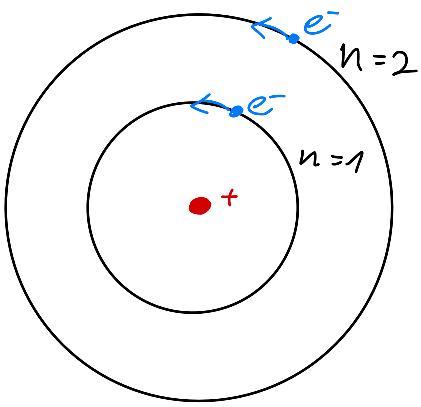


⇒ planetárny model – e^- obiehajú okolo klad. jadra
– nevysvetlí spek. čiary
– problém s synchron. žiarením

Bohrov model

- postuláty:

1) e^- krúži po kružnici okolo j.
2) prípustné len stac. orbity, kde e^- nežiari
3) stac. orbity → dané kvant. podm. mom. hyb. $L = \hbar n$
4) e^- sa presúvajú medzi hladinami s emis/abs. γ s $E_m - E_n = \hbar\omega$



- energie atómu vodíka:

$$E_n = T_n + V_n = \frac{L^2}{2m_e r_n^2} - \frac{e'^2}{r_n} = -\frac{R_y}{n^2}$$

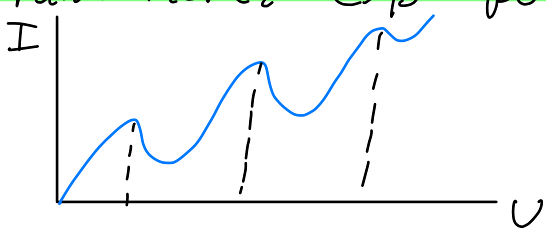
$$\boxed{E_n = \frac{-13{,}6\,\text{eV}}{n^2}}$$

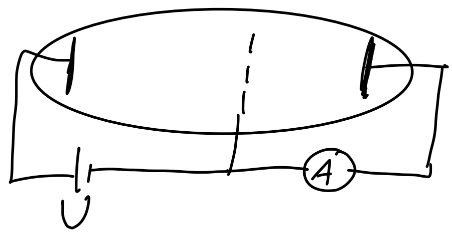
$$\hbar\omega = R_y\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right)$$

→ korekce na pohyb jadra $m_e \rightarrow \mu = \frac{m_e m_X}{m_e + m_X}$

- nedostatky → problém $e^- - e^-$ interakce
  → jemná štruktúra

- Frank-Hertz exp → potvrdenie



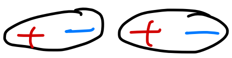


Základní typy vazeb atomů, meziatomový potenciál

$$E_s = E^{\text{viazané}} - \sum_\alpha E_\alpha^{\text{voľné}}$$ → podm. pre vznik vazby: $E_s < 0$

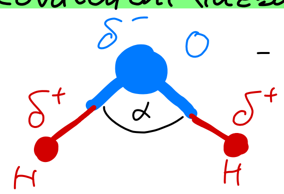
Typy vazeb:

vdW vazba – jednotlivé molekuly si indukujú dipólové momenty, kt. sa navzájom priťahujú
– krátkodosahová sila, najslabšia $\sim 1\text{–}10\,\text{meV}$
– gekón, grafit



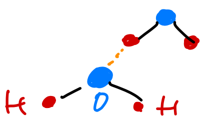
iontová vazba – jednému atómu chýba e^- do zaplnenia orbitalov, jeden má naviac → zväčša halogén + alkalický kov (NaCl, HBr)
⇒ prechodia si e^- a priťahujú sa elstat.
- e^- afinita – energia uvoľ. pridaním e^-
- ion. energia – energia potrebná na uvoľ. e^-

kovalentní vazba – zdieľanie valenčných e^- – silná vazba
– elektronegativita – snaha priťahovať e^-
veľký rozdiel elneg → vznik dipólových molekúl
– H_2O – O si priťahuje e^- → H sa viac odpudzujú
→ O si viac priťahuje H



kovová vazba ~ voľný pohyb e^-
– malý rozdiel E medzi val. a vod. e^-

vodíková vazba – vodík je naviazaný na další atom, kt mu kradne e^-
⇒ vznik dipólového momentu → priťahovanie jednot. molekúl
– drží pokope zložité org. struktury – DNA
$\sim 0{,}1\,\text{eV}$



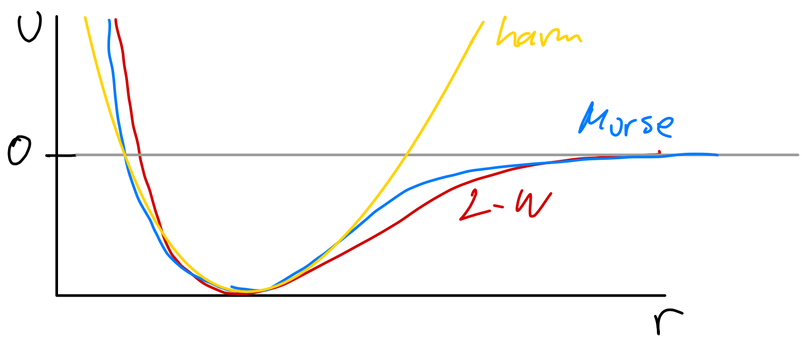
Medzi-atómové potenciály

- v ∞ atómy ako neutrálne → žiadna int
- ako sa približujú – jadrá – sú priťahované e^-
- keď sa moc priblížia – repulze jader

$$U(r) = 4\varepsilon\left(\left(\frac{\sigma}{r}\right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{r}\right)^{6}\right)$$ → Lenard-Jonesov, nemá anal

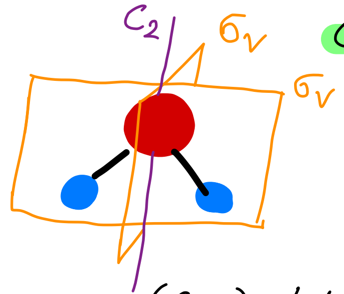
$$U(r) = D\left(1 - e^{-a(r-r_0)}\right)^2$$ → Morseho, má anal

$$U(r) = \frac{1}{2}k(r-r_0)^2$$ → harmonika, pekná app.



Popis symetrie molekul a krystalů pomocí grup, kvazikrystal

prvek symetrie	symbol	operace symetrie	symbol
rotační osa	C_n	rotace	C_n .. rotace o $\frac{360°}{n}$
rovina zrcadlení	σ	reflexe	Σ
nevlastní rot. osa	s_n	rotace + reflexe	S_n
střed inverze	i	inverze	I
identita	e	identita	E



C_{nv} grupa

$\sigma \to$
- σ_h ... kolmé na C_n
- σ_v ... paralel s C_n + prechádza at.
- σ_d ... paralel s C_n + mimo atómov

$S_n = C_n \Sigma_h$ ... zlož. operace

Dvojice $(G, \circ)$, kde G je množina a $\circ: G \times G \to G$ nazveme grupou, ak
1) $(A \circ B) \circ C = A \circ (B \circ C)$ $\forall A, B, C \in G$ ... asociativita
2) $\exists e \in G: \forall A \in G: A \circ e = e \circ A = A$
3) $\forall A \in G \ \exists A^{-1} \in G: A \circ A^{-1} = A^{-1} \circ A = e$

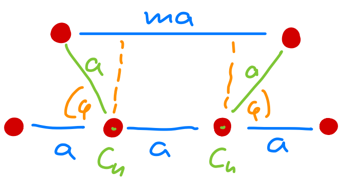
• na popis molekul – bodové grupy – zach. aspoň 1 bod:
↳ bodová grupa sa určí podľa prvkov symetrie → vývojové diagramy

• operace symetrie majú v 3D matic. vyjádření

$$C_n(z) = \begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi}{n} & \sin\frac{2\pi}{n} & \\ \sin\frac{2\pi}{n} & \cos\frac{2\pi}{n} & \\ & & 1 \end{pmatrix} \qquad \Sigma(xy) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$$

• v krystaloch – jedna elementární buňka, kt. translaciou vytvoří krystal
- nová operace = translace ⇒ prostorové grupy
- obmedzenie na rotačné osy:

rotace musí respek. translač. invarianci



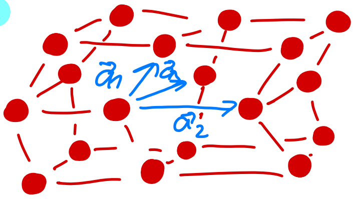
$a + 2a\cos\varphi = ma$
$\Rightarrow m = -1, 0, 1, 2, 3 \Rightarrow n = 1, 2, 3, 4, 6$
$\varphi = 0, 180, 120, 90, 30$

• kvazikrystal – usporiadaný, ale neperiodický materiál → nemá translač. symetrii
- ex. symetrie, napr. rotačný, ale nemá elem. buňku
- Penrosovo dláždění
- nemají omezení četnosti rotačnej osy

Kryštalová štruktúra látok, základní typy mříží, prostorové grupy

- elementární mříž – základná jednotka, z kt. sa transláciou vyrobí kryštál
  + translácia ⇒ prostorové grupy

- mriežové body



$k,l,m \in \mathbb{Z}$

$\vec{R} = k\vec{a}_1 + l\vec{a}_2 + m\vec{a}_3$ … polohy mriežových bodov

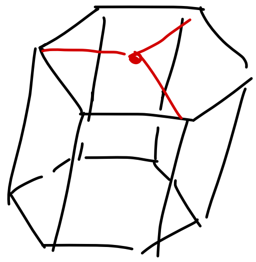
→ voľbou $\vec{a}_i$ si zvolíme elem. bunku

- Bravaisove mříže = prostorové grupy

- v 2D sú 4 el. mříže ⇒ 5 Brav. mříží → primitívne: monoklin., hexagonální, štvorcová, pravoúhlá
  → centrované: pravoúhlá

- v 3D je 7 el. mříží ⇒ 14 Brav. mříží

1) kubická (kocka) + bc, fc
2) tetragonální (čtverc. podstava) + bc
3) ortorombická (hranol) + bc, fc, bazál c
4) monoklinická (hranol + 1 šikmý uhol) + bazál c
5) triklinická (∀ šikmé uhly rôzne a strany rôzne)
6) trigonální (∀ šikmé uhly rovnaké, ∀ rovnaké strany)
7) hexagonální (keď sú 3 ⇒ hexagon)



- vnější tvar kryštálu musí odpovídat 1 zo 14 bodových grup. kryšt. mříže = kryštalograf. triedy.

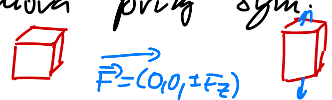
- umiestnenie kryštálu = hmotná báze
  ↳ nelze kdekoli ⇒ 230 prostorových grup
  ↳ doplnenie op. symetrie → šroubová os (translace + rotace)
  → kluzná rovina (translace + reflexe)

- symetrie kryštálu ovlyvňuje fyz. vlastnosti kryštálu
- majme tenzor $\overleftrightarrow{T}$, kt. odpovedá fyz. veličine (index lomu, vodivosť ..):

Neumannov princip: Fyz. vlastnost má stupeň symetrie aspoň taký ako bodová sym. kryštálu.

Voigtov princip: Tenzor žiadnej vel. sa nesmie zmeniť pod. op. sym. prost. grupy.

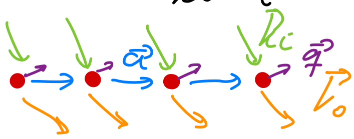
Curieov princip: Kryštál změní symetrii pod vlyvem vnějšího působení, tak že zachová prvky sym. společné so silou působení.



Experimentálne štúdium štrukt. pomocou rtg., dif. podm., štrukt. fakt.

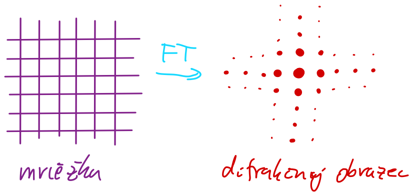
- pre dobré rozlíšenie objektu $\lambda \sim 2d$, kde d je stred. rozmer obj.
- rozmery kryštálu $\sim 1\,Å = 10^{-10}\,m = 0{,}1\,nm$
- možnosti → 1) rtg žiarenie
  2) urýchlené e^- – interagujú ⇒ ničia mat + nedosahujú hlboko
  3) neutróny – inter. pomocou dipólu → ťažšie detekce, na mag. mat.
- **Laueho difrakčné podm** – podm. na konštrukt. IF na kryštál. mriežke

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{a}_1 \cdot \vec{q} &= 2\pi h\\ \vec{a}_2 \cdot \vec{q} &= 2\pi k\\ \vec{a}_3 \cdot \vec{q} &= 2\pi l\end{aligned}}$$



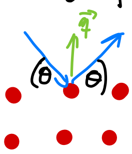
$$\vec{q} = \vec{k}_0 - \vec{k}_i$$

- difrakčný obraz = FT mriežke ⇒ **reciproká mriež**
  ↳ zachováva symetrie ↳ vzdialenosti ⟷ frekvencie
- reciproká mriež ⇒ $\vec{b}_i$ sú bázové vek. recip. mriežke



$$\boxed{\vec{b}_i = 2\pi \varepsilon_{ijk} \frac{\vec{a}_j \times \vec{a}_k}{V}}$$, kde $V = \vec{a}_1 \cdot (\vec{a}_2 \times \vec{a}_3)$ ... objem elem. mriežke

- dif. vektor je z reciprok. priestoru: $\boxed{\vec{q} = h\vec{b}_1 + k\vec{b}_2 + l\vec{b}_3 = \vec{B}_{hkl}}$
- bod v reciprok. priestore = rovina v priamom priestore
- **Millerove idx** hkl určujú rovinu v priamom priest. dané body $(a_1/h, 0, 0)$, $(0, a_2/k, 0)$, $(0, 0, a_3/l)$
- **Braggova difrakčná podm** – konštrukt. IF

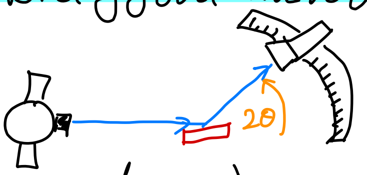


1D ... $\boxed{2d \sin\theta = n\lambda}$ $\quad n \in \mathbb{Z}$

3D ... $\boxed{2d_{hkl} \sin\theta = \lambda}$ $\quad d_{hkl} = \dfrac{2\pi}{|\vec{B}_{hkl}|}$

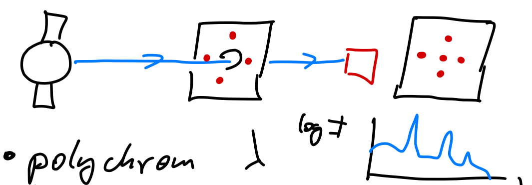
↳ nepíše sa n, lebo je dané vyšším Millerovým idx hkl

Braggova metóda



- monochrom. λ
- závislosť $I = I(\theta)$
  ↳ určenie d_{hkl} z peakov
- na splnenie podm → kryšt. dobre orient.
  ↳ vhodné na polykryšt. (prášky kryšt.) → ∀ orient.

Laueho metóda



- polychrom. λ
- Laueogramy – body od daných rovín
- na orientáciu monokryšt. v priest.
- nedajú sa body priradiť k rovinám

- **štruktúrny faktor** – určenie intenzity danej roviny

$$\frac{E_{0i}}{E_{0f}} \sim F(hkl) = \sum_n f_n \exp(-i\vec{q}\cdot\vec{R}_n) = \sum_n f_n(hkl)\,(-i2\pi[hx_n + ky_n + lz_n])$$

→ pomer amplitúd; → poloha n-tého atómu; $\vec{q} = \vec{k}_f - \vec{k}_i$

$\vec{R}_n = (x_n a_1, y_n a_2, z_n a_3)$ ← z lomkové sur.

úmerný #atómov ← atómový štrukt. faktor $f \sim \dfrac{E_{0i}}{E_{0f}}$

$$I \sim |F|^2 = \sum_m \sum_n f_m f_n\, e^{-i\vec{q}\cdot(\vec{R}_n - \vec{R}_m)}$$

→ intenzita

↳ **systematické vyhasínanie** = umiest. atómov že $|F|^2 = 0$

→ I klesá s teplotou – vplyv vibrácií na rozmazávanie ⇒ blurry effect

Einsteinov a Debyeov model vibrací v látkach

Einsteinov model

- atómy vibrujú ako LHO
- bez rotačných módov – iba vibrácie

$$E_n = \hbar\omega_E\left(n+\tfrac{1}{2}\right) \quad \dots \; \omega_E \text{ je jedna frekvence pre } \forall \text{ atómy}$$

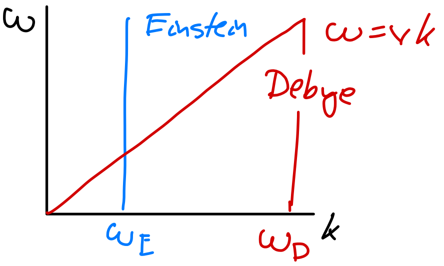
$$\rightarrow Z_c = \sum_n e^{-\beta E_n} = \frac{e^{-\frac{\hbar\omega_E\beta}{2}}}{1-e^{-\hbar\omega_E\beta}} \rightarrow \langle E\rangle = -\frac{\partial}{\partial\beta}\log Z_c = \hbar\omega_E\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega_E}{k_BT}}-1}\right)$$

$$\Rightarrow C_V = \left(\frac{\partial\langle E\rangle}{\partial T}\right)_V \underset{\text{3D LHO}}{=} 3N_Ak_B\, C_V = 3N_Ak_B\left(\frac{\hbar\omega_E}{k_BT}\right)^2\frac{e^{\frac{\hbar\omega_E}{k_BT}}}{\left(e^{\frac{\hbar\omega_E}{k_BT}}-1\right)^2}$$

- pre $T\to\infty$: $C_V \propto 3N_Ak_B \rightarrow$ Dulong Petit
- pre $T\to 0$: $C_V \propto \exp(-1/T)$ ... nesúhlasí s exp

Debyeov model

- predpoklad viace frekvencí $\Rightarrow$ disperzní vzťah: $\omega(\vec{k}) = v|\vec{k}|$
  - pro $\omega < \omega_D$



- om. zhora na ω – plynie z diskrétnosti rozloženia atómov – ex. minimálna $\lambda_{min} = 2a$
- predpokladáme kvantované energií vibrácií = fonóny
  - energia 1 kvanta

$$E_\omega = \hbar\omega,\; \omega = vk \quad (\omega < \omega_D) \rightarrow \text{analógia fotónov}$$

- fonóny sú bozóny s tromi polariz. stavy
- hustota stavov fonónov s danou frekv. ω: $g(\omega) = \frac{3V}{2\pi^2v^3}\omega^2$ — 3 polarizačné stavy ⇕ 3 smery vibrácií
- bozóny $\Rightarrow$ B–E statistika:

$$f(\omega) = \frac{1}{e^{\frac{E_\omega}{k_BT}}-1}$$

$$\omega_D = \left(\frac{6\pi^2N}{V}\right)^{\frac{1}{3}} v$$

(N – počet atómov)

- stredná energia:

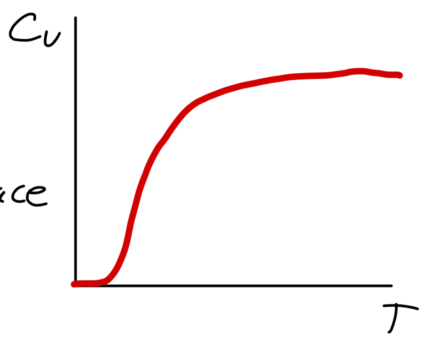
$$\langle E\rangle = \int_0^{\omega_D} f(\omega)g(\omega)\hbar\omega\, d\omega = \frac{3V\hbar}{2\pi^2v^2}\int_0^{\omega_D}\frac{\omega^3}{e^{\beta\hbar\omega}-1}d\omega$$

- tepelná kapacita

$$C_V = \frac{\partial\langle E\rangle}{\partial T} = 9N_Ak_B\left(\frac{T}{T_D}\right)^3\int_0^{\frac{T}{T_D}}\frac{x^4e^x}{(e^x-1)^2}dx$$

Debyeova teplota: $T_D = \frac{\hbar\omega_D}{k_B}$

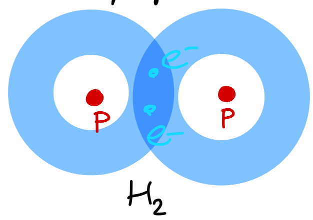
- pro $T\to\infty$ sedí na Dulong-Petit
- pro $T\to 0$ $C_V \sim T^3$ sedí na exp. pro čisté kovy



- nepopisuje správne všetky zliatiny → zlá disperzní relace
  → anharmonické vib.

Molekulové orbitaly, metoda LCAO, hybridizace

- popis vazby molekúl
- jednoduchá idea: prekryv orbitalov ⇒ väčšia hust. pravd. e^- medzi atomy
  ⇒ väčší zap. náboj medzi ⇒ priťahovanie atómov
- snaha popsat H_2



- vlnová fce H_2 ako súčin dvoch vlnových fcí pre voľné H, Ψ_{1s}^A, Ψ_{1s}^B

$$\Psi_{H_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\Psi_{1s}^A(\vec{r}_1)\Psi_{1s}^B(\vec{r}_2) \pm \underbrace{\Psi_{1s}^A(\vec{r}_2)\Psi_{1s}^B(\vec{r}_1)}_{\text{výmenný člen}}\right)$$

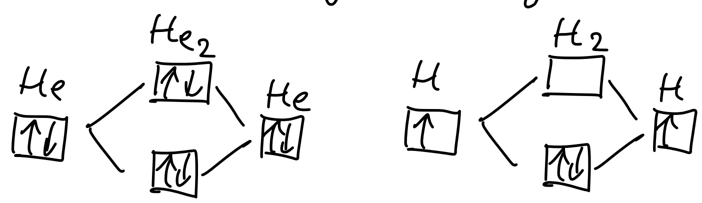
→ zo sym. / asym. postulátu ⇒ sym / asym kombinace

⇒ dve riešenia $\{\pm\}$ → iba sym. stabilné, vazebné

- nepopisuje všetko, napr. rozdiel O_2, N_2

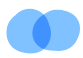
⇒ molekulové orbitaly – nové orbitaly, kt. vzniknú prekryvom AO
– treba vziať do úvahy aj nevaz. orbitaly

vazebné – nižšia energia → stabilnejší
nevazebné – vyššia energia



- zaplnujú sa obe MO
  ↳ obsaz. pravidlá ako AO

- 2 typy
  - π vazba – prekryv podél spojnice
  - σ vazba – prekryv na spojnici



- MO: 1) vznikajú LK AO
  2) deloh. e^- cez viac atómov
  3) iná energia a rozlož. náboja

podm. na vznik: 1) cca rovnaké E AO
2) AO dostatoč. sym
3) dostatoč. prekryv

Metoda LCAO pre H_2^+

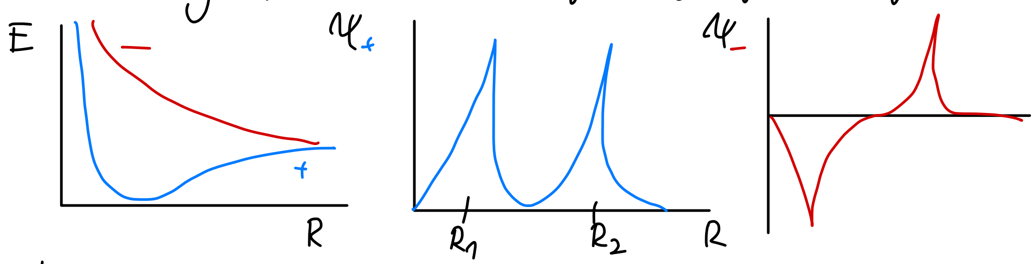
- LCAO – Linear Combinations of Atomic orbitals ⇒ $\Psi = \sum_i c_i \Psi_i$ ← AO
  ↳ metóda na určenie (app.) vazeb – MO
- pre H sú e^- v základnom stave: $\Psi_{1s}(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-r}$ $\quad a_B = 1$

$$\rightarrow \Psi_1(\vec{r}_1) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-|\vec{R}_1 - \vec{r}_1|} \qquad \Psi_2(\vec{r}_2) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-|\vec{R}_2 - \vec{r}_2|}$$

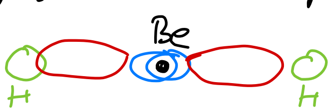
$\Psi = \alpha\Psi_1 + \beta\Psi_2$ → zo symetrie ⇒ $\Psi = N(\Psi_1 \pm \Psi_2)$

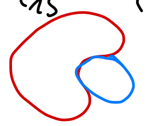
$N = \frac{1}{\sqrt{2(1\pm S)}}$, kde $S = \int \Psi_1 \Psi_2 \, dV$ → prekryvový integ.

$E(R) = \langle\Psi|H|\Psi\rangle$



- hybridizace orbitálov – niektoré atómy pri tvorbe molekuly spravia LK svojich vlastných AO
- pr. s+p = sp, s+p+p = sp², ... → $\Psi_{sp} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Psi_{1s} \pm \Psi_{p_z})$ → 2 fce pre 2 e^-
→ pr. na BeH_2:





← sp orbital

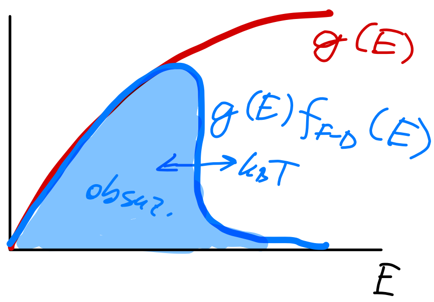
Model voľných a takmer voľných e^-, pásová štruktúra, Blochov th

Model voľných e^-

- Drudeho model
- e^- sa pohyb voľne až kým nenarazia: $m\ddot{x} + \frac{m}{\tau}\dot{x} = -e\vec{E}$
  ↳ stac. prípad: $\vec{v} = -\frac{e\tau}{m}\vec{E}$, τ je stredná doba medzi zrážkami

  $\Rightarrow \vec{j} = -en\vec{v} = \frac{e^2\tau n}{m}\vec{E}$ → Ohmov zákon $\Rightarrow$ $\gamma = \frac{m}{e^2\tau n}$ ... vodivosť
- Maxwell-Boltzmann dis. $\Rightarrow \langle E \rangle = \frac{3}{2}k_BT \Rightarrow C_V = \frac{3}{2}N_A k_B$ → nie je správne
  ↳ treba Fermi-Diraca: $f(E) = \frac{1}{e^{\frac{E-E_F}{k_BT}}+1}$
- E_F ... Fermiho energia → posledná zaplnená pre $T=0$
- e^- sa pohybujú voľne $\Rightarrow \psi_k(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}}e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \Rightarrow E_F = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m_e}$
- Fermiho koule – koule v k-prostoru, kde na jej povrch majú e^- energiu E_F

  → počet st. v kouli $N = \frac{V}{3\pi^2}k_F^3 \Rightarrow k_F = \left(\frac{3\pi^2 N}{V}\right)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow E_F = \frac{\hbar^2}{2m_e}\left(\frac{3\pi^2 N}{V}\right)^{\frac{2}{3}}$
- hustota stavov $g(E) = \frac{dN}{dE} = \frac{V}{2\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2}E^{1/2}$



- iba e^- s energ. v okolí E_F môžu prijať energiu aby sa stali voľnými

$$\underset{\text{voľné}}{\langle E \rangle} = \int_0^\infty g(E)f(E)E\,dE - \underbrace{\int_0^{E_F} g(E)f(E)E\,dE}_{\text{musíme odčítať viazané}}$$

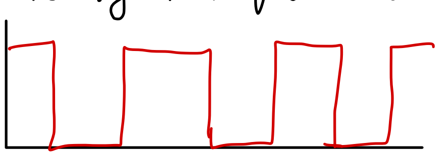
$\Rightarrow C_V = \gamma T$ → lin. závislosť sedí ale γ sa nezhoduje

Model takmer voľných e^-

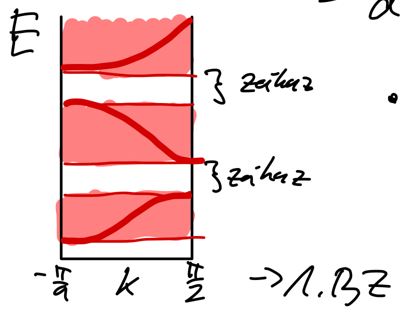
- pohyb v periodickom potenciály $\Rightarrow [\hat{H}, e^{\frac{ia\hat{p}}{\hbar}}] = 0$, kde a je perioda V

> **Blochov thm:** Pokiaľ $[H, \hat{\tau}_a] = 0$, t.j. $\hat{V}$ je a periodický, tak lze vlnové fce hľadať v tvare $\psi_{\vec{k}}(\vec{x}) = e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}u_{\vec{k}}(\vec{x})$, kde $u_{\vec{k}}(\vec{x})$ je a-periodická, $k \in [\frac{-\pi}{a}, \frac{\pi}{a}]$ → 1. Brillouinova zóna

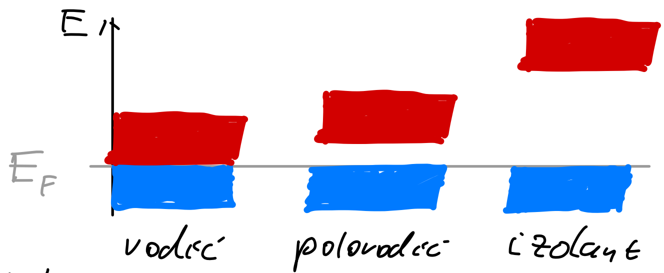
- vyjadrením $\psi = \sum_k C(k)e^{ikx}$ a $U = \sum_G U_G e^{iGx}$ (Fourier vzhľadom periodicity) dostaneme tzv. ústrednú rovnicu: $(\lambda_k - E)C(k) + \sum_G U_G C(k-G) = 0$ → zo SchR
- Kronig-Pennyho model – skokový potenciál
  – z podm. spojitosti vlnové funkce na okrajoch periody z Blochova thm $\Rightarrow$ zakázané pásy



• zakázaný pás – energie, pre. kt. nemá SchR riešenie
– dôsledok periodicnosti potenciálu



• pásová štruktúra – povolené a zakázané pásy
– valenčné pásy a vodivostné



• e^- sa vo vodičoch pohybujú ako voľné s efektívnou hmotnosťou m^*, danou krivosťou Fermiho plochy: $\frac{1}{m^*} = \frac{1}{\hbar^2} \frac{\partial^2 E}{\partial k^2}$

Formalizmus QM

Popis stavů kvant. syst.

→ nezávisí na norme ⇒ paprskem → Hilbertův prostor

1. Stav syst. je popsán prvkem $\mathcal{H}$ = stavový prostor
2. Poz. odpovedají samozdruž. lin. op. na $\mathcal{H}$
3. Výsledky měření sú dané spektrálnym rozkladom $\hat{A}$
   a) možné mer. hodnoty $a \in \sigma(\hat{A})$
   b) po nameraní a prejde stav syst. do stavu $\hat{P}_a|\psi\rangle$ ← projektor do podprost. s.č. a
   c) pravd. nameraní a je daná $\|\hat{P}_a|\psi\rangle\|^2$

Princíp superpozice: → uzavrenosť $\mathcal{H}$ pod + a ·

Pokiaľ $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{H}$ a $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, tak potom aj $\psi = \alpha\psi_1 + \beta\psi_2 \in \mathcal{H}$

Diracova notace ...
- $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ vektor
- $\langle\psi| : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ funkcionál jednoznač. priradený vektoru $|\psi\rangle$, taký, že $\langle\psi|(|\psi\rangle) = \|\psi\|^2$
- skalárny súčin $\langle\phi|\psi\rangle$
- vnejší súčin $|\phi\rangle\langle\psi|$

ON báze $\{|\phi_i\rangle\}$
- $\langle\phi_i|\phi_j\rangle = \delta_{ij}$
- relace úplnosti $\hat{1} = \sum_i |\phi_i\rangle\langle\phi_i|$
- repr. stavu v bázi: $|\psi\rangle = \sum_i \langle\phi_i|\psi\rangle|\phi_i\rangle = \sum c_i|\phi_i\rangle$

→ v prípade konečnej báze $|\psi\rangle$ sa dá repr. vektorom $\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$
- prechod medzi bázami:

$$|\psi\rangle = \sum_i c_i|\phi_i\rangle = \sum_j |\phi_j'\rangle \overbrace{\sum_i \langle\phi_j'|\phi_i\rangle c_i}^{c_j'}$$

⇒ $c_i' = \sum_j U_{ij} c_j$, kde $U_{ij} = \langle\phi_j'|\phi_i\rangle$ je unit. matice prechodu

Spojitá báze

↳ nahradené sum integrálmi $|\psi\rangle = \int \overbrace{\langle a|\psi\rangle}^{\psi(x)} |a\rangle da$ ← x-repr.

Pozorovatelné

$A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, $A = A^+$ ... samozdruž. op., vl. čísla sú možné merat. veličiny
↳ preto musí byť s.s. aby $\lambda \in \mathbb{R}$

op. polohy $\hat{x}|x\rangle = x|x\rangle$

↳ vlnová fce je repr. stavu v bázi $\int |x\rangle\langle x| dx = 1$: $|\psi\rangle = \int \langle x|\psi\rangle |x\rangle dx$

↳ $\psi(x) = \langle x|\psi\rangle$, $|\psi(x)|^2$ vyjadruje hust. pravd.

- komutátor $[A,B] = AB - BA$ → obecne nenulový

→ zo štatistiky: $\Delta A^2 = \langle(A - \langle A\rangle)^2\rangle = \langle A^2\rangle - \langle A\rangle^2$,

kde

$$\langle A\rangle = \langle\psi|A|\psi\rangle = \int \psi^*(x) A(x,x') \psi(x') dx' dx$$

→ relace neurčitosti: $\Delta A \Delta B \geq \frac{1}{2}|\langle[A,B]\rangle|$ $[A,B] = i\hat{C}$, kde $\hat{C} = \hat{C}^+$ pro A, B samozdruž.

$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$

Reprezentace fyz. veličín

- QM postulát:

(2) Poz. veličiny sú repr. lin. samozdruž. op. $A = A^+$

(3) Výsledky meraní sú dané spek. rozkladom $\sigma(A)$.

a) Namerateľné hodnoty sú dané body spektra $a \in \sigma(A)$

b) Stav hneď po nameraní a je daný $\hat{P}_a|\psi\rangle$

c) Pravd. namerať a je daná $\|\hat{P}_a|\psi\rangle\|^2$

(4) Časový vývoj stavu je daný SchR $i\hbar\, \partial_t|\psi(t)\rangle = \hat{H}|\psi(t)\rangle$

- samozdruž. op.: $-\ \forall \phi, \psi \in \mathcal{H}: \langle\phi|A\psi\rangle = \langle A\phi|\psi\rangle \quad (A = A^+)$

  $-$ navíc $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(A^+)$

- spektrum: $\lambda \in \sigma(\hat{A})$ nazveme bodem spektra $A: \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ pokud $\hat{A} - \lambda\mathbb{1}$ není prosté zob. na $\mathcal{H}$.

  $\rightarrow$ ex. $|\psi\rangle \in \mathcal{H}: (\hat{A} - \lambda\mathbb{1})|\psi\rangle = 0$

  (1) $\hat{A} - \lambda\mathbb{1}$ není prosté $\rightsquigarrow \lambda \in \sigma_p(\hat{A})$ ... bodové

  (2) $\hat{A} - \lambda\mathbb{1}$ je prosté, ale $\mathcal{R}(\hat{A} - \lambda\mathbb{1}) \neq \mathcal{H}$

  (i) $\overline{\mathcal{R}(\hat{A} - \lambda\mathbb{1})} = \mathcal{H}$, tj. hustá podmnož. $\mathcal{H}$, $\lambda \in \sigma_c(\hat{A})$ ... spojité

  (ii) $\overline{\mathcal{R}(\hat{A} - \lambda\mathbb{1})} \neq \mathcal{H}$, $\lambda \in \sigma_R(\hat{A})$ ... reziduové

- pre spojité spektrá $\rightarrow$ zob. vl. vek. $\|\hat{A} - \lambda\mathbb{1}|\psi_n\rangle\| \to 0 \qquad |\psi_n\rangle \in \mathcal{H}$

  $\rightarrow$ pr. $|x\rangle$ je vl. vektor $\hat{x}$, $\langle x|x'\rangle = \delta(x - x')$

- spektrálny rozklad: $\hat{A} = \sum_{\lambda \in \sigma_p} \lambda \hat{P}_\lambda + \int_{\lambda \in \sigma_c} \lambda \hat{P}_\lambda \, d\lambda$

  $\hookrightarrow$ kde $\hat{P}_\lambda = \sum_a |\lambda, a\rangle\langle\lambda, a|$ projektor na podprostor s vl. č. λ

- nečasová SchR $\rightarrow$ vl. čísla a vekt. $\hat{H}$: $\hat{H}|E\rangle = E|E\rangle$ $\leftarrow$ Hamiltonián

  $\hookrightarrow$ v x-repr, kde $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x})$:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(x) + V(x)\psi(x) = E\psi(x)$$

$|E_n\rangle$ stac. stavy $\Rightarrow |E_n(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t}|E_n\rangle \rightarrow$ mení sa len fáze

- ako skonštruovať op? $\rightarrow$ z klas. mech. sú poz. dané fcemi na fáz. prost., tj. $f = f(p, x)$

  $\rightarrow$ pokiaľ niesú súčiny p, q tak stačí $\hat{A} = f(\hat{p}, \hat{x})$

  $\rightarrow$ v prípade jednoduch. súčinu $xp \rightarrow \frac{1}{2}(\hat{p}\hat{x} + \hat{x}\hat{p})$

  $\rightarrow$ obecne není jednoznačné $-$ 1 fce $=$ viac op.

$$L^2 = x^2p^2 - (\vec{x}\cdot\vec{p})^2 \quad \text{vs} \quad \hat{L}^2 = \hat{x}^2\hat{p}^2 - (\hat{\vec{x}}\cdot\hat{\vec{p}})^2 + i\hbar\, \hat{\vec{x}}\cdot\hat{\vec{p}}$$

Souřadnicová, impulzová a maticová repr. QM

x-repr

→ vyjadrené v báze vl. vek. $\hat{x}|x\rangle = x|x\rangle$, $\langle x|x'\rangle = \delta(x-x')$

- pro $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}$, $\langle x|\Psi\rangle = \Psi(x)$ vlnová funkce
- operátory v x-repr: $\hat{x} \ldots x$, $\hat{p}_x \ldots -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$, $\hat{\vec{p}} \ldots -i\hbar\nabla$ $\qquad \hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(x)$
- SchR v x-repr: $\hat{H}\Psi(x) = E\Psi(x) \to -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi(x) + V(x)\Psi(x) = E\Psi(x)$

p-repr

→ vyjadrené v báze vl. vek $\hat{p}|p\rangle = p|p\rangle$, $\delta(p-p') = \langle p|p'\rangle$

- pro $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}$, $\langle p|\Psi\rangle = \Psi(p)$
- operátory v p-repr: $\hat{p} \ldots p$, $\hat{x} \ldots i\hbar\frac{\partial}{\partial p}$, $\hat{\vec{x}} \ldots i\hbar\nabla$ $\qquad \hat{H} \ldots \frac{p^2}{2m} + V(i\hbar\frac{\partial}{\partial p})$
- SchR v p-repr: $\frac{p^2}{2m}\Psi(p) + V(i\hbar\frac{\partial}{\partial p})\Psi(p) = E\Psi(p)$

Vzťah x-repr a p-repr

$[\hat{x},\hat{p}] = i\hbar$ → kanonické komutačné relace

→ vl. vekt. $\hat{p}$ v x-repr: $\langle x|p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{\frac{i}{\hbar}px}$, $\langle\vec{x}|\vec{p}\rangle = \frac{1}{(\sqrt{2\pi\hbar})^3} e^{\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{x}}$

→ $\Psi(p) = \langle p|\Psi\rangle = \int \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-\frac{i}{\hbar}px}\Psi(x)\,dx = \mathcal{F}(\Psi(x))(p)$ → FT

Maticová formulace

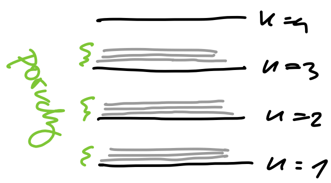
- v prípade kon. dim. prostoru $\mathcal{H} = \mathbb{C}^N$ môžeme jednotlivé op. repr. ako matice v nejakej báze
- energetická báze: $\hat{H}|n\rangle = E_n|n\rangle$, $|n\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$
- obecne ale apriory máme $\hat{H}$ v inej báze, napr. kvant. tečky:

$$\hat{H} = \hbar\beta(|1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 3| + |3\rangle\langle 1| + h.c.) \xrightarrow[\text{repr.}]{\text{mat.}} \hat{H} = \hbar\beta\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

→ riešenie nečasovej SchR sa redukuje na úlohu vl. čísel a vektorov

Variační metoda a stac. poruchová metoda hledání vázaných st.

Poruchová metoda



- zložitá SchR – nevieme vyriešiť anal.
- $\hat H = \hat H_0 + \lambda \hat H_1$ → $\hat H_0$ vieme vyriešiť $\hat H_0|n\rangle = \varepsilon_n|n\rangle$

  ↘ $\lambda\hat H_1$ je porucha, "malá" v porovnaní s $\hat H$
- plné riešenie:

$$(\hat H_0+\lambda\hat H_1)|\psi_n\rangle = E_n|\psi_n\rangle$$, pričom $\lim_{\lambda\to 0}|\psi_n(\lambda)\rangle = |n\rangle$

↳ rozvoj v λ:

$$|\psi_n(\lambda)\rangle = \overbrace{|\psi_n^{(0)}\rangle}^{|n\rangle} + \lambda|\psi_n^{(1)}\rangle + \dots$$

$$E_n(\lambda) = \underbrace{E_n^{(0)}}_{\varepsilon_n} + \lambda E_n^{(1)} + \dots$$

→ voľba normalizace: $\langle n|\psi_n\rangle = 1$

pre $s>0$ $\langle n|\psi_n^{(s)}\rangle = 0$

- dosadením rozvojov a porovnaní rádov:

λ^0: $[H_0-\varepsilon_n]|\psi_n^{(0)}\rangle = 0$

λ^1: $[H_0-\varepsilon_n]|\psi_n^{(1)}\rangle = (E_n^{(1)}-H_1)|\psi_n^{(0)}\rangle$

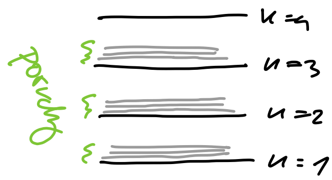
⋮

λ^s: $[H_0-\varepsilon_n]|\psi_n^{(s)}\rangle = (E_n^{(1)}-H_1)|\psi_n^{(s-1)}\rangle + \sum_{k=2}^{s} E_n^{(s)}|\psi_n^{(s-k)}\rangle$

$$\boxed{E_n^{(1)} = \langle n|\hat H_1|n\rangle}$$

nedegen. spektrum:

$$\boxed{|\psi_n^{(1)}\rangle = \sum_{m\neq n}\frac{\langle m|H_1|n\rangle}{\varepsilon_n-\varepsilon_m}|m\rangle \qquad E_n^{(2)} = \sum_{m\neq n}\frac{|\langle m|H_1|n\rangle|^2}{\varepsilon_n-\varepsilon_m}}$$



→ podm. malosti korekce: $|\langle m|H_1|n\rangle| \ll |\varepsilon_n-\varepsilon_m|$

deg. spektrum → $H_0|n,r\rangle = E_n|n,r\rangle$ $\forall r$ $\langle n,r|n',r'\rangle = \delta_{nn'}\delta_{rr'}$

→ treba nájsť vhodnú bázu:

$$|\psi_{n,t}^{(0)}\rangle = \sum_{r} c_{nr}^{(t)}|n,r'\rangle$$ → vhodná báze

$$\boxed{\sum_{r'}\langle n,r|H_1|n,r'\rangle c_{nr'}^{(t)} = E_{n,t}^{(1)} c_{nr'}^{(t)}}$$

→ t čísluje novú bázu

→ úloha na vl. čísla a vl. vekt. $E_{n,t}^{(1)}$ $c_{nr'}^{(t)}$

$$\boxed{E_{n,t}^{(2)} = \sum_{\substack{m\neq n\\ t'}}\frac{|\langle m,t|H_1|n,t'\rangle|^2}{\varepsilon_n-\varepsilon_m}}$$

→ v Σ neobsahuje 1/0

Variačná metoda

$E[\psi] = \frac{\langle\psi|H|\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle}$ ... stredná hodnota E, funkcionál na $\mathcal{H}$

$\delta E[\psi_n] = 0 \iff H|\psi_n\rangle = E_n|\psi_n\rangle$, tj. $E[\psi]$ nabýva stac. pro stac.

$E_0 \le E[\psi]$, kde E_0 je energia základného stavu

⇒ nech $|\psi(\vec\alpha)\rangle$ je trieda fcí daná parametrami $\vec\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_n)$

⇒ potom najlepšia app. energie je daná keď $\frac{\partial}{\partial\alpha}E[\psi(\vec\alpha')] = 0$

pre $|\psi(\vec\alpha')\rangle$ s energiou $E[\psi(\vec\alpha')]$

- pre $|\psi(\vec\alpha)\rangle = \sum_i \alpha_i|\phi_i\rangle$ kde $\{|\phi_i\rangle\}$ je ON báze najlepšie app.

najmenšie vl. číslo $\varepsilon^{(0)}<\varepsilon^{(1)}$.. problému $\sum_j\langle\phi_i|H|\phi_j\rangle\alpha_j = \varepsilon^{(e)}\alpha_i$

Kvantová dynamika

Nestacionární Schrödingerova rovnice, rovnice kontinuity, Ehrenfest

Schrödingerov obraz

- postulát QM – časový vývoj stavu je daný SchR: $\boxed{i\hbar \frac{\partial}{\partial t}|\Psi(t)\rangle = \hat{H}|\Psi(t)\rangle}$
- riešenie vieme zapísať ako $|\Psi(t)\rangle = \hat{U}(t)|\Psi\rangle$, kde $\hat{U}$ je unit.
- $\hat{U}$ potom rieši rovnicu: $i\hbar \frac{d}{dt}\hat{U}(t) = \hat{H}\hat{U}(t)$

- op. sú stac $\frac{d}{dt}\hat{A} = 0$

↳ jej riešenie závisí od charakteru $\hat{H}$:

1) $\hat{H}$ je časovo nezáv. $\Rightarrow \boxed{\hat{U}(t,t_0) = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t-t_0)}}$
2) $\hat{H}$ závisí na čase, ale komut $\Rightarrow$ $\hat{U}(t,t_0) = e^{-\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t}\hat{H}(t')dt'}$
3) $\hat{H}$ závisí na čase, ale nekomut $\Rightarrow$

$$\hat{U}(t,t_0) = \hat{1} + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{i\hbar}\right)^n \int_{t_1}^{t} dt_1 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n\, \hat{H}(t_1)\hat{H}(t_2)\dots\hat{H}(t_n)$$

→ $\hat{H}$ je generátor časového vývoja, jednoparam. Lieova grupa

- $\hat{H}|n\rangle = E_n|n\rangle$ sú stac. stavy: $|n(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t}|n\rangle$ ⇒ len fázu

→ pre obecný stav potom $|\Psi\rangle = \sum_n c_n|n\rangle \Rightarrow |\Psi(t)\rangle = \sum_n e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t}c_n|n\rangle$

- rovnica kontinuity → dôsledok časovej SchR vyjadrenej v x-repr

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\cdot\vec{j} = 0}$$, kde $\rho(x,t) = |\Psi(x,t)|^2$ – hust. pravd.
$\vec{j} = \frac{\hbar}{m}\mathrm{Im}\{\Psi^*\nabla\Psi\}$ – tok. pravd.

Heisenbergov obraz

- stavy sú stac., vyvíjajú sa operátory: $\frac{d}{dt}|\Psi^H\rangle = 0$ $\boxed{A(t) = U^+(t,t_0)A(t_0)U(t,t_0)}$

↳ U splňa analogickú rovnicu ako v SchO

- operátory splňujú $\boxed{i\hbar\frac{d}{dt}\hat{A}(t) = [\hat{H}, \hat{A}(t)]}$

↳ analógia klas. mechaniky $\frac{d}{dt}f = \{f, H\}$

- stredné hodnoty sa nemenia $\langle A\rangle = \langle\Psi(t)|A|\Psi(t)\rangle = \langle\Psi|A(t)|\Psi(t)\rangle$

- dosadením $\begin{Bmatrix}\hat{x} \text{ za } \hat{A} \\ \hat{p} \text{ za } \hat{A}\end{Bmatrix}$ $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V}(\hat{x}(t))$ dostaneme

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{d}{dt}\hat{x}(t) &= \frac{\hat{p}(t)}{m} \\ \frac{d}{dt}\hat{p}(t) &= -\hat{V}'(\hat{x}(t))\end{aligned}}$$ → Ehrenfest

- vystredovaním dostaneme klasickejšiu variantu:

$$\frac{d}{dt}\langle\hat{x}(t)\rangle_\Psi = \frac{1}{m}\langle\hat{p}(t)\rangle_\Psi \qquad \frac{d}{dt}\langle\hat{p}(t)\rangle_\Psi = \left\langle -\frac{\partial V}{\partial x}(t)\right\rangle_\Psi$$

Evoluce obecného kvant. systému, kvantové meření

• v QM → 2 druhy časového vývoja → unitárny (samovolný), projekčný (meranie)

• unitárny vývoj je daný unit. op. vývoja $\hat{U}(t)$

• projekčný vývoj je daný projekčný op. $\hat{P}_\lambda$ na podprostor meraných hodnôt

• zo znalosti stavu $|\psi(t)\rangle$ a op. $\hat{U}(t,t_0)$ zistiť $|\psi(t_0)\rangle = U^+|\psi(t)\rangle$

• meranie, tj. projekce "ničí" stav → kolabuje, projektuje ⇒ nevieme zistiť stav pred týmto vývojom

$$\psi(x,t_0) \xrightarrow{U(t',t_0)} \Big|_{\hat{P}_{\Delta x}} \xrightarrow{U(t,t')} \psi' = U(t,t')\,\hat{P}_{\Delta x}\,U(t',t_0)\,\psi(x,t_0)$$

• gen. časového vývoja je Hamil.: $U(t,t_0) = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t-t_0)}$

Postulát o meraní:

③ Meranie je dané spektrom $\sigma(A)$ daného op. a vl. podprostory $\hat{P}_\lambda = \sum_k |\lambda,k\rangle\langle\lambda,k|$

(a) Možné nameratelné hodnoty sú dané bodmi spektra $\sigma(A)$

(b) Stav po nameraní $\lambda\in\sigma(A)$ je LK vek. daného podprostoru: $|\psi\rangle \to \hat{P}_\lambda|\psi\rangle$

(c) Pravdepodobnosť nameraní $\lambda\in\sigma(A)$ je $\|\hat{P}_\lambda|\psi\rangle\|^2 = \sum_k |\langle\lambda,k|\psi\rangle|^2$

• stredná hodnota $\langle A\rangle = \langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle$

Integrály pohybu, kvantová čísla, symetrie v QM

- klasicky: $A(p,q)$ je IP pokiaľ $\frac{dA}{dt}=0 \Leftrightarrow \{A,H\}=0$

↓ analogicky platí v QM: $\hat{A}$ je IP pokiaľ $\boxed{\frac{d}{dt}\hat{A}^H = 0 \Leftrightarrow [A,H]=0}$

- ak je $\hat{A}$ IP tak sa počas časového vývoja nemení: $\hat{A}=U^+\hat{A}U \Rightarrow$ zach. vel.
  ↳ tak tiež sa nemení $\mu(t)=\langle u(t)|\hat{A}|u(t)\rangle=\langle u(t_0)|\hat{A}|u(t_0)\rangle=\mu(t_0)$

- pokiaľ $[A,H]=0$, tak $\hat{A}$ a $\hat{H}$ majú spoločné vl. vektory:

$$\hat{A}|na\rangle = a|na\rangle \quad \hat{H}|na\rangle = E_n|na\rangle \Rightarrow \text{súčasná diagonalizace}$$

ÚSKO = množina komut. op., ktorých vl. čísla jednoznačne určujú spoločné vl. vektory $\Rightarrow$ 1. dim. vl. podpriestory

- v QM je v ÚSKO $\hat{H}$ a ďalšie komut. op
  $\Rightarrow$ stav je určený ich vl. číslami $\equiv$ kvantové čísla

Symetrie

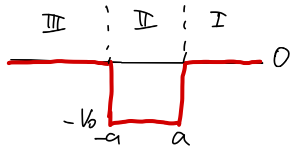
- symetrii je vždy priradená operace = transformace
- prostoročasové transformace $\{\tau\}$ sú jednoznačne repr. unit. operátorom U_τ
- Lieova grupa = grupa, kt. el. sú dané sp. parametrom:
  ↓ grupa transformací
  1) translace → vektor posunutí $\{\vec{a}\}$
  2) rotace → os rotace a uhol $\{\varphi,\vec{n}\}$
  3) boost → rychlost $\{\vec{v}\}$
  4) posun v čase → čas $\{t\}$
- prvky Lieovej grupy lze repr na $\mathcal{H}$ ako unit op. $U_{\vec{a}} = e^{i\sum_i a_i G_i}$,
  kde $\hat{G}_i = \hat{G}_i^+$ sú gen. grupy (samozdruž.), kt. splňujú $[\hat{G}_i,\hat{G}_j]=i\,C_{ijk}\hat{G}_k$ (konst. štrukt.)
- QM syst. je inv. voči U_τ:
  1) $U_\tau^+ H U_\tau = H$
  2) $[H,U_\tau]=0$
  3) $[H,G_i]=0 \Rightarrow$ do ÚSKA
  4) $\frac{d}{dt}G_i = 0 \Rightarrow$ konstanta pohybu
  5) rovnaké vl. vekt $\Rightarrow$ degenerace spektra

- príklady:
  1) translace: $U_{\vec{a}} = e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{a}\cdot\hat{\vec{P}}}$ $\quad G_i = -\frac{\hat{\vec{P}}}{\hbar}$ ... hybnosť
  2) rotace: $U_{\varphi,\vec{n}} = e^{-\frac{i}{\hbar}\varphi\vec{n}\cdot\hat{\vec{L}}}$ $\quad G_i = -\vec{L}/\hbar$ ... mom. hybnosti
  3) boost: $U_{\vec{v}} = e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{v}\cdot\hat{x}m}$ $\quad G_i = -\frac{\hat{x}m}{\hbar}$ ... poloha
  4) časový posun: $U_t = e^{-\frac{i}{\hbar}t\hat{H}}$ $\quad G_i = -\frac{\hat{H}}{\hbar}$ ... Hamit.

Jednoduché QM systémy

Kvantování energie pro vázanou částici: jáma, LHO

Jáma



$$V(x) = \begin{cases} -V_0 & x\in(-a,a) \\ 0 & \text{jindy} \end{cases}$$

- $V(x)$ je sudá fce $\Rightarrow [\hat{H},\hat{\Pi}] = 0 \Rightarrow$ stačí riešiť na $(0,\infty)$ a zaistiť, aby boli fce sudé/liché na $\mathbb{R}$

$x\in(a,\infty)$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi_I''(x) = E\psi_I(x)$$

$$\psi_I(x) = \cancel{A_I e^{\varkappa x}}^{\text{diverguje}} + B_I e^{-\varkappa x}$$

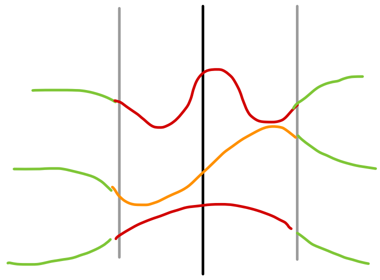
$$\varkappa = \sqrt{\frac{2m|E|}{\hbar^2}}$$

$x\in(0,a)$

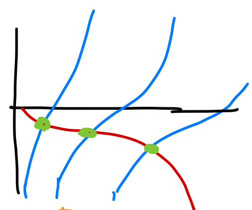
$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi_{II}''(x) - V_0\psi_{II}(x) = E\psi_{II}(x)$$

$$\psi_{II}(x) = A_{II}e^{ikx} + B_{II}e^{-ikx}$$

$$k = \sqrt{\frac{2m(E-V_0)}{\hbar^2}}$$



- podmienky sudosti/lichosti $\Rightarrow$ $\psi(x) \sim \begin{cases} e^{-\varkappa|x|} & |x|>a \\ \cos kx \ \text{(sudé)} & |x|<a \\ \sin kx \ \text{(liché)} & |x|<a \end{cases}$
- podm. normalizace $1 = \int \psi(x)\psi^*(x)\,dx$
- podmienky naviazania: $\psi_I'(a) = \psi_{II}'(a)$, $\psi_I(a) = \psi_{II}(a)$



$\Rightarrow$ $ka\tan ka = \varkappa a$ (sudé), $ka\cot ka = -\varkappa a$ (liché) } kvantují možné hodnoty $k,\varkappa \Rightarrow E$; ex. max. možné E pre dané V_0 a a.

- v prípade nekonečnej steny na $(0,a)$ $\psi_n = N\sin(kx)$, $k=\frac{n\pi}{a}$ $\Rightarrow E_n = \frac{\hbar^2\pi^2n^2}{2ma^2}$

LHO

$$V(x) = \tfrac{1}{2}kx^2 = \tfrac{1}{2}m\omega^2x^2 \quad\rightarrow\quad \hat{H} = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}m\omega^2x^2 =$$

- subst. $p\rightarrow p' = \frac{p}{\sqrt{m\hbar\omega}}$, $x\rightarrow x' = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\,x$ $\Rightarrow \hat{H} = \frac{1}{2}(\hat{p}^2+\hat{x}^2)\hbar\omega$

$\Rightarrow \hat{H}$ je sym. voči zámene $\hat{x}\leftrightarrow\hat{p}$ $\Rightarrow$ vlnové fce budú stac. body FT

$\Rightarrow$ zavedieme op: $\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x}+i\hat{p})$, $\hat{a}^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x}-i\hat{p})$

$\Rightarrow \hat{H} = \hbar\omega(\hat{a}^+\hat{a}+\tfrac{1}{2}) = \hbar\omega(\hat{N}+\tfrac{1}{2})$ $\rightsquigarrow$ stačí nájsť vl. čísla $\hat{N}|n\rangle = n|n\rangle$

$\hat{a}^+|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$, $\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle$ $\Rightarrow n\in\mathbb{N}_0$

$\Rightarrow E_n = \hbar\omega(n+\tfrac{1}{2})$ $\rightarrow$ vl. fce nájdeme ako $\hat{a}|0\rangle = 0 \Rightarrow \psi_0(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}}e^{-x^2}$

$\Rightarrow$ obecne dostaneme $\psi_n(x) = \frac{(\hat{a}^+)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!\,2^n\sqrt{\pi}}}\left(x-\frac{\partial}{\partial x}\right)^n e^{-\frac{x^2}{2}}$

$\Rightarrow \psi(x) = \frac{1}{\sqrt{n!\,2^n\sqrt{\pi}}}H_n(x)\,e^{-\frac{x^2}{2}}$

↳ Hermitove polynomy

Voľná častice, vlnové balíky, prechod častice poten. bariérou

Voľná častica

• $V = 0 \Rightarrow \hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} \Rightarrow [p, H] = 0 \Rightarrow H|p\rangle = \frac{p^2}{2m}|p\rangle$

→ stačí nájsť vl. fce $\hat{p}$: $\langle x|\hat{p}|p\rangle = -i\hbar\nabla\psi_p(x) = \langle x|p\rangle = \psi_p(x)$

$$\Rightarrow \psi_{\vec{p}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}^3} e^{\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{x}} \Rightarrow \psi_{\vec{p}}(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}^3} e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\cdot\vec{x} - \omega t)}, \text{ kde } \omega = \frac{p^2}{2\hbar m}$$

norm na δ-fu $\int \psi_{\vec{p}}(\vec{x})\,\psi_{\vec{p}'}(\vec{x})\,d^3p = \delta(\vec{p} - \vec{p}')$, alt. na konečný objem $N = \frac{1}{\sqrt{V}}$

→ obecné riešenie je LK: $\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}^3}\int C(p)\, e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\cdot\vec{x} - \omega(p)t)}\, d^3p$

• alternatívne môžeme vyriešiť v rad. súradniciach:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} = \frac{1}{2m}\left(\hat{p}_r^2 + \frac{\hat{L}^2}{r^2}\right), \text{ kde } \hat{p}_r^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)$$

→ sférické harmoniky

$$\psi_k(r,\vartheta,\varphi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, k R_{kl}(r)\, Y_{lm}(\vartheta,\varphi)$$

↳ $R_{kl}(r) = j_l(kr) = (-1)^l (kr)^l \left(\frac{1}{kr}\frac{d}{d(kr)}\right)^l \frac{\cos kr}{kr}$

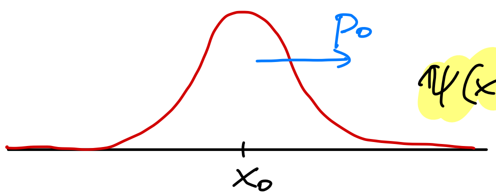
↳ Besselove fce

Vlnové balíky

• obecné stac. riešenie: $\psi_{\vec{p}}(\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int C(p)\, e^{\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{x}}\, d^3p$

↳ v závislosti od voľby $C(p)$ dostaneme rôzne vlnové balíky, zväčša sa volí úzky, centrovaný peak okolo p_0

• **1D Gaussovský balík:** $C(p) = \frac{1}{\Delta p\sqrt{2\pi\hbar}}\, e^{-\frac{(p-p_0)^2}{2\Delta p^2}}$ → spĺňajú $\Delta x \Delta p = \frac{\hbar}{2}$



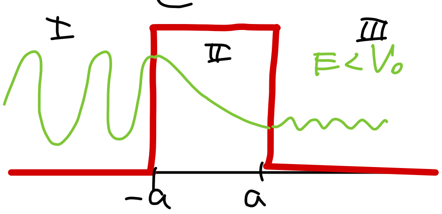
$$\psi(x) = \frac{1}{(\pi\Delta x^2)^{1/4}}\, e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\Delta x^2}}\, e^{\frac{i}{\hbar}p_0 x}$$

Prechod častice poten. bariérou

$$V(x) = \begin{cases} 0 & |x| > a \\ V_0 & |x| < a \end{cases}$$

• dve možnosti $E > V_0$, $E < V_0$

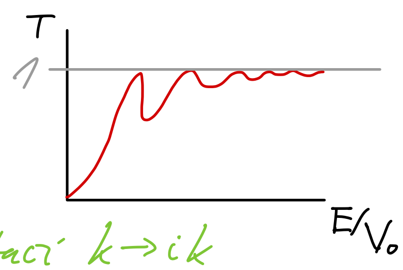
• 3 intervaly riešenia:



$x \in (-\infty, a)$: $\psi_I = Ae^{ik_0x} + Be^{-ik_0x}$, $k_0 = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$

$|x| < a$: $\psi_{II} = \alpha e^{ikx} + \beta e^{ikx}$, $k = \sqrt{\frac{2m(E-V_0)}{\hbar^2}}$

$x \in (a, \infty)$: $\psi_{III} = Ce^{ik_0x}$



$$T = \left|\frac{j_{\text{prichod}}}{j_{\text{nálet}}}\right|^2 = \left|\frac{C}{A}\right|^2 = \frac{1}{1 + \frac{1}{4}\left(\frac{k_0}{k} - \frac{k}{k_0}\right)^2 \sin^2 ka}$$

$E > V_0$

pre $E < V_0$ stačí $k \to ik$

$$R = 1 - T = \left|\frac{j_{\text{odraz}}}{j_{\text{nálet}}}\right|^2 = \left|\frac{B}{A}\right|^2 \qquad \vec{j} = \frac{\hbar}{m}\,\mathrm{Im}(\psi^*\nabla\psi)$$

Orbitální a spinový mom. hybnosti, základy skládaní

- operátor $\hat{\vec{J}}$ nazveme moment hybnosti, ak $[\hat{J}_i, \hat{J}_j] = i\hbar \varepsilon_{ijk} \hat{J}_k$

$J^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2 \Rightarrow [J^2, J_i] = 0 \rightsquigarrow J^2, J_z$ stejné vl. vekt.
$J_\pm = J_x \pm i J_y$ ... posunovací op. $\quad [J^2, J_\pm] = 0,\ [J_\pm, J_z] = \mp\hbar \hat{J}_\mp$
$J^2 |am\rangle = \hbar^2 a |am\rangle \quad J_z |am\rangle = \hbar m |am\rangle$

- aplikáciou $J_z(J_\pm |am\rangle)$ + komut dostaneme $J_\pm |am\rangle = C_\pm |am\pm1\rangle$
- $\hat{J}^2$ je poz. semidef $\Rightarrow a > 0$
- $\hat{J}^2 - \hat{J}_z^2 = \frac{1}{2}(J_+ J_+^+ + J_+^+ J_+) \Rightarrow a \geq m^2 \Rightarrow$ ex. $m_{max} \equiv j$
- aplikáciou $J_- J_+ |aj\rangle \Rightarrow a = j(j+1)$
- zároveň ex. aj $m_{min} = j'$ pričom $j' = -j$ a $j' + n - j \Rightarrow j = \frac{n}{2}$

$$\boxed{\begin{matrix} j = 0, \frac{1}{2}, 1, \dots & J^2 |jm\rangle = \hbar^2 j(j+1) |jm\rangle \\ m = -j, \dots, 0, \dots, j & J_z |jm\rangle = \hbar m |jm\rangle \end{matrix}}$$

$2j+1 \longrightarrow$

- $J_+^+ J_+ = J^2 - J_z^2 - \hbar J_z \Rightarrow C_\pm = \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)}$
- celočíselné patria orbitálnemu mom. hyb.
- poločíselné patria spinovému mom. hyb. → postulovaný v QM

Orbitálny mom.

- definovaný z klas. $\hat{\vec{L}} = \hat{\vec{x}} \times \hat{\vec{p}}$,
$\Rightarrow L_z = \hat{y}\hat{p}_x - \hat{x}\hat{p}_y \qquad \hat{L}^2 = \hat{x}^2 \hat{p}^2 - (\hat{\vec{x}} \cdot \hat{\vec{p}})^2 + i\hbar \hat{\vec{x}} \cdot \hat{\vec{p}}$

- v x-repr: (sférické súradnice)

$\hat{L}_z \psi(r, \vartheta, \varphi) = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi} \psi(r, \vartheta, \varphi)$

$\hat{L}^2 \psi(r, \vartheta, \varphi) = -\hbar^2 \nabla_{\vec{n}}^2 \psi(r, \vartheta, \varphi)$, kde $\nabla_{\vec{n}} = \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$

Spinový mom.

- postulovaný $\hat{\vec{S}}$ → bozóny celočíselný, fermióny poločís
- ∀ fund. častice majú spin = 1/2 (fermióny)
→ dve projekcie $|+\rangle, |-\rangle \rightsquigarrow$ Hilber. je izomorf $\mathbb{C}^2$

$\Rightarrow \hat{S}_i = \frac{\hbar}{2} \hat{\sigma}_i \qquad \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
↳ Pauliho matice v báze $|z+\rangle, |z-\rangle$

Skladanie mom. hybnosti

- dva momenty hybnosti $\vec{J}^{(1)}, \vec{J}^{(2)}$, $\mathcal{H} = \mathcal{H}^{(1)} \otimes \mathcal{H}^{(2)}$
→ ÚSKO $= \{J^{2(1)}, J_z^{(1)}, J^{2(2)}, J_z^{(2)}\}$
- celkový mom. hybnosti $\vec{J} = \vec{J}^{(1)} + \vec{J}^{(2)}$
- chceme prejsť do báze, kde ÚSKA $= \{J^2, J_z, J^{2(1)}, J^{2(2)}\}$
→ C–G koef = matice prechodu:

$$\boxed{|(j_1 j_2) JM\rangle = \sum C^{JM}_{j_1 m_1\, j_2 m_2} |j_1 m_1\rangle |j_2 m_2\rangle}$$

Častice ve sféricky sym. potenciály, atom vodíku

- sféricky sym. potenciál $V=V(r) \Rightarrow \hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(r)$
- $p^2 = \hat{p}_r^2 + \frac{1}{r^2}\hat{L}^2$, kde $\hat{p}_r^2 = \frac{-\hbar^2}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)$

$$\hat{L}^2 = \frac{-\hbar^2}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \overbrace{\frac{-\hbar^2}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}}^{L_z^2}$$

- riešenie napíšeme ako:

$$\psi(r,\vartheta,\varphi) = R(r)\,Y_{lm}(\vartheta,\varphi),$$

kde $L^2 Y_{lm}(\vartheta,\varphi) = \hbar^2 l(l+1)\,Y_{lm}(\vartheta,\varphi)$

a $L_z Y_{lm}(\vartheta,\varphi) = \hbar^2 m\,Y_{lm}(\vartheta,\varphi) \Rightarrow Y_{lm}(\vartheta,\varphi) \propto e^{im\varphi}$

→ riešením pre L^2 dostaneme: normalizace + fázová konvence

$$\boxed{\begin{gathered} Y_{lm}(\vartheta,\varphi) = C_l^m\, e^{im\varphi}\, P_l^m(\cos\theta) \\ P_l^m(\xi) = \frac{1}{2^l\, l!}\sqrt{(1-\xi^2)^m}\,\frac{d^{l+m}}{d\xi^{l+m}}(\xi^2-1)^l \end{gathered}}$$

- stačí vyriešiť radiálnu SchR $\boxed{\frac{-\hbar^2}{2mr^2}(r^2R')' + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2}R + V(r)R = ER}$

Atóm vodíku

- e^- v pol. protónu $\Rightarrow V(r) = -\overbrace{\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}}^{\gamma}\frac{1}{r} = -\frac{\gamma}{r}$
- substitúce:

$$\chi(r) = rR(r) \Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m}\chi'' + \left[\frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2} + V(r)\right]\chi = E\chi$$

- bez jednotiek: $r \to r' = \sqrt{\frac{8m|E|}{\hbar}}\,r = \frac{2r}{na_B}$, kde $a_B \approx 0{,}5$ Å
- asymptotika:

$$r\to 0 \quad \chi'' - \frac{l(l+1)}{r^2}\chi = 0 \Rightarrow \chi \to r^{l+1}$$
$$r\to\infty \quad \chi'' - \frac{1}{4}\chi = 0 \Rightarrow \chi \to e^{-\frac{r}{2}}$$

- riešenie je tvare $\chi(r) = w(r)\, r^{l+1} e^{-\frac{r}{2}}$

↳ rozvinutím do w(r) do rady a z podmienok na L^2 fci + asymptotiku

⇒ w(r) je konečný polynóm = Laguerrove polynomy: $L_{n-l-1}^{2l+1}(r)$

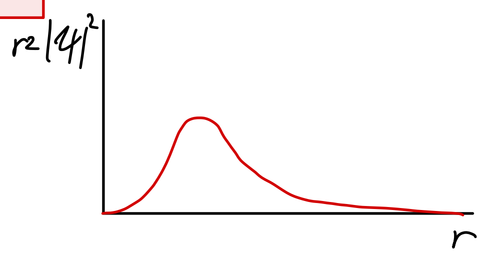
- z podm. konečnosti dostaneme $E_n = -\overbrace{Ry}^{13{,}6\,eV}\frac{1}{n^2}$, kde $n = 1,2,3,\dots$

a $l = 0,1,\dots,n-1$

$m = -l,\dots,l$

normalizace + fáz. konvence

- plné riešenie: $\boxed{R_{nl}(r) = C_{ln}\, L_{n-l-1}^{2l+1}\left(\frac{2r}{na}\right)\left(\frac{2r}{na}\right)^l e^{-\frac{r}{na}}}$
- základný stav: $\psi_{100}(r,\vartheta,\varphi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\,2\sqrt{\frac{1}{a^3}}\,e^{-\frac{r}{a}}$
- pre ťažšie jadro: $\boxed{E_n = -Ry\frac{Z^2}{n^2}}$



Častice v elmag. poli: Zeemanovo štepení, Larmorova prec.

• hamilt. pre častícu v elmag. poli:

$$\hat{H} = \frac{(\hat{\vec{p}} - q\vec{A})^2}{2m} + q\varphi = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{q^2A^2}{2m} - \frac{q}{2m}\vec{A}\cdot\hat{\vec{p}} - \frac{q}{2m}\hat{\vec{p}}\cdot\vec{A} + q\varphi$$

• v x-repr: $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + \underbrace{\frac{q^2A^2}{2m}}_{\text{zanedbáva sa pre slabé polia}} + i\hbar\frac{q}{m}\vec{A}\cdot\nabla - i\hbar\frac{q}{2m}\cancel{\nabla\cdot\vec{A}} + q\varphi$ — 0 v Coulomb. kalib.

• v prípade spinu treba pridať člen $-\vec{\mu}\cdot\vec{B} = -g\frac{e}{2m_e}\vec{S}\cdot\vec{B} = -\frac{e}{m_e}\vec{S}\cdot\vec{B}$

• relace k elmag. poli: $\vec{B} = \nabla\times\vec{A}$ $\quad \vec{E} = -\nabla\varphi - \partial_t\vec{A}$

Zeemanov efekt

• atóm vodíku vložíme do mag. poľa → dôjde k štiepeniu hladín

→ štiepenie hladín sa dá vysvetliť klasicky → cez elas. viazaný atom (Lorentz):

$\vec{B} = (0,0,B)$ $\qquad \vec{F} = (q\dot{y}B, -q\dot{x}B, 0)$

$$\Rightarrow \begin{aligned} m\ddot{x} + kx - q\dot{y}B &= 0 \\ m\ddot{y} + ky + q\dot{x}B &= 0 \\ m\ddot{z} + kz &= 0 \end{aligned} \quad\Rightarrow\quad \begin{aligned} x &\sim \cos(\omega_1 t) \\ y &\sim \sin(\omega_1 t) \\ z &\sim \cos(\omega_0 t) \end{aligned}, \text{ kde } \omega_1 \approx \pm\omega_0 - \frac{qB}{2m}$$

$$\Rightarrow \Delta E = \hbar\Delta\omega = \frac{\hbar qB}{2m}$$

• v QM → anomálni Zeeman, $\vec{B} = (0,0,B) = \text{konst} \Rightarrow \vec{A} = -\frac{1}{2}(yB, -xB, 0)$

$\Rightarrow \hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_1$, kde $\hat{H}_0 = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 - \frac{\gamma}{r}$ ← Coulomb ... voľný vodík

$$\hat{H}_1 = -\frac{eB}{2m_e}\hat{L}_z - \frac{eB}{m_e}\hat{S}_z = -\frac{eB}{2m_e}(\hat{L}_z + 2\hat{S}_z)$$

→ korekce 1. řádu energie:

$$\boxed{\Delta E = \langle nlm\, m_s|\hat{H}_1|nlm\, m_s\rangle = -\frac{e\hbar B}{2m_e}(m + 2m_s)}$$

→ sejme deg. v m-kách
→ pre dané l ostaní iba 2 hlad. deg.

Larmorova precese

• spin e^- v mag. poli: $\hat{H} = -\vec{\mu}\cdot\vec{B} = -\frac{e}{m_e}\hat{\vec{S}}\cdot\vec{B} = -\frac{eB}{m_e}\hat{S}_z$ $\quad \vec{B} = (0,0,B)$

→ v maticovej repr: $\hat{H} = -\frac{eB\hbar}{2m_e}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} \rightsquigarrow U(t) = \begin{pmatrix} e^{-i\omega t} & \\ & e^{i\omega t}\end{pmatrix}$ $\qquad \omega = \frac{eB\hbar}{2m_e}$ $\qquad E_\pm = \frac{eB\hbar^2}{2m_e}$

• časový vývoj obecného stavu: $|\psi(t)\rangle = \alpha e^{-i\omega t}|+\rangle + \beta e^{i\omega t}|-\rangle$

• pre stav. v poč. stave $|\psi(0)\rangle = |x+\rangle = (|+\rangle + |-\rangle)/\sqrt{2}$

$\Rightarrow |\psi(t)\rangle = (e^{-i\omega t}|+\rangle + e^{i\omega t}|-\rangle)/\sqrt{2}$

• pravd. najsť v $|x+\rangle$ v čase t: $|\langle x+|\psi(t)\rangle|^2 = \sin^2\frac{\omega t}{2}$

• stredné hodnoty S_x, S_y:

$\langle S_x\rangle = \hbar/2\cos\omega t$ $\qquad \langle S_y\rangle = \frac{\hbar}{2}\sin\omega t$ $\qquad \langle S_z\rangle = 0$

⇒ precese spinu okolo osy z

Systémy s viac časticami

- postulát o nerozliš. častic:

6 Stavový priestor nerozliš. identi. častíc $\begin{Bmatrix}\text{(bozónov)}\\ \text{(fermiónov)}\end{Bmatrix}$ je plne $\begin{Bmatrix}\text{sym.}\\ \text{asym.}\end{Bmatrix}$ voči výmene dvoch častí.

- prostor N nerozliš. častíc: $\mathcal{H}^{(N)} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_1$, kde $\mathcal{H}_1$ je prostor 1 čas.
- nech $\hat{C}|n\rangle = c_n|n\rangle$ je op. na $\mathcal{H}_1 \to \hat{C}^{(i)} = 1 \otimes \dots \otimes \hat{C} \otimes \dots \otimes 1$
- obecný stav n častíc: $|n_1 \dots n_N\rangle = |n_1\rangle \otimes \dots \otimes |n_N\rangle$
- projekční op. výmeny dvoch častíc: $\hat{P}_{ij}|n_1 \dots n_i \dots n_j \dots\rangle = |n_1 \dots n_j \dots n_i \dots\rangle$
- op. obecnej permutáce: $\hat{P}_\pi$, kde $\pi = \begin{pmatrix} 1 & \dots & N \\ i_1 & \dots & i_N \end{pmatrix}$ je perm. so znam. $(-1)^\pi$

- sym./asym. stav dostaneme pomocou projekčných op.

$$\hat{S} = \frac{1}{N!}\sum_\pi \hat{P}_\pi \to [\hat{S}, \hat{P}_\pi] = 0$$

$$\hat{A} = \frac{1}{N!}\sum_\pi (-1)^\pi \hat{P}_\pi \to \{\hat{A}, \hat{P}_\pi\} = 0$$

- obecný $\mathcal{H}^{(N)}$ môžeme zapísať ako $\mathcal{H}^{(N)} = \underset{\text{prostor bozónov}}{\hat{S}\mathcal{H}^{(N)}} \oplus \underset{\text{prostor fermiónov}}{\hat{A}\mathcal{H}^{(N)}} \oplus \underset{\text{neral. zbytek}}{\dots}$

- pr. 2 časticového systému: $|\Psi\rangle = |n_1 n_2\rangle \to |\Psi^S\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|n_1 n_2\rangle + |n_2 n_1\rangle)$

  ↳ 3 stavy pre bozóny, 1 pre fermióny $\quad |\Psi^A\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|n_1 n_2\rangle - |n_2 n_1\rangle)$

- ak by v jednom stave (rovnaké $\forall$ QM čísla) boli 2 fermióny, tak ich prehodenie by nebolo poznať, čo je ale sym.

  ⇒ Pauliho vylúč. princíp: V každom QM stave sa nachádza najviac 1 fermión

  ⇒ $(a^+)^2 = 0$

- obsadz. čísla → miesto sledovania konkrétnych stavov — # čas. v stave

$$|N_1 \dots\rangle = \sqrt{\frac{N!}{N_1! \dots}}\,\hat{S}|n_1 \dots n_N\rangle \qquad |N_1 \dots\rangle = \sqrt{N!}\,\hat{A}|n_1 \dots n_N\rangle$$

- Fockov prostor — variabilný # častíc

fermióny

$$a_n^+|N_1 \dots\rangle = (-1)^{N_1 + \dots + N_n}|N_1 \dots N_n + 1 \dots\rangle \qquad \{a_n, a_n^+\} = 1$$

bozóny

$$a_n^+|N_1 \dots\rangle = \sqrt{N_n + 1}\,|N_1 \dots N_n + 1 \dots\rangle \qquad [a_n, a_n^+] = 1$$

- 1 časticový op.: $\hat{C} = \sum_{m,n} \underset{\langle m|\hat{C}|n\rangle}{C_{mn}}\, a_m^+ a_n$

Hartree–Fock

→ metóda stredného poľa, kt. cíti 1 e^-

$$H = \sum_i h_{mn} a_m^+ a_n + \frac{1}{2}\sum_{klmn} v_{kl,mn}\, a_k^+ a_l^+ a_n a_m$$

$|\Psi\rangle = \hat{A}|\phi_1\rangle \dots |\phi_N\rangle$, že $\delta E[|\Psi\rangle] = 0$ (Slaterov. det)

↳ chceme previesť na 1 čas.

$$\hat{H}_{HF}|\phi_k\rangle = \hat{h}|\phi_k\rangle + \frac{1}{2}\sum_l \langle\phi_l|\hat{V}\big(|\phi_l\rangle|\phi_k\rangle - \overbrace{|\phi_k\rangle|\phi_l\rangle}^{\text{výmenný člen}}\big) = \epsilon_k|\phi_k\rangle$$

- x-repr:

$$\left(-\frac{\hbar^2\nabla^2}{2m} + V(r) + \overbrace{\frac{1}{2}\int v(\vec{r}-\vec{r}\,')\Big(\sum_l |\phi_l(\vec{r}\,')|^2\Big) d\vec{r}\,'}^{\text{stredné pole}}\right)\phi_k(\vec{r})$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_l \phi_l(\vec{r}) \int \phi_l^*(\vec{r}\,')\, v(\vec{r}-\vec{r}\,')\, \phi_k(\vec{r}\,')\, d\vec{r}\,' = \epsilon_k \phi_k(\vec{r})$$

← výmenný člen

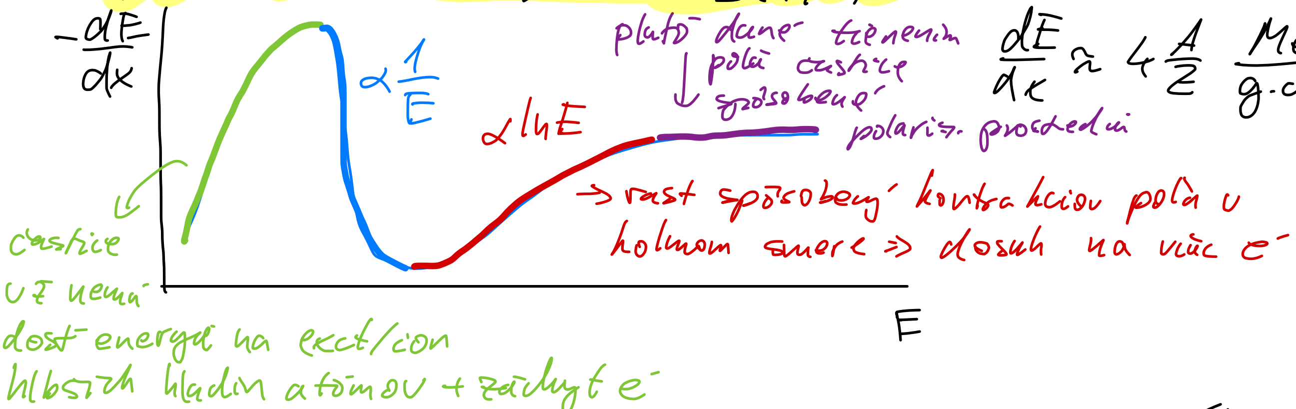
Jaderné záření

Interakce záření s látkou

Těžké nabité částice (proton, mión, ionty)

- mechanizmy interakce: excitace / ionizace, záchyt e^-, pružný rozptyl, polarizace
- straty energie excitací/ionizací sú dané Bethe-Blochovou formulí:

$$-\frac{dE}{dx} = \left(\frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 \frac{4\pi n z^2}{m_e c^2 \beta^2}\left[\ln\frac{2 m_e c^2 \beta^2}{\bar{I}(1-\beta^2)} - \beta^2 - \frac{U_0}{2} - \frac{\delta}{2}\right]$$



$$\frac{dE}{dx} \approx 4\frac{Z}{A}\ \frac{MeV}{g\cdot cm^{-1}}$$

- Braggova krivka – závislosť dep. E. v závislosti od hĺbky preniknutia:

→ najviac E deponované na konci svojho letu
→ využitie na presné zameranie dep. ion. žiarenia

Lehké nabité částice (e^-, e^+)

- mechanizmy: exct./ionizace, brzdné záření, Čerenkovo záření, prechodové ž.

→ častice sú brzdené poľami jadra → vyžarujú γ

$$E = E_0 e^{-\frac{x}{X_0}}$$

, kde X_0 je rad. dĺžka

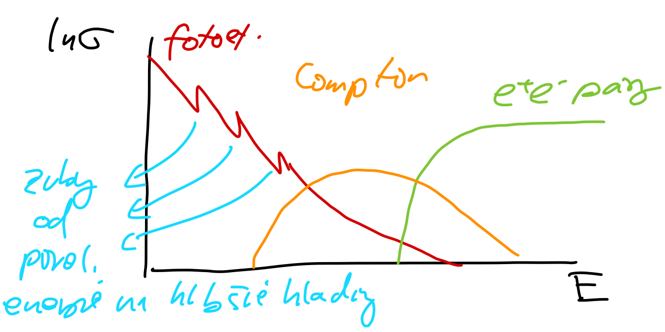
$$\left.\frac{dE}{dx}\right|_{brzd} \approx \frac{1}{m^2}$$

↳ dominuje v ľahkých

- excitace/ionizace ako Bethe-Bloch
- ČŽ pre rýchlosti väčšie ako rýchl. sv. v danom prostr. $\cos\theta = \frac{1}{\beta n}$

Gamma žiarenie

- fotoefekt → $\sigma \propto \frac{Z^5}{E^{3.5}}$
- Comptonov rozptyl → $\sigma \propto Z \ln E / E$
- tvorba e^+e^- párov → $\sigma \propto Z^2 \ln E$
  - ↳ iba v externom poli
  - ↳ prahová energia $E = 2m_e\left(1 + \frac{m_e}{m_x}\right)$



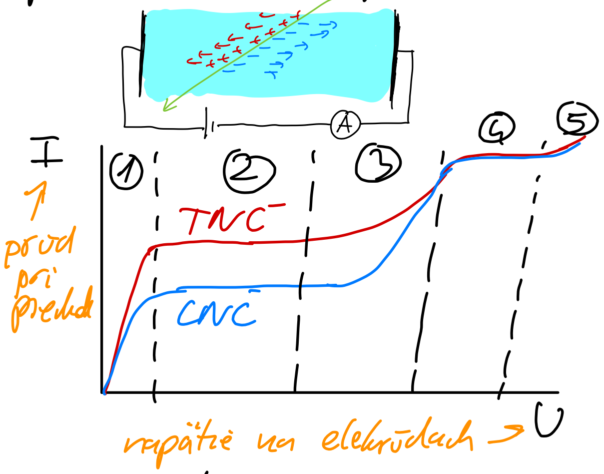
Spŕšky

→ kaskádovité množ. častíc
→ elmag. spŕška – tvorba e^+e^- párov a brzdné žiarenie
→ hadrónová spŕška – delenie a rozpad hadrónov, hlavne na $\pi^\pm, \pi^0$

Detekce a spektroskopie záření

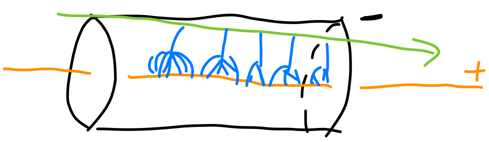
Ionizačné komory

- nabité častice ionizujú plyn → priloženým napätím sa odčerpá náboj → vzniknutý napäťový pulz je úmerný deponovanej energii
- počet vzniknutých párov: $N_{ion} = \frac{E}{\omega}$, kde $\omega \approx 30\,eV$ je energia na 1 pár

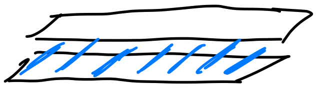


1. oblasť priamej úmery – Ohmický
   ↳ rekombinace skôr ako ∀ sa vyzbiera
2. ionizačná oblasť → ∀ náboj sa vyzbiera
3. prop. oblasť → ion e⁻ ionizujú ďalšie atómy → zosilnenie
4. Geigerova–Müllerova oblasť → prechod častice spôsobí výboj
5. stabilný výboj

- prop. komora → využitie geometrie a zosilnenia $\vec{E}$ v okolí tenkého drôtu → vznik kaskád e^- v okolí drôtu

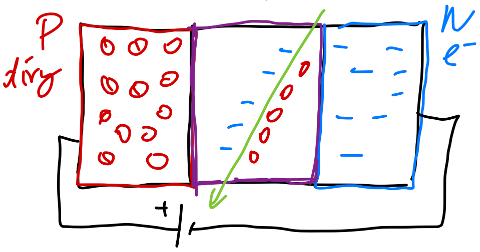


- mnohodrôtová prop. komora
  ↳ veľa drôtov na určené polohy

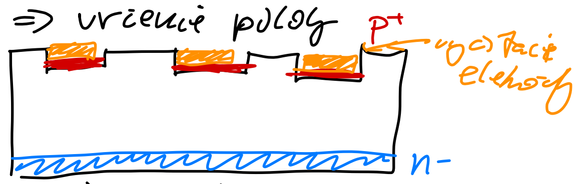


Polovodičové det.

- vytvorenie PN prechodu → pri prechode častice dôjde k vytvoreniu e^--díra párov → odčerpanie priloženým napätím v závernom smere



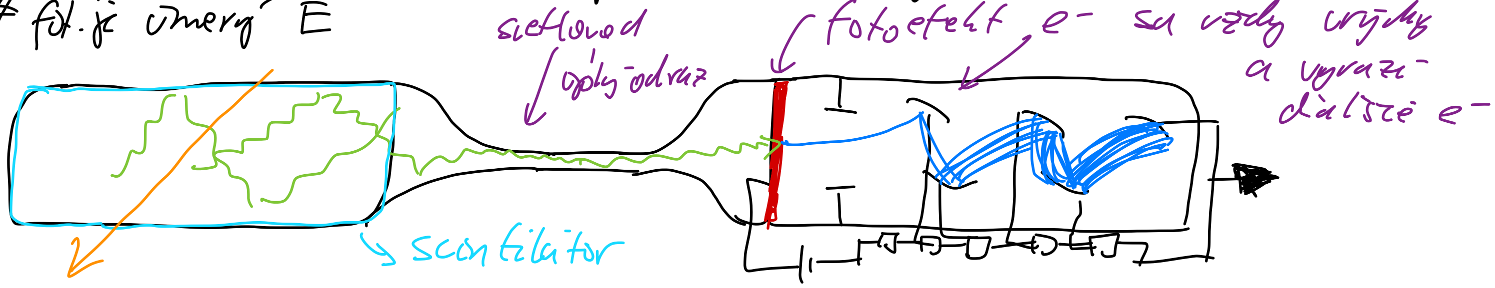
- energia na 1 pár ~ 3eV
- čo najväčšia oblasť medzi P a N → viac det.
- geom. dopingu ⇒ určenie polohy
  ↳ stripový det.:



- na spektroskopiu γ → HPGe (High-Purity Ge), chladené LN
  → vysoké Z pre konverziu γ na e^-
  → chladenie pre odstránenie šumu → presnejšia spektroskop.

Scintilačné detektory

- nab. častica excituje e^- molekuly → pri deexcitácii sa vyžiari vid. / UV svetlo
- to je následne svetlovodom (optické vlákna) odvedené do fotonásobiča, kde sa premení na signál
- # fot. je úmerný E



Využitie jadrového žiarenia

Biologické účinky žiarenia

• deštrukcia tkanive

dávka – množstvo dep E na 1kg ... $1\,Gy = 1\,J/kg$

ekvival. dávka – dávka vážená typov častíc ... $1\,Sv = 1\,Gy \cdot w$

w: $\gamma, e^{\pm}$ 1; $p, \pi^{\pm} = 2$; α, t.ión $= 20$; $n = \max 20$

efektívna dávka – zohľadnenie typov tkanive

• typy účinkov → stochastické – rakovina, zlyhanie srdca
→ deterministické – pre veľké dávky – ničenie tkanive, buniek

• pásma dávok → vysoká – nad 1 Gy → hasiči Chernobyl
→ stredná – 100 mGy - 1 Gy → sanačné práce Chernobyl
→ nízka – 10-100 mGy → CT scan, PET
→ veľmi nízka – pod 10 mGy → lietadlo, RTG

normálne: 3,4 mS/yr = 100 nSv/h

Využitie v medicíne

• RTG snímky
• CT scany → tiež X-ray
• PET → pozitrónová emisná tomografia
→ zavedenie β^+ žiariča do tela – ^{18}F + glukóza
→ nádory spotrebujú veľa glukózy → veľká konc. žiariča
→ e^+ anihiluje a vyžiari 2γ pod 180° → detekce

• ožarovanie nádorov: (ničenie tkaniva)

1) kobaltem $^{16}Co \to {}^{16}Ni + 2\gamma$ → γ sa nedajú smerovať / vhod. depon.

2) p^+ → urýchlené p^+, presná lokalizácia dávky
až do 240 MeV
→ problém so smerovaním zrážky

Uhlíkové datovanie

• rádioakt. uhlík vzniká v atm dopadom koz. žiarenia: $n + {}^{14}N \to {}^{14}C + p$
• dlhý polčas rozpadu $T_{1/2} \sim 6\,kyr$, $^{14}C \to {}^{14}N + e^- + \bar{\nu}_e$
• v atm je v danom čase daná koncentrácia ^{14}C
• živé bytosti požierajú uhlík → kým žijú je konc. $^{14}C \approx$ ako ^{12}C
• po smrti prestanú prijímať ^{14}C ⇒ z # ešte ex. ^{14}C sa dá určiť čas
• koncentrácia ^{14}C sa určí urýchlením častíc a pôsob. mag. poľom

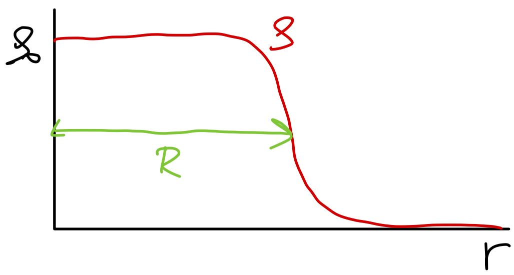
Atómové jadro

Základné vlastnosti a char. jadra

- jadro je zložené z nukleónov → protóny, ↳ neutróny
- # nukleónov A
- # protónov Z
- n, p majú cca rovnaké hmoty ⇒ jedna častica s rôznym izospinom I_3
  ↳ pre p je $I_3 = 1/2$, pre n je $I_3 = -1/2$
  ↳ celkový izospin jadra: $I_3 = \frac{1}{2} \cdot Z - \frac{1}{2}(Z-A)$
- hmotnosť jadra

$$M = m_p \cdot Z + m_n (Z-A) - \overbrace{B(A,Z)}^{\text{väzobná energia}}$$

- separačná energia – potrebná na separáciu 1 nukleónu
- spin – $\hat{S}_{p,n} + \hat{L}_{p,n}$ v jadre
- parita – sym./asym. jadra pri zámene 2 častíc
  – sudo-sudé jadrá: $J^P = 0^+$
- mag. moment $\vec{\mu} = X \mu_N \frac{\vec{S}}{|\vec{S}|}$ → smer spinu
  faktor, klad. či záp.
  ↳ mag. mom. nukleónu $\mu_N = \frac{e\hbar}{2m_p}$
- polomer jadra → empiricky $R \sim 1{,}2\,\mathrm{fm} \cdot A^{1/3}$
  ↳ daný hustotnou fci



- $\rho(x) = \dfrac{\rho_0}{1 + e^{\frac{(r-R)}{a}}}$
  a … určuje sklon
- iné druhy jadra majú iné hustotné fce

Kolektívne stavy

- jadro sa správa ako 1 objekt – celok
- z excitovaných stavov → vyžarovanie γ pri deexcitácii

Vibrace ~ 1 MeV

→ popis jako LHO
→ vibračné stavy dané fonónmi = bozón ⇒ kladná parita, celočís. spin
- kvadrupólové vibrace $J^P = 0^+, 2^+, 4^+$
- oktupólové vibrace $J^P = 0^+, 3^+$

→ dobre definované pre sudo-sudé jadrá
→ dipólové nesú – posun CMS

Rotace ~ 0,1 MeV

- iba deformované jadrá rotujú – nie sférický sym.
- hladiny škálujú ako $\sim \ell(\ell+1)$ ⇒ nesú elm. dist.
- v sudo-sudých jadier ⇒ rotačné pod vibračnými pásy

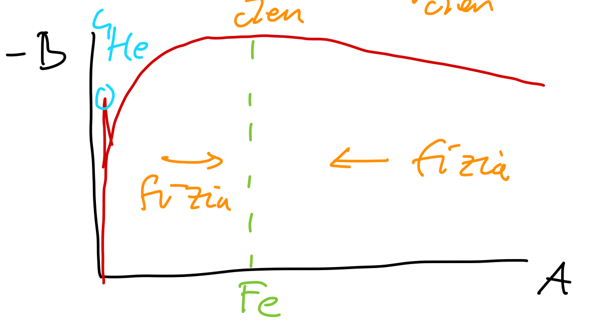
Jaderné síly, vazbová energie jadra

Kapkový model

- jadro popíšeme ako nestlačit. kapalinu:

$$B(A,Z) = \underbrace{a_r A}_{\text{objemový člen}} - \underbrace{a_s A^{2/3}}_{\text{povrchový člen}} - \underbrace{a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}}}_{\text{Coulombický člen}} - \underbrace{a_a \frac{(N-Z)^2}{A}}_{\text{asym. člen (pre väčšie jadrá} \Rightarrow \text{viac } n)} + \underbrace{\frac{\delta}{A^{3/4}}}_{\text{základný sudo-sudé jadra}}$$

δ: >0 pre s-s, $=0$ pre s-l, <0 pre l-l



Sloupkový model

- p, n majú zvlášť potenciál
- LHO aproximácia: $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 r^2 - V_0$

$\Rightarrow$ povolené energie $E = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$, kde $n = 2n_R + l$ (rad. kv. číslo: n_R)

					# stavov	Σ stavov
$n=0$ ...	$n_R=0$,	$l=0$,	$m=0$	$\rightarrow$	2×1	2
$n=1$ ...	$n_R=0$,	$l=1$,	$m=0,\pm1$	$\rightarrow$	2×3	8
$n=2$	$n_R=1$,	$l=0$	$m=0$	$\rightarrow$	2×1	20
	$n_R=0$,	$l=2$	$m=0,\pm1,\pm2$	$\rightarrow$	2×5	

$\Rightarrow$ magické čísla $\rightarrow$ určujú aký # nukleónov je stabilný: 2, 8, 20
↳ napr $^4_2$He $\rightarrow$ double magic

$\rightarrow$ pre $n>2$ treba zapnúť L-S väzbu:

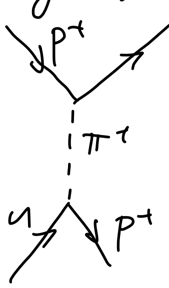
$$V_{L-S} \approx -20\,\text{MeV}\, A^{1/3}\, \vec{L}\cdot\vec{S}$$

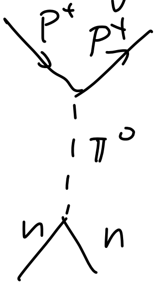
$\Rightarrow$ magické čísla: 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126
↳ $^{208}_{82}$Pb je double magic

Jaderné sily

- nukleony sú držané v jadre silnou interakciou
↳ zbytková jaderná int. $\rightarrow$ výmena $\pi^{0,\pm}$ $\rightarrow$ hmotné, krátkodosah

$m_\pi = 140$ MeV





- Yukawov potenciál $V(r) = -\frac{1}{r} e^{-\alpha m_\pi r}$
- Wood-Saxonov potenciál
$$V(r) = \frac{-V_0}{1 + e^{\frac{r-R}{a}}}$$

Rádioaktivita, jaderné reakce

• rádioaktivita → snaha jadier dostať sa na nižšiu energiu = stabilita
• rozpadový zákon: $N(t) = N(0)e^{-\lambda t}$ $\quad T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$ $\quad \tau = \frac{1}{\lambda}$
↳ aktivita žiariča $A(t) = -\frac{dN(t)}{dt} = N(0)\lambda e^{-\lambda t}$

α-rozpad

• uvoľnenie $^4_2He^{2+}$ jadra : $^A_ZX \to ^{A-4}_{Z-2}X + ^4_2He$
• hlavne ťažké prvky $A \gtrsim 150$
• energia α častíc: 4 - 6 MeV
• jednočast. rozpad ⇒ diskrétne spektrum
• 4 rozpadové rady → uránová, plutóniová, tóriová, aktíniová
→ potenciál pôsob. na α-časticu

→ α-častica pretuneluje cez potenciál
→ model jamy
→ odhad polčasu rozpadu:

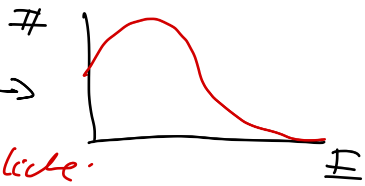
$$\log_2 \frac{1}{T_{1/2}} = -a_2 \frac{Z}{\sqrt{E_\alpha}} + a_3$$

β-rozpad

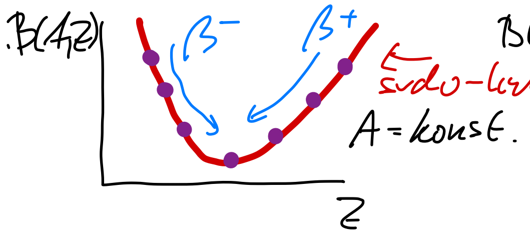
• 3 časticový rozpad: $p \to n + e^+ + \nu_e$
aj mimo jadra ← $n \to p + e^- + \bar{\nu}_e$ } v jadre
$p + e^- \to n + \nu_e$

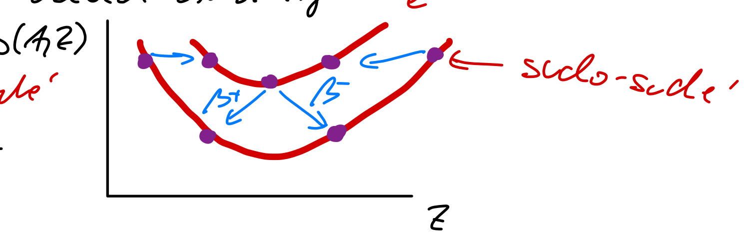
β^+
β^-
EC

→ 3 častice ⇒ spojité spektrum



• najčastejší je β^-
• mediátor je slabá interakcia → W bozón
• snaha dostať sa do údolia stability:





γ-rozpad

• deexcitácia jadra → vyžiarenie energ. γ ~MeV ⇒ čiarové spektrum
• nasleduje po β rozpadoch
↳ zväčša v kaskádach
• rýchle rozpady ~ fs

Jaderné reakce

• fúzia → zlučovanie jadier, spontánne dominuje pre Z < Fe
• štiepenie → rozpad jadier, —— || —— pre Z > Fe
↳ v Slnku ~pp cyklus ~25 MeV
~CNO cyklus ~25 MeV

Jadrové zdroje energie

Štiepne reakcie

→ využitie energie uvoľnenej pri rozpade ťažkých prvkov
→ v prírode sa vyskytuje urán
→ základný princíp reakcie

$$n + U \rightarrow \text{štiepne frag.} + 2\text{-}3\,n + 200\,MeV$$

→ z jednej reakcie ~ 200 MeV
→ účinný prierez σ klesá s energiou n ⇒ pomalé neutróny
• v prírode najčastejšie ^{238}U → potrebuje viac energie na štiepenie ⇒ rýchlejšie n ⇒ malé σ
→ treba obohacovať ^{235}U, kt. je vzácny → na 3-4%
• na spomaľovanie n → moderátor → materiál na ktorom sa n pomaly rozptýlia a predajú energiu ⇒ treba ľahké jadrá ⇒ H_2O, D_2O, parafín
• zo štiepnej reakcie viac n ⇒ treba pohltiť nadbytočné
⇒ regulátory → tyče, kt. sa zasunú do reaktora pre zníženie reaktivity - pohltia n
↳ najčastejšie duté tyče, kt. vytlačením vody zastavia moderovanie
↳ taktiež regulácia Bórom pri spúšťaní
• uvoľnená energia pri reakcii ohrieva vodu, kt. sa premení v parogenerátoroch na paru a tá roztáča turbínu

Fúzne reakcie

• ľahké jadrá sa zlučujú → dochádza k uvoľneniu energie
↳ snaha dopracovať sa k železu Fe, kt. je stabilné voči fúzii aj štiepeniu
• výroba všetkých prvkov vo vesmíre od Li po Fe
• 2 najčastejšie cykly výroby He → CNO cyklus kde C, N, O sú katalyzátory, E ~ 25 MeV
→ pp cyklus, E ~ 25 MeV
• potreba aby jadrá boli blízko seba
↳ vo hviezdach vďaka gravitácii + tunelovanie (vďaka veľkému objemu)
• na Zemi 2 typy fúznych reaktorov
1) magnetické udržanie (Tokamak) → magnetmi sa udržuje plazma
2) inerciálne udržanie → strieľanie laserom na malé kapsule

• tokamak ITER → medzinárodný projekt vo Francúzsku
↳ snaha o realizáciu kladného zisku energie
→ reakcie:
1) $^2_1H + ^3_1H \rightarrow ^4_2He + n$ ~ 17,6 MeV
2) $p + ^7_3Li \rightarrow ^4_2He + ^4_2He$ ~ 17 MeV

Častice

Fundamentálni častice

• Štandardný model časticovej fyziky:

	Fermióny I.	II.	III.	q
kvarky	u	c	t	$+\frac{2}{3}$
	d	s	b	$-\frac{1}{3}$
leptóny	e	μ	τ	-1
	ν_e	ν_μ	ν_τ	0

Bozóny

vektorové
γ
g
W
Z

skalárny
H

• kvarky – interagujú slabo, silne, elmag
– viazané silnou int. do hadrónov
– nevyskytujú sa voľné
– 2 druhy náboja $+\frac{2}{3}$, $-\frac{1}{3}$
– v prírode najčastejšie iba u, d
↳ ostatné sa rýchlo rozpadajú
– t kvark – najťažšia známa častica $m_t = 175$ GeV

• leptóny → nabité leptóny = e, μ, τ majú náboj -1
→ interagujú slabo a elmag
→ stabilný iba e^-
→ μ^- z kozmického žiarenia

neutrína – interagujú iba slabo ⇒ ťažko zastaviť a detekovať
– 3 rodiny, nevieme ešte známe presné hmoty
– oscilácie – vl. stavy hmot. sú iné ako rodiny
↳ CP narušenie slabej interakcie

zo Slnka, reaktorov, z kozmického žiarenia

• vektorové bozóny – mediátory síl, spin 1
1) elmag interakcia – fotón γ, nehmotný, 2 polarizácie
2) silná interakcia – gluóny, nehmotné
– majú farebný náboj → viažu sa sami na seba
3) slabá interakcia – hmotné bozóny, $m_W = 85$ GeV, $m_Z = 91$ GeV
nabité $W^\pm$ bozóny = nabité prúdy
neutrálne Z^0 bozóny = neutrálne prúdy

• Higgsov bozón – skalárny bozón, skalárne pole
– Higgsov mechanizmus ⇒ dáva hmoty časticiam
– väzba na Higgsa $\propto$ hmota častice

Rozpady

$W \to l\,\nu_e,\ q\bar{q}'$ → kvarky iného druhu, napr. $W^+ \to u\bar{d}$
$Z \to l\bar{l},\ q\bar{q},\ \nu_e\bar{\nu}_e$
$H \to \gamma\gamma,\ WW,\ ZZ,\ b\bar{b}$
$t \to W b$

Hadróny

- viazané stavy kvarkov → mezóny = kvark - antikvark
  ↘ baryóny = 3 kvarky
- farebne neutrálne
- kvarky sú držané silnou silou → mediátor sú gluóny
- najľahšie kvarky u, d, s
  ↳ pióny: $\pi^+ = u\bar{d}$, $\pi^- = \bar{u}d$, $\pi^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} + d\bar{d})$

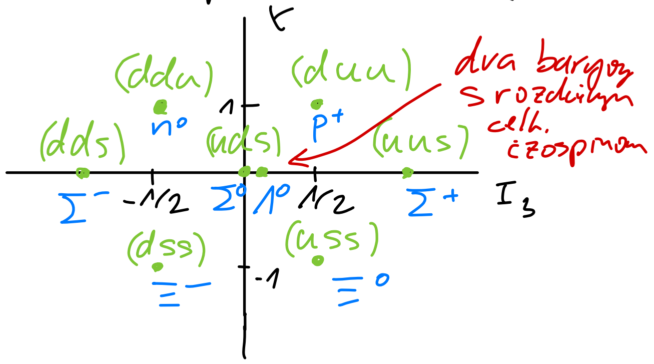
→ pokiaľ môžu sa rozpadajú silnou interakciou

→ pióny sú najľahšie: $\pi^\pm \to \mu^\pm + \bar{\nu}_\mu$ slabá interakcia $W^\pm$

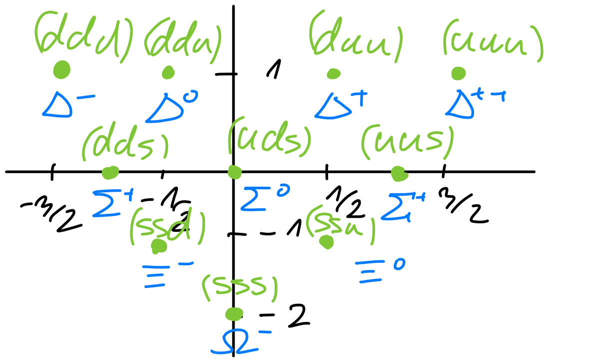
$\pi^0 \to 2\gamma$ elmag interakcia (rýchlejšia ako $\pi^\pm$)

- kaóny → zložené z s-kvarku: $K^+ = \bar{s}u$, $K^0 = s\bar{d}$
  $K^- = s\bar{u}$, $\bar{K}^0 = \bar{s}d$
- 1 kvark nesie 1 farbu (r, g, b) ⇒ ďalšie kvantové číslo
- z 3 kvarkov vieme vyskladať 1 dekuplet a 1 oktuplet baryónov
  ↳ dané rozkladom grupy: $3\otimes 3\otimes 3 = 10 \oplus 8 \oplus \cancel{8} \oplus \cancel{1}$
- izospin $I_3(u) = \frac{1}{2}$, $I_3(d) = -\frac{1}{2}$
- podivnosť $S(s) = -1$
- hypernáboj: $Y = S + B$, kde $B(u) = B(d) = B(s) = \frac{1}{3}$ je baryónové číslo
  ↳ pre antikvarky je $-1/3$

oktuplet spin $= \frac{1}{2}$



dekuplet spin $= \frac{3}{2}$



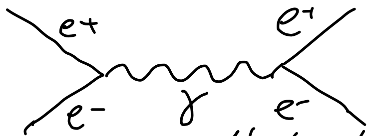
- mezóny dostaneme vyskladaním $3\otimes\bar{3} = 8\oplus 1$

- J/ψ → baryón obsahujúci c-kvark
- b-hadróny ⇒ b-kvark
- t-kvark je najťažší ⇒ netvorí hadróny, rozpadá sa

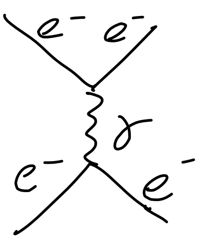
Základné interakcie medzi časticami; zákony zachovania

Elmag interakcia

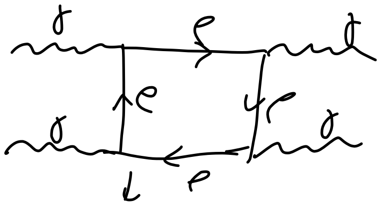
- mediátor je fotón
- kvarky, μ, e, τ interagujú elektromagneticky



- sú dané Abelovská Lieovou grupou $U(1)$ → fotón nemá náboj
- pre častice, kt. sú ďaleko od seba → neinteragujú → vhodné na poruchový rozvoj



← rozptyl e⁻

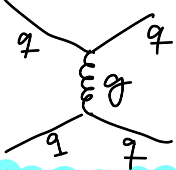


interakcia γγ → 4 rád poruchovej teórie - málo pravd., ale namerané

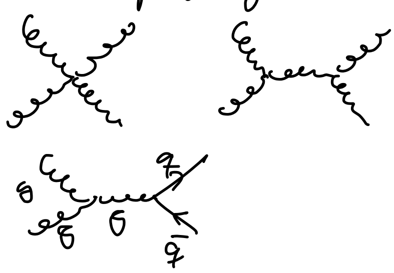
Silná interakcia

- mediátory sú gluóny
- interagujú len kvarky
- Lieova grupa je $SU(3)$ → nekomutatívna ⇒ gluóny majú farebný náboj
- farebný náboj → 3 farby r, g, b
  → pre antičastice $\bar{r}, \bar{g}, \bar{b}$
- gluón má 2 náboje, napr., $r\bar{g}$
- najčastejšie interakcie:

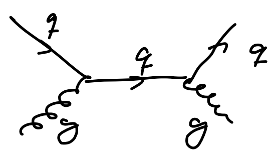
rozptyl kvarkov



rozptyl gluónov



rozptyl kvarku a gluónu



Slabá interakcia

→ všetky fermióny interagujú
→ hmotné $W^\pm, Z^0$ bozóny → krátky dosah
→ elektroslabá interakcia → $W^\pm$ má elmag náboj
→ napr. pri β rozpadoch: $n \to W^- + p \to p + e^- + \bar{\nu}_e$

Zákony zachovania

	elmag	silná	slabá
B, L	✓	✓	✓
K, S	✓	✓	✗
C	✓	✓	✗
P	✓	✓	✗
CP	✓	✓	✗
CPT	✓	✓	✓

L... leptónové číslo

- C symetria → zámena častice - antičastice
- P symetria → parita, prostorová inverze (otočenie spinov)
- T symetria → časová inverze

→ existujú iba pravotočivé (smer spinu) antineutrína
→ existujú iba ľavotočivé neutrína
→ oscilace neutrín, oscilace kaónov

- CP symetria = vymenenie čas - antičas. + prost. inverze

Veľké experimenty

LHC → Large Hadron Collider, CERN
→ urýchľuje p+p až do 6,5 TeV
→ detektory : ATLAS, CMS → viacúčelové
ALICE → ťažké ióny, kvark-gluónová plazma
LHCb → fyzika b-kvarku

• objav Higgsa : $H \to \gamma\gamma$ v CMS, $H \to WW \to \ell\bar{\ell}\nu_\ell\bar{\nu}_\ell$

SuperKeKB → e^+e^- v Japonsku
→ štúdium CP narušenia, b-kvarky
→ Belle II detektor

• objav → $W \to \ell\bar{\nu}_\ell$, $Z \to \ell\ell$ } SPS (predchodca LHC)
$t\bar{t} \to bbWW$ → Tevatron (Fermilab, USA)

ATLAS

• viacúčelový detektor
• základné komponenty:

1) **tracker** – meranie polohy zakrivovaním dráhy v solenoidálnom poli
– pixelové detektory, stripové detektory → polovod.
– driftové trubice → trubičky plnené plynom → ionizácia

2) **elmag. calo** – kalorimeter na meranie energií $e^\pm, \gamma$
– postavený tak aby sa v ňom $e^\pm, \gamma$ zastavili
– tekutý argón na ionizáciu LAr → detekcia
↳ prekladaný vrstvami Pb na rozvoj spŕšok

3) **hadrónový calo** – kalorimeter na meranie energie hadrónov
– hadróny v ňom deponujú najviac E + rozvíjajú spŕšky
– TileCal – Fe na zastavenie, rozvíjanie spŕšok
→ scintilátory na meranie energie

4) **miónové komory** – mióny preniknú calo → stačí zmerať polohu a porovnaním s trackerom sa zo zakrivenia určí energia → ionizačné komory

Detekcia neutrín

• neutrína interagujú iba slabo najčastejšie $\begin{cases} \nu_\ell + n \to \ell^- + p \\ \bar{\nu}_\ell + p \to \ell^+ + n \end{cases}$
• veľké objemné nádrže na zvýšenie pravd. detekcie
• najčastejšie plnené vodou ako zdroj n, p
• vo vode je rozpustený tekutý scintilátor, ktorý začne blikať keď tade prechádza lepton z rozpadu
→ dookola sú fotonásobiče
• Super Kamiokande, Hyper Kamiokande → Japonsko, meranie oscilácií
• Ice Cube – v Antarktíde → v ľade interagujú ⇒ do ľadu sa vyvŕtali diery, do ktorých sa dali scintilátory