Lineární algebra II (pro fyziky)

Kvadriky

Dalibor Šmíd

MFF UK

V ZS jsme zavedli pojem afinního podprostoru vektorového prostoru V jako množinu $a + W$, kde $a \in V$ a $W \leq V$. Podprostor W se nazývá zaměření afinního podprostoru. Důležitý příklad je *aritmetický afinní prostor*

$$A_n := \{\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{F}^{n+1} | \tilde{\mathbf{x}} = (1, x_1, \ldots, x_n)^T\}$$

se zaměřením $V_n := \{\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{F}^{n+1} | \tilde{\mathbf{x}} = (0, x_1, \ldots, x_n)^T\}$. Složky vektoru $\tilde{\mathbf{x}}$ číslujeme od nuly, takže A_n je také možno popsat rovnicí $\tilde{x}_0 = 1$ nebo blokovým zápisem

$$A_n = \left\{ \tilde{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{x} \end{pmatrix} \middle| \mathbf{x} \in \mathbb{F}^n \right\}$$

Aritmetický afinní prostor je vhodná struktura, uvnitř níž se dají studovat přímky, roviny atd. neprocházející počátkem, ale také kuželosečky a další kvadratické křivky. Nejprve ale na A_n potřebujeme zavést analogie některých konstrukcí na vektorových prostorech.

Jak A_n, tak V_n lze přirozeně identifikovat s množinou $\mathbb{F}^n$:

$$\begin{aligned} \iota_A : & \mathbb{F}^n \to A_n \\ & \mathbf{a} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{a} \end{pmatrix} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \iota_V : & \mathbb{F}^n \to V_n \\ & \mathbf{x} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{x} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Prvky prvního typu označujeme jako *body* a druhého jako *vektory*. Pro lepší odlišení bodů a vektorů budeme u bodů užívat hranaté závorky, netučný font a obvykle i písmena ze začátku abecedy:

$$a \equiv \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \iota_A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} \equiv \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \iota_V^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Rozdíl dvou prvků A_n je prvkem V_n a prostřednictvím bijekcí ι_A, ι_V lze tuto operaci přenést i na odpovídající prvky $\mathbb{F}^n$:

$$a - b := \iota_V^{-1}(\iota_A(a) - \iota_A(b)), \text{ tj. } \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ \vdots \\ a_n - b_n \end{pmatrix}$$

Podobně součet bodu a vektoru je

$$a + \mathbf{x} := \iota_A^{-1}(\iota_A(a) - \iota_V(\mathbf{x})), \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + x_1 \\ \vdots \\ a_n + x_n \end{bmatrix}$$

Na vektorech jsou samozřejmě definovány i součet a násobek skalárem.

Afinní přímka spojující body a, b se dá popsat jako množina

$$\{a + \lambda(b - a) | \lambda \in \mathbb{F}\}$$

Výraz $a + \lambda(b - a)$ lze formálně přepsat i jako $(1 - \lambda)a + \lambda b$. Ačkoli na bodech součet ani násobek skalárem nedefinujeme, výraz $\mu\, \iota_A(a) + \lambda\, \iota_A(b)$ smysl dává a pro $\mu + \lambda = 1$ je ι_A-obrazem nějakého bodu. Obecně se výrazy typu

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_k a_k,$$

kde a_i jsou body a λ_i skaláry splňující $\sum_1^k \lambda_i = 1$, označují jako *afinní lineární kombinace* bodů. Množina všech afinních LK bodů $a_1, \ldots, a_k$ je vlastně $\iota_A^{-1}(\, \langle \iota_A(a_1), \ldots, \iota_A(a_k) \rangle \cap A_n\,)$ - pokud si odmyslíme bijekci ι_A, průnik A_n a podprostoru generovaného $a_1, \ldots, a_k$. Podobně průnik nadroviny $\{\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{F}^{n+1} | r_0 x_0 + \ldots + r_n x_n = 0\}$ a (rovněž nadroviny) A_n je afinní nadrovina $\{x \in \mathbb{F}^n | r_0 + r_1 x_1 + \ldots + r_n x_n = 0\}$.

Pro přehlednější zápis již nebudeme rozlišovat mezi A_n a $\iota_A^{-1}(A_n)$, resp. V_n a $\iota_V^{-1}(V_n)$. Na $V_n \equiv \mathbb{F}^n$ uvažujme standardní skalární součin a jeho normu.

Definice

Nechť $a, b \in A_n$. Pak *vzdálenost* $\rho(a, b)$ těchto bodů definujeme jako $\|b - a\|$, tj. velikost vektoru $b - a \in V_n$.

Prostor A_n s takto definovanou funkcí ρ splňuje axiomy *metrického prostoru* ♣ a nazývá se euklidovský prostor E_n.

Lemma

Nechť $\tilde{A} \in \mathbb{F}^{n+1 \times n+1}$. Pak $F_{\tilde{A}}$ zachovává A_n a V_n, právě když

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{o}^T \\ \mathbf{r} & A \end{pmatrix},$$

kde $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$, $\mathbf{r} \in \mathbb{F}^n$. Navíc $F_{\tilde{A}}$ zachovává vzdálenost mezi body A_n, právě když je A unitární matice.

Zobrazení $F_{\tilde{A}}$ zúžené na A_n má pak ♣ tvar $a \mapsto Aa + \mathbf{r}$ a nazývá se *afinní zobrazení*, v případě A unitární pak *izometrie*.

Soustava souřadnic v A_n je dvojice $S = (p, B)$, kde $p \in A_n$ a B je báze V_n. Bod p je její *počátek* a S se nazývá *ortogonální/ortonormální*, právě když je OG/ON báze B.
Pro $S' = (p', B')$ další soustavu souřadnic, $B' = (\mathbf{v}_i')_1^n$, $B = (\mathbf{v}_i)_1^n$ a $a \in A_n$ existují jednoznačně určené $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \mathbb{F}^n$, že

$$a = p + \sum_{j=1}^{n} x_j \mathbf{v}_j = p' + \sum_{i=1}^{n} x_i' \mathbf{v}_i'$$

Značíme $[a]_S = \mathbf{x}$, $[a]_{S'} = \mathbf{x}'$. Je-li $U = [\mathrm{Id}]^B_{B'}$, pak

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \mathbf{v}_j = (p' - p) + \sum_{i=1}^{n} x_i' \sum_{j=1}^{n} u_{ji} \mathbf{v}_j$$

a zapíšeme-li dále $p' - p = \sum_{j=1}^{n} r_j \mathbf{v}_j$, tedy $[p' - p]^B = \mathbf{r}$, máme

$$\forall j : x_j = r_j + \sum_{i=1}^{n} u_{ji} x_i', \text{ neboli } \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{o}^T \\ \mathbf{r} & U \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{x}' \end{pmatrix}$$

Kvadrika je podmnožina reálného A_n popsaná rovnicí

$$\begin{pmatrix}1 & \mathbf{x}^T\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c & \mathbf{b}^T\\ \mathbf{b} & A\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ \mathbf{x}\end{pmatrix} \equiv \mathbf{x}^T A\mathbf{x} + 2\mathbf{b}^T\mathbf{x} + c = 0,$$

kde $c \in \mathbb{R}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ a $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symetrická jsou bloky matice označené $\tilde{A}$. Kvadrika je *regulární*, pokud je regulární matice $\tilde{A}$. Definujme kvadratickou formu $Q_g(\tilde{\mathbf{x}}) := \tilde{\mathbf{x}}^T\tilde{A}\tilde{\mathbf{x}}$, pak je kvadrika rovna průniku nulové množiny N_g s A_n. Vyjádření Q_g vzhledem k jiné soustavě souřadnic změní matici formy na

$$\begin{pmatrix}1 & \mathbf{r}^T\\ \mathbf{o} & U^T\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c & \mathbf{b}^T\\ \mathbf{b} & A\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \mathbf{o}^T\\ \mathbf{r} & U\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}c' & \mathbf{b}'^T\\ \mathbf{b}' & U^T AU\end{pmatrix},$$

kde $c' = c + 2\mathbf{b}^T\mathbf{r} + \mathbf{r}^T A\mathbf{r}$ a $\mathbf{b}' = U^T(\mathbf{b} + A\mathbf{r})$. Zvolme U tak, aby $U^T AU =: D \equiv \mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_n)$ byla diagonální. Je-li navíc A regulární (taková kvadrika se nazývá *středová*), pak volbou $\mathbf{r} = -A^{-1}\mathbf{b}$ převedeme na diagonální tvar i celou $\tilde{A}$. Po dosazení navíc $c' = c - \mathbf{b}^T A^{-1}\mathbf{b}$.

VĚTA

Je-li $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} + 2\mathbf{b}^T\mathbf{x} + c = 0$ *regulární středová kvadrika taková, že signatura matice* A *je* $(p, q, 0)$ *a* $C := \frac{\det \tilde{A}}{\det A}$, *pak pro*

- $q = 0 \wedge C < 0$ *nebo* $p = 0 \wedge C > 0$ *je to elipsoid,*
- $q = 0 \wedge C > 0$ *nebo* $p = 0 \wedge C < 0$ *je to prázdná množina,*
- $p \neq 0 \wedge q \neq 0$ *je to hyperboloid.*

DŮKAZ.

Matice $\tilde{A}$ přejde po diagonalizaci na tvar $\mathrm{diag}(c', d_1, \ldots, d_n)$, přičemž součin $c'd_1 \ldots d_n$ má stejné znaménko jako $\det \tilde{A}$ a součin $d_1 \ldots d_n$ má stejné znaménko jako $\det A$ ♣. Tedy i c' má stejné znaménko jako C. Pokud $q = 0$ a $C < 0$, lze vůči nové soustavě souřadnic zapsat rovnici kvadriky jako

$$1 = \frac{d_1}{-c'} x_1'^2 + \ldots \frac{d_n}{-c'} x_n'^2$$

To je skutečně rovnice elipsoidu. Ostatní případy ♣. □

Z čísel $\frac{d_i}{-c'}$ obecně nelze určit délky poloos, protože změna souřadnic $\mathbf{x} = U\mathbf{x}' + \mathbf{r}$ může změnit vzdálenosti. Pokud je U ortogonální, je odpovídající afinní zobrazení izometrie, matice $U^T A U$ je ortogonální diagonalizací matice A a $C = c'$ ♣. Tedy délky poloos lze vyjádřit pouze pomocí vlastních čísel A a determinantu $\tilde{A}$, jejich směry jako vlastní vektory A a střed kvadriky jako $-A^{-1}\mathbf{b}$ ♣.

Pro nestředovou regulární kvadriku musí být $\operatorname{rank} A = n - 1$ ♣, tedy $D = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_{n-1}, 0)$, kde d_i jsou nenulové. Protože

$$\mathbf{b}' \equiv U^T(\mathbf{b} + A\mathbf{r}) = U^T\mathbf{b} + DU^{-1}\mathbf{r} \equiv \mathbf{b}'' + D\mathbf{r}'',$$

lze volbou $(U^{-1}\mathbf{r})_i \equiv r_i'' := -\frac{1}{d_i} b_i''$ vynulovat všechny složky $\mathbf{b}'$ až na tu poslední.

Volbou r''_n lze ♣ pak vynulovat i levý horní roh a získat matici ve tvaru

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathbf{o}^T & b''_n \\ \mathbf{o} & D'' & \mathbf{o} \\ b''_n & \mathbf{o}^T & 0 \end{pmatrix},$$

kde $D'' = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_{n-1})$. Příslušná kvadrika pak má rovnici

$$\sum_{i=1}^{n-1} d_i x_i'^2 + 2b''_n x'_n = 0$$

a je to paraboloid. *Směr jeho osy* je definován jako vlastní podprostor matice A s vlastním číslem 0, tedy jako $\operatorname{Ker} A$, *vrchol* jako bod popsaný v čárkovaných souřadnicích vektorem $\mathbf{x}' = \mathbf{o}$. Délky poloos lze určit (pro U ortogonální) z $d_1, \ldots, d_{n-1}$ a b''_n, neboli s pomocí vlastních čísel A a determinantu $\tilde{A}$.

Tím jsme dokončili tzv. *metrickou* a *afinní klasifikaci* regulárních kvadrik. V případě singulárních je to podobné, jen je mnohem více dílčích případů.

Příkladem budiž kuželosečka s rovnicí

$$3x^2 - 10xy + 3y^2 + 14x - 2y + 3 = 0$$

Přepišme levou stranu maticově jako

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 7 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 3,$$

tj. $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} + 2\mathbf{b}^T\mathbf{x} + c$, a dále jako

$$\begin{pmatrix} 1 & x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 7 & -1 \\ 7 & 3 & -5 \\ -1 & -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

Protože sign $A = (1, 1, 0)$ a velká 3×3 matice $\tilde{A}$ je regulární, jedná se o hyperbolu ♣. Ortogonální diagonalizací matice A můžeme najít matici U a následně doplněním na čtverec vektor $\mathbf{r}$, pomocí nichž určíme souřadnou soustavu, vzhledem k níž je kuželosečka v kanonickém tvaru, a z tohoto tvaru určit délky jejích poloos ♣.