I. MECHANIKA

6. Kmity a vlnění I

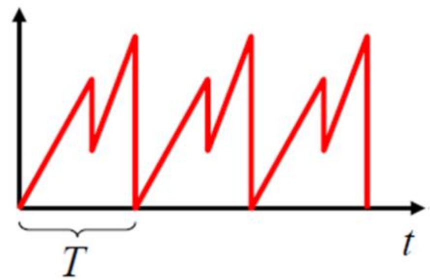
Obsah

- Harmonické kmity (význačná forma pohybu, příklady, výchylka, perioda, frekvence, kruhová frekvence).
- Harmonický oscilátor.
- Netlumené harmonické kmity (matematický popis, komplexní notace, fázor).
- Tlumené kmity, aperiodický pohyb, mezní aperiodický pohyb, slabé tlumení.
- Vynucené kmity, rezonance.
- Princip superpozice.
- Skládání kmitů stejného směru, harmonická analýza.
- Skládání navzájem kolmých kmitů, Lissajousovy obrazce.
- Vázané oscilátory.

Periodický děj

periodický průběh sledované veličiny (mechanická výchylka, elektrická veličina)

$$X(t+T) = X(t)$$



T ... perioda

$f = \frac{1}{T}$ ... frekvence

$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$ ... kruhová (úhlová) frekvence

Příklady:

- závaží na pružině
- kyvadlo
- kmity elementů struny
- oscilační LC obvod
- vibrace atomů v molekule nebo krystalu

(Lineární) harmonický oscilátor

- uvažujeme mechanický oscilátor – přímočarý pohyb v okolí bodu x_0
- interakce charakterizovaná parabolickým průběhem potenciální energie

$$E_p = \frac{1}{2}k(x - x_0)^2$$

- kde vazební konstanta $k > 0$
- vratná síla působící do počátku $F = -\frac{dE_p}{dx} = -k(x - x_0)$
- vratná síla je úměrná výchylce a působí ve směru proti ní
- pohybová rovnice $m\frac{d^2x}{dt^2} = -k(x - x_0)$
- závaží na pružině – při zanedbatelné vlastní hmotnosti pružiny
- kyvadlo – jen malé kmity
- obecné řešení $x = A\sin(\omega t + \alpha) + x_0$

A ... amplituda
α ... počáteční fáze
x_0 ... výchozí poloha

jak se takové rovnice řeší?

Homogenní lineární diferenciální rovnice 2. řádu s konstantními koeficienty

rovnice typu $a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$

řešení mají tvar $y = e^{\alpha x}$

protože $y' = \alpha e^{\alpha x}$ a $y'' = \alpha^2 e^{\alpha x}$

má platit $(a_2 \alpha^2 + a_1 \alpha + a_0) e^{\alpha x} = 0$

charakteristická rovnice $a_2 \alpha^2 + a_1 \alpha + a_0 = 0$

kořeny char. rovnice α_1 a α_2

<u>fundamentální systém řešení (báze):</u>

- α_1 a α_2 jednoduché kořeny $e^{\alpha_1 x}$ a $e^{\alpha_2 x}$
- α dvojný kořen $e^{\alpha x}$ a $x e^{\alpha x}$
- pro reálné koeficienty kořeny komplexně sdruženy $e^{(\gamma + i\delta)x}$ a $e^{(\gamma - i\delta)x}$
- pak lze použít bázi $e^{\gamma x} \cos \delta x$ a $e^{\gamma x} \sin \delta x$

(vzniklo na základě obecnějších pravidel pro homogenní lineární diferenciální rovnice *n*. řádu s konstantními koeficienty)

(Netlumené) harmonické kmity - řešení

řešíme pohybovou rovnici $$m\frac{d^2x}{dt^2} = -k(x - x_0)$$

případná substituce $x - x_0 \to x$

pohybová rovnice (výše popsaného typu) $m\ddot{x} + kx = 0$

charakteristická rovnice $m\alpha^2 + k = 0 \to \alpha = \pm\sqrt{-\frac{k}{m}} = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}}$

fundamentální systém (α_1 a α_2 jednoduché) $e^{i\sqrt{\frac{k}{m}}t}$ a $e^{-i\sqrt{\frac{k}{m}}t}$

případně $\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t$ a $\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t$

obecné řešení $$x = C_1 e^{i\sqrt{\frac{k}{m}}t} + C_2 e^{-i\sqrt{\frac{k}{m}}t} = D_1 \cos\sqrt{\frac{k}{m}}t + D_2 \sin\sqrt{\frac{k}{m}}t$$

víme $e^{\pm i\varphi} = \cos\varphi \pm i\sin\varphi$ $\qquad D_1 = C_1 + C_2$ a $D_2 = i(C_1 - C_2)$

hodnoty konstant se určí podle počátečních podmínek

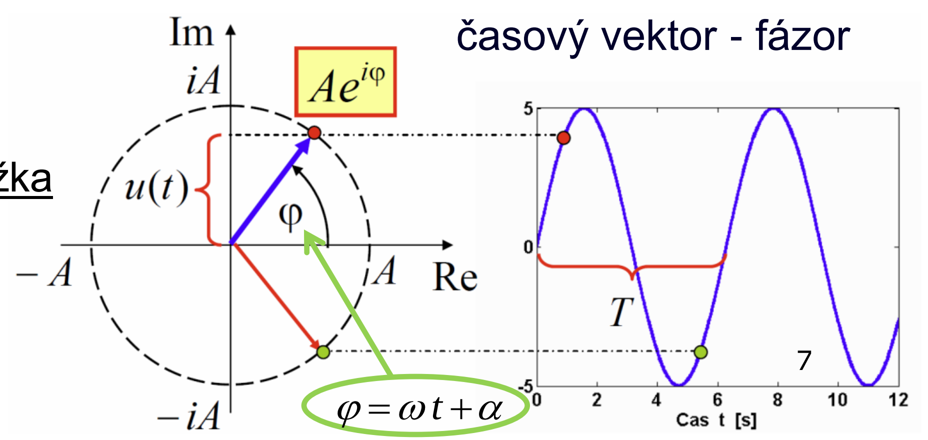
Harmonické kmity – různé zápisy

- $x(t) = A\sin(\omega t + \alpha)$
- $x(t) = B_S \sin \omega t + B_C \cos \omega t$, kde $B_S = A\cos\alpha$
  $B_C = A\sin\alpha$
- $x(t) = Ce^{i\omega t} + C^* e^{-i\omega t}$, kde $C = \frac{A}{2}e^{i\alpha}$
  $\operatorname{Re} C = \frac{B_S}{2} = \frac{A}{2}\cos\alpha$
  $\operatorname{Im} C = \frac{B_C}{2} = \frac{A}{2}\sin\alpha$
- $x(t) = \operatorname{Re}(De^{i\omega t})$, kde $D = 2C = Ae^{i\alpha}$ je komplexní číslo
- $x(t) = \operatorname{Re}(Ae^{i(\omega t+\alpha)})$, kde A je reálné číslo

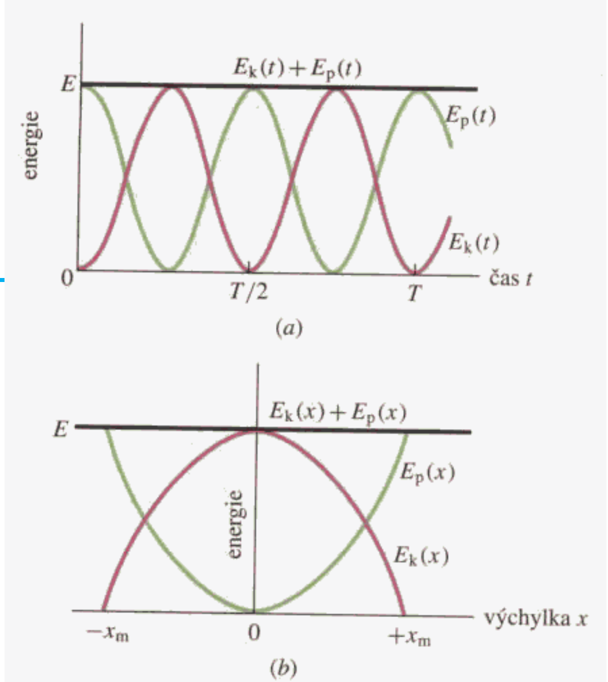
běžně píšeme

- $x(t) = De^{i\omega t}$ nebo
- $x(t) = De^{-i\omega t}$ a <u>fyzikální smysl má jen jedna složka</u>
- užili jsme
  - $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$
  - $e^{i\omega t} = \cos\omega t + i\sin\omega t$

časový vektor - fázor



Energie harmonických kmitů



harmonické kmity $x = A\sin(\omega t + \alpha)$

$$\dot{x} = A\omega\cos(\omega t + \alpha)$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

kinetická energie $E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2\cos^2(\omega t + \alpha)$

potenciální energie $E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2\sin^2(\omega t + \alpha) = -W = \int_0^x k\tau\, d\tau$

celková energie $E = E_k + E_p = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2$

konzervativní síly $\Rightarrow$ celková energie nezávisí na čase

Tlumené harmonické kmity

do pohybové rovnice doplníme disipativní sílu (tření, tlumení, elektrický odpor,...)

$$m\ddot{x} = -kx - b\dot{x} \text{ , kde } b > 0$$

$$\Rightarrow \qquad \ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

označení

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \text{ ... vlastní frekvence}$$

$$2\delta = \frac{b}{m} \text{ ... součinitel tlumení}$$

$$\boxed{\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0}$$

homogenní lineární diferenciální rovnice 2. řádu s konstantními koeficienty

charakteristická rovnice $\alpha^2 + 2\delta\alpha + \omega_0^2 = 0$

řešení charakteristické rovnice $\alpha_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$

Tlumené h. kmity – nadkritický útlum

- řešení charakteristické rovnice $\alpha_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$

$\delta > \omega_0 \Rightarrow$ aperiodický pohyb (velké tlumení)

- $\alpha_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} < 0$, reálné
- fundamentální systém $e^{(-\delta+\sqrt{\delta^2-\omega_0^2})t}$, $e^{(-\delta-\sqrt{\delta^2-\omega_0^2})t}$
- obecné řešení $x(t) = C_1 e^{\alpha_1 t} + C_2 e^{\alpha_2 t}$, kde $C_1,\ C_2 = konst.$ (určeno poč. podmínkami)
- počáteční podmínky: $t = 0 \rightarrow x(0) = A_M,\ \dot{x}(0) = 0$

$$\dot{x}(t) = \alpha_1 C_1 e^{\alpha_1 t} + \alpha_2 C_2 e^{\alpha_2 t} \Rightarrow \dot{x}(0) = \alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = -\frac{\alpha_1}{\alpha_2} C_1$$

$$x(0) = C_1 + C_2 = A_M = C_1\left(1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right) \Rightarrow C_1 = \frac{A_M}{1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}} = \frac{A_M \alpha_2}{\alpha_2 - \alpha_1} \Rightarrow C_2 = -\frac{A_M \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1}$$

$x(t) = \dfrac{A_M}{\alpha_2 - \alpha_1}(\alpha_2 e^{\alpha_1 t} - \alpha_1 e^{\alpha_2 t})$ ... vrací se do rovnovážné polohy <u>nekonečně dlouho</u>

Tlumené h. kmity – kritický útlum

- řešení charakteristické rovnice $\alpha_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$

$\delta = \omega_0 \Rightarrow$ mezní aperiodický pohyb (mezní tlumení)

- $\alpha_{1,2} = -\delta = -\omega_0 < 0$, dvojnásobný reálný kořen
- fundamentální systém $e^{-\omega_0 t}$, $te^{-\omega_0 t}$
- obecné řešení $x(t) = (A + Bt)e^{-\omega_0 t}$, kde $A, B = konst.$ (určeno poč. podmínkami)
- počáteční podmínky: $t = 0 \rightarrow x(0) = A_M, \dot{x}(0) = 0$

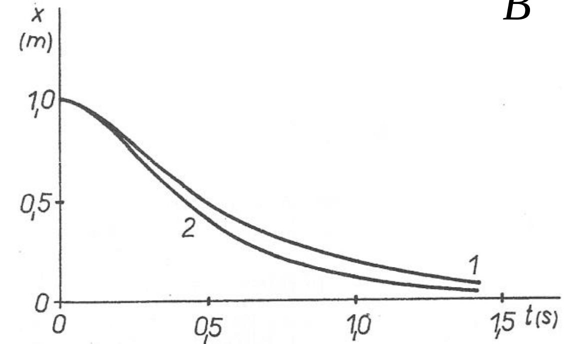
$$\dot{x}(t) = \left(-\omega_0 A + B(1 - \omega_0 t)\right)e^{-\omega_0 t} \Rightarrow \dot{x}(0) = -\omega_0 A + B = 0 \Rightarrow B = \omega_0 A$$

$$x(0) = A = A_M \Rightarrow B = \omega_0 A_M$$

$x(t) = A_M(1 + \omega_0 t)e^{-\omega_0 t}$ ... může projít rovnovážnou polohou (obecně pro $t = -\frac{A}{B}$)

do rovnovážné polohy spěje nekonečně dlouho (2)

<u>konverguje rychleji než v aperiodickém případě (1)</u>

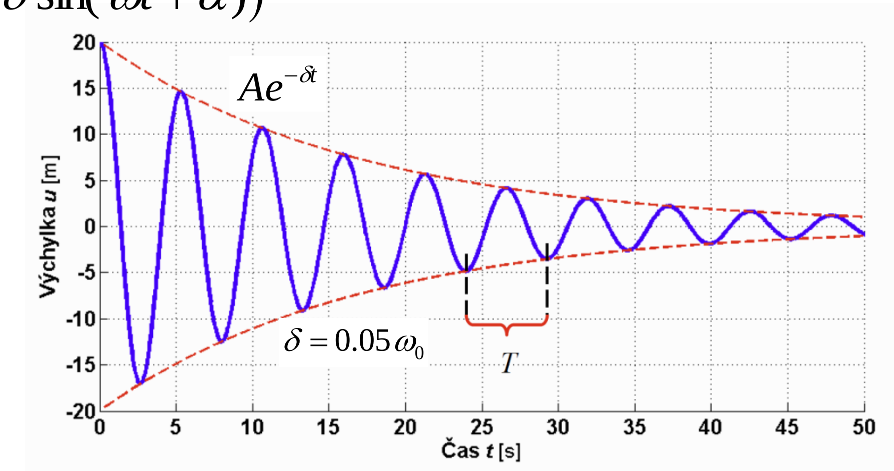


Tlumené h. kmity – slabé tlumení

- řešení charakteristické rovnice $\alpha_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$

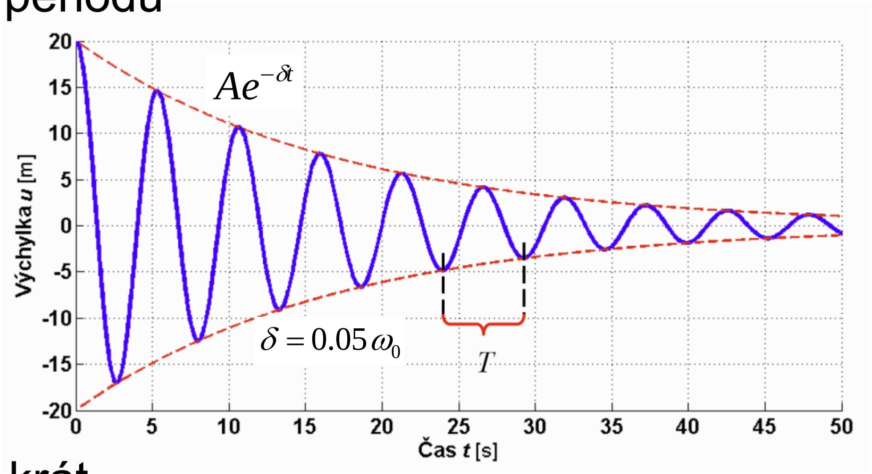
$\delta < \omega_0 \Rightarrow$ tlumené harmonické kmitání

- $\alpha_{1,2} = -\delta \pm i\omega$; $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$, kde $\omega < \omega_0$; kořeny ch.r. komplexní
- fundamentální systém $e^{-\delta t + i\omega t}$, $e^{-\delta t - i\omega t}$
- obecné řešení $x(t) = C_1 e^{-\delta t + i\omega t} + C_2 e^{-\delta t - i\omega t} = e^{-\delta t}\left(C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}\right)$, kde $C_1,\ C_2 = konst.$ (určeno poč. podmínkami)
- jiný zápis $x(t) = Ae^{-\delta t}\sin(\omega t + \alpha)$, kde $A,\ \alpha = konst.$ (určeno poč. podmínkami)
- rychlost $\dot{x}(t) = Ae^{-\delta t}\left(\omega\cos(\omega t + \alpha) - \delta\sin(\omega t + \alpha)\right)$
- perioda $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}$
- amplituda exponenciálně klesá



Tlumené kmity – charakteristiky tlumení

- tlumené oscilace $x(t) = Ae^{-\delta t}\sin(\omega t + \alpha)$
- **útlum**
  - podíl výchylek lišících se o jednu periodu
  - $\beta = \dfrac{x(t)}{x(t+T)} = e^{\delta T}$
- **logaritmický dekrement útlumu**
  - přirozený logaritmus útlumu
  - $\vartheta = \ln\beta = \delta T$
- **relaxační doba**
  - doba, za níž se obálka zmenší e-krát
  - $\tau = \dfrac{1}{\delta}$
- **činitel jakosti**
  - 2π -násobek poměru energie oscilátoru ku úbytku energie za periodu
  - $Q = 2\pi \dfrac{W(t)}{W(t) - W(t+T)} = 2\pi \dfrac{1}{1 - W(t+T)/W(t)} = \dfrac{2\pi}{1 - e^{-2\delta T}} = \dfrac{2\pi}{1 - \beta^2}$



Vynucené harmonické kmity

do pohybové rovnice doplníme periodickou budicí sílu

$m\ddot{x} = -kx - b\dot{x} + F_0 \cos\Omega t$, kde Ω je úhlová frekvence budicí síly

$$\Rightarrow \qquad \ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m}\cos\Omega t$$

označení

$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ ... vlastní frekvence

$2\delta = \frac{b}{m}$ ... součinitel tlumení (v dalším předpokládáme slabé tumení $\delta < \omega_0$)

$S = \frac{F_0}{m}$ ... amplituda buzení

$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = Se^{i\Omega t}$ ... komplexní symbolika (nakonec využijeme jen Re část)

<u>nehomogenní</u> (s nenulovou pravou stranou) lineární diferenciální rovnice 2. řádu

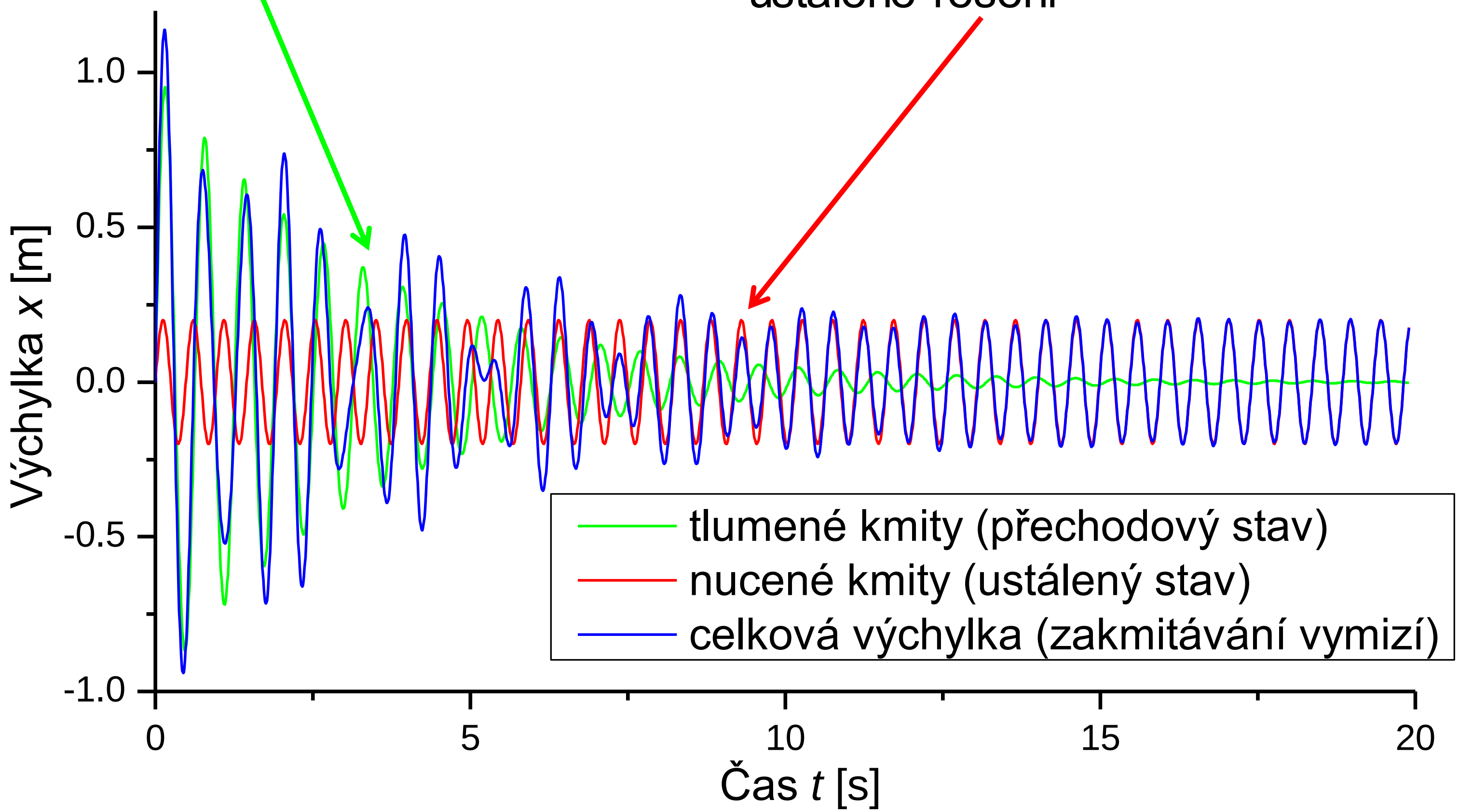
obecné řešení = obecné řešení homogenní rce + jedno partikulární řešení

Vynucené harmonické kmity

- rovnice s nenulovou pravou stranou $\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = Se^{i\Omega t}$
- hledáme partikulární řešení ve tvaru $x_p(t) = A_0 e^{i\Omega t}$
- dosazením do rovnice máme komplexní amplitudu $A_0 = \dfrac{S}{\omega_0^2 - \Omega^2 + i2\delta\Omega} \equiv |A_0| e^{i\varphi}$
- odstranění komplexního výrazu ze jmenovatele $A_0 = S\dfrac{\omega_0^2 - \Omega^2 - i2\delta\Omega}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2}$
- fázové zpoždění výchylky vůči působící síle $\tan\varphi = \dfrac{-2\delta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}$
- amplituda ustálených kmitů $|A_0| = S\dfrac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2}}$
- obecné komplexní řešení $x(t) = e^{-\delta t}\left(C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}\right) + A_0 e^{i\Omega t}$
- Re část obecného řešení $x(t) = Ae^{-\delta t}\sin(\omega t + \alpha) + |A_0|\cos(\Omega t + \varphi)$

Vynucené harmonické kmity

$$x(t) = \underbrace{Ae^{-\delta t}\sin(\omega t + \alpha)}_{\text{přechodové řešení}} + \underbrace{S\frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2}}\cos(\Omega t + \arctan\frac{-2\delta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2})}_{\text{ustálené řešení}}$$

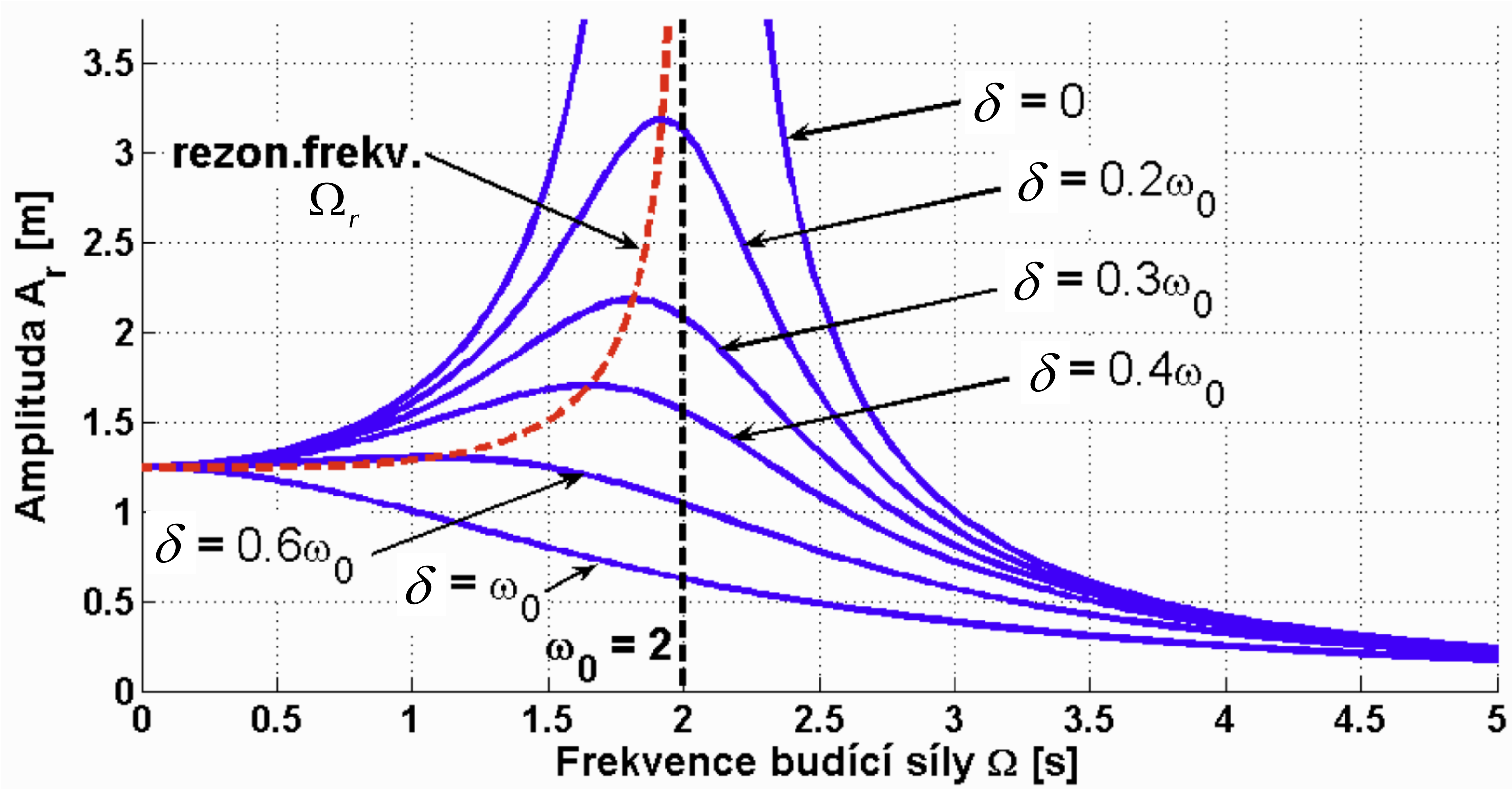


Rezonance

- amplituda kmitů $|A_0| = S \dfrac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2}}$ závisí na budicí frekvenci Ω
- hledáme extrém $\dfrac{d|A_0|}{d\Omega} = 0 \;\Rightarrow$
  - rezonanční frekvence $\Omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$

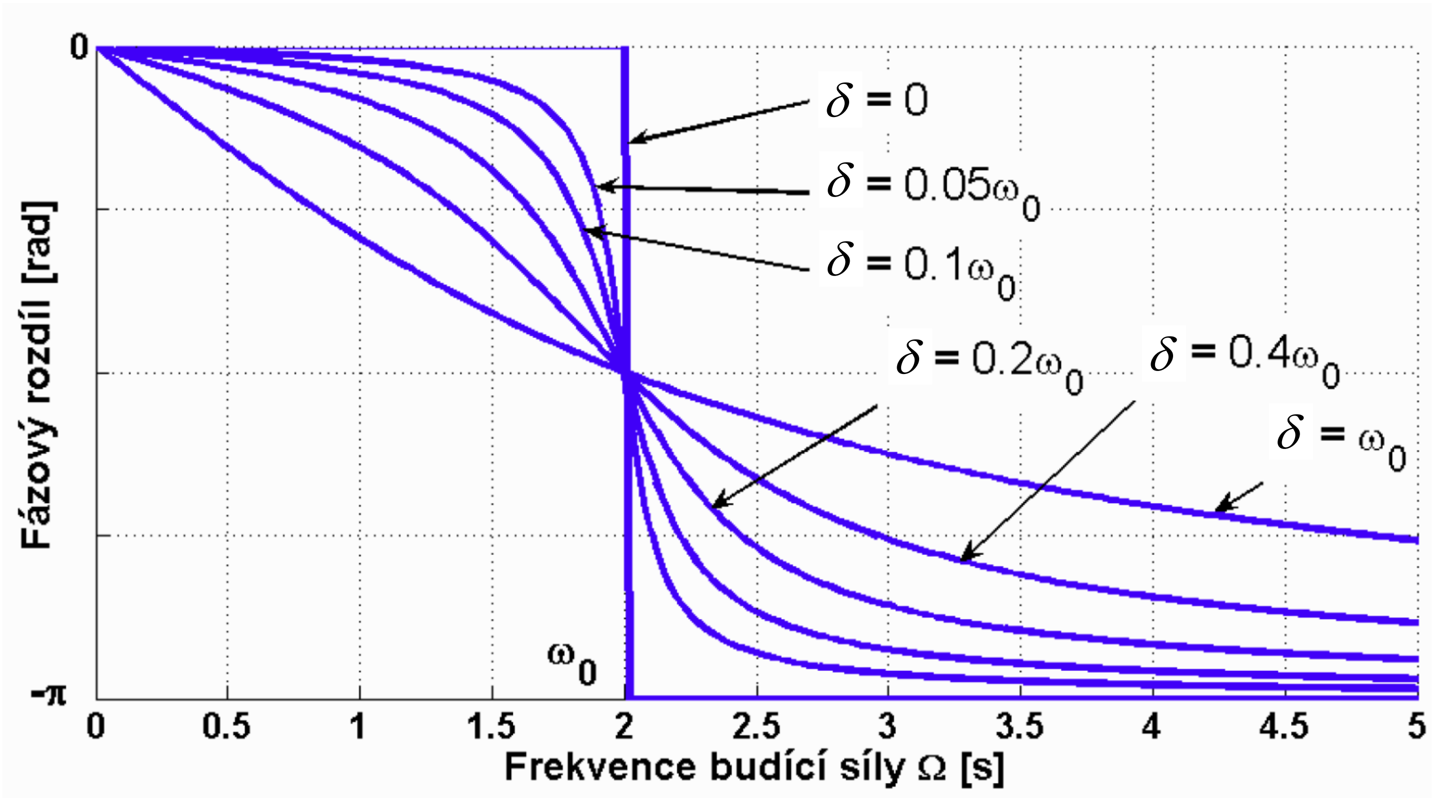
    LIŠÍ SE!
  - amplituda v rezonanci $A_r \equiv |A_0|_{\max} = \dfrac{S}{2\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}$
- **rezonance** – stav, kdy malá budicí veličina vyvolá kmitáním velkou odezvu
- pro slabé tlumení $\delta << \omega_0$ dostaneme $\Omega_r \to \omega_0$ a $A_r \to \infty$; vždy ale platí $\Omega_r < \omega_0$
- fázový úhel φ určuje zpoždění výchylky za budicí silou $\tan\varphi = \dfrac{-2\delta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}$
  - $\Omega \to 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi \to 0$ ... kmity ve fázi s buzením
  - $\Omega \to \infty \quad \Rightarrow \quad \varphi \to -\pi$ ... kmity v protifázi s buzením
  - $\Omega = \omega_0 \quad \Rightarrow \quad \varphi \to -\pi/2$ ... změna při průchodu vlastní frekvencí

Rezonanční křivky



pro $\delta > \omega_0 / \sqrt{2}$ nemá rovnice pro rezonanční frekvenci Ω_r reálný kořen $\Rightarrow$ rezonance nemá vrchol v oblasti reálných frekvencí

Fázový posuv v okolí rezonance



Amplitudová a výkonová rezonance

disipaci energie lze měřit výkonem brzdicí síly

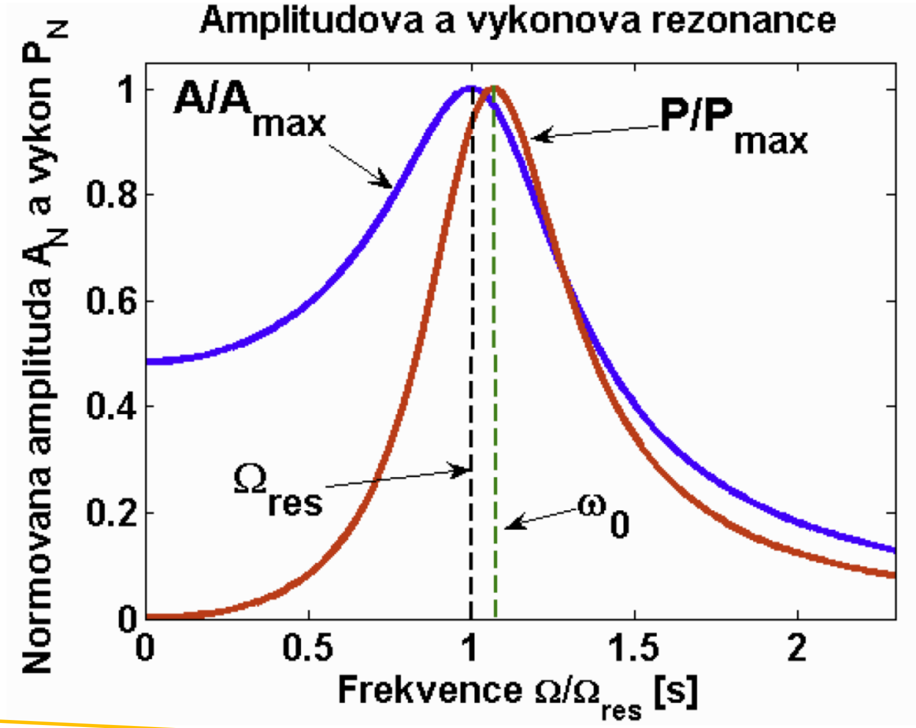
$$P=\frac{dW}{dt}=F(v)\frac{dx}{dt}=-b\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$$

energie rozptýlená po dobu jedné periody

$$\Delta W=-b\int_0^T\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 dt=-b\int_0^T\left(\frac{d}{dt}A_0\sin(\Omega t+\alpha)\right)^2 dt=$$

$$=-bA_0^2\Omega^2\int_0^T\cos^2(\Omega t+\alpha)dt=-bA_0^2\Omega^2\frac{T}{2}=$$

$$=-\underbrace{2\delta m}_{b}A_0^2\Omega^2\frac{T}{2}=-\delta m A_0^2\Omega^2 T$$



průměrný výkon dodaný budicí silou

$$\overline{P}=-\Delta W/T=\delta m A_0^2\Omega^2$$

$$|A_0|=\frac{F_0}{m}\frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+4\delta^2\Omega^2}}$$

dosazeno za amplitudu budicí síly $\overline{P}=\frac{F_0^2}{m}\frac{\delta\Omega^2}{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+4\delta^2\Omega^2}$

$\frac{d\overline{P}}{d\Omega}=0 \;\Rightarrow\; \Omega_{rp}=\omega_0$ rezonance absorbovaného výkonu nezávisí na útlumu

Praktické důsledky rezonance

- všechny mechanické systémy mají aspoň jednu vlastní frekvenci $\Rightarrow$ může docházet k rezonanci
- točivá zařízení (motory, turbíny), zvuková zařízení (hudební nástroje, reproduktory, sluchové orgány), statické konstrukce (budovy, mosty, stožáry)
- kvantová analogie mechanického oscilátoru – atomy v krystalu, elektrony v atomu
- vysoký činitel jakosti (poměr celkového výkonu ku výkonovým ztrátám) vede k úzkému rezonančnímu vrcholu ($D \sim 1/Q$) – malé síly způsobí velké výchylky

Tacoma Narrows Bridge

v roce 1940 se zřítil v důsledku torzních kmitů, které vznikly rezonancí mostu s nárazy větru

Praktické důsledky rezonance

Tacoma Narrows Bridge Collapse (Sound Version) (Standard 4:3) (1940)

Tacoma Narrows Bridge

v roce 1940 se zřítil v důsledku torzních kmitů, které vznikly rezonancí mostu s nárazy větru

Skládání řešení lineárních rovnic

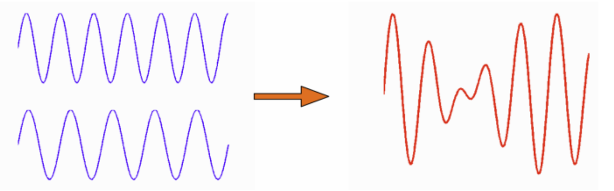
Rovnice pro vynucený harmonický kmit

$$m\ddot{x}_1 + b\dot{x}_1 + kx_1 = F_1(t)$$

$$m\ddot{x}_2 + b\dot{x}_2 + kx_2 = F_2(t)$$

rovnice jsou lineární, proto řešením pro součet vynucujících sil je součet řešení pro jednotlivé síly

$$m\frac{d^2}{dt^2}(x_1 + x_2) + b\frac{d}{dt}(x_1 + x_2) + k(x_1 + x_2) = F_1(t) + F_2(t)$$



Levou stranu lineární diferenciální rovnice $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F(t)$ lze chápat jako konkrétní případ obecného lineárního operátoru.

Pro obecný lineární operátor $\Lambda(x)$ platí:

1) $\Lambda(x) = 0$: x_1 a x_2 jsou řešení $\Rightarrow$ $ax_1 + bx_2$ je také řešení

2) $\Lambda(x) = F(t)$: x_p je řešení $\Rightarrow$ $x_1 + x_p$ je také řešení

$$\left(\Lambda(x_1 + x_p) = \Lambda(x_1) + \Lambda(x_p) = 0 + F(t)\right)$$

3) $\Lambda(x_1) = F_1(t)$, $\Lambda(x_2) = F_2(t) \Rightarrow$ $x_1 + x_2$ je řešení pro $F_1(t) + F_2(t)$

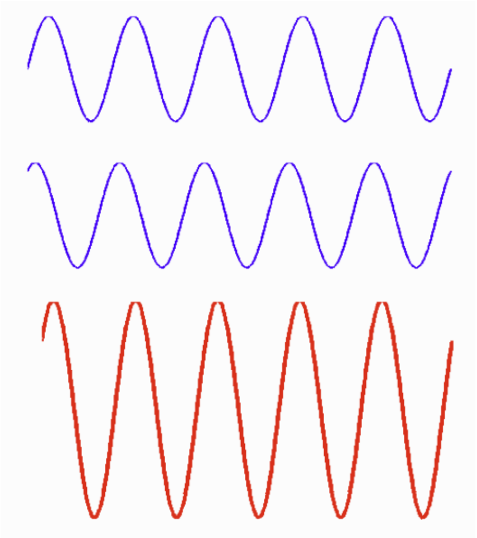
$$\left(\Lambda(x_1 + x_2) = \Lambda(x_1) + \Lambda(x_2) = F_1(t) + F_2(t)\right)$$

Skládání kmitů stejného směru

- skládáme kmity stejného směru obecně různých frekvencí $x_i = A_i \sin(\omega_i t + \alpha_i)$
- pro periody dílčích kmitů platí $\sin(\omega_i (t + T_i) + \alpha_i) = \sin(\omega_i t + \alpha_i)$
- amplituda složených kmitů $x = x_1 + x_2 + \ldots = A_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + A_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_2) + \ldots$
- označme periodu složených kmitů T
- perioda T musí pro všechna i splňovat $\sin(\omega_i (t + T) + \alpha_i) = \sin(\omega_i t + \alpha_i)$
- to je splněno pro $\omega_i T = 2\pi n_i, \quad n_i \ldots$celé číslo
- protože $\dfrac{2\pi}{\omega_i} = T_i$, bude perioda složených kmitů $T = T_1 n_1 = T_2 n_2 = \ldots$

Skládání kmitů stejného směru a frekvence

- $x_1 = A_1 \sin(\omega t + \alpha_1)$
- $x_2 = A_2 \sin(\omega t + \alpha_2)$
- výsledkem je pohyb periodický se stejnou frekvencí
  $x = A \sin(\omega t + \alpha) = A \sin \omega t \cos \alpha + A \cos \omega t \sin \alpha$
- platí totiž
$$\begin{cases} x = x_1 + x_2 = \sin \omega t \underbrace{(A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2)}_{A \cos \alpha} + \\ \qquad + \cos \omega t \underbrace{(A_1 \sin \alpha_1 + A_2 \sin \alpha_2)}_{A \sin \alpha} \end{cases}$$
- amplituda
$$\begin{cases} A^2 = (A \sin \alpha)^2 + (A \cos \alpha)^2 = \\ = (A_1 \sin \alpha_1 + A_2 \sin \alpha_2)^2 + (A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2)^2 = \\ = A_1^2 + A_2^2 + 2 A_1 A_2 (\sin \alpha_1 \sin \alpha_2 + \cos \alpha_1 \cos \alpha_2) = \\ = A_1^2 + A_2^2 + 2 A_1 A_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2) \end{cases}$$
- fázové posunutí
$$\tan \alpha = \frac{A \sin \alpha}{A \cos \alpha} = \frac{A_1 \sin \alpha_1 + A_2 \sin \alpha_2}{A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2}$$



Skládání kmitů blízkých frekvencí

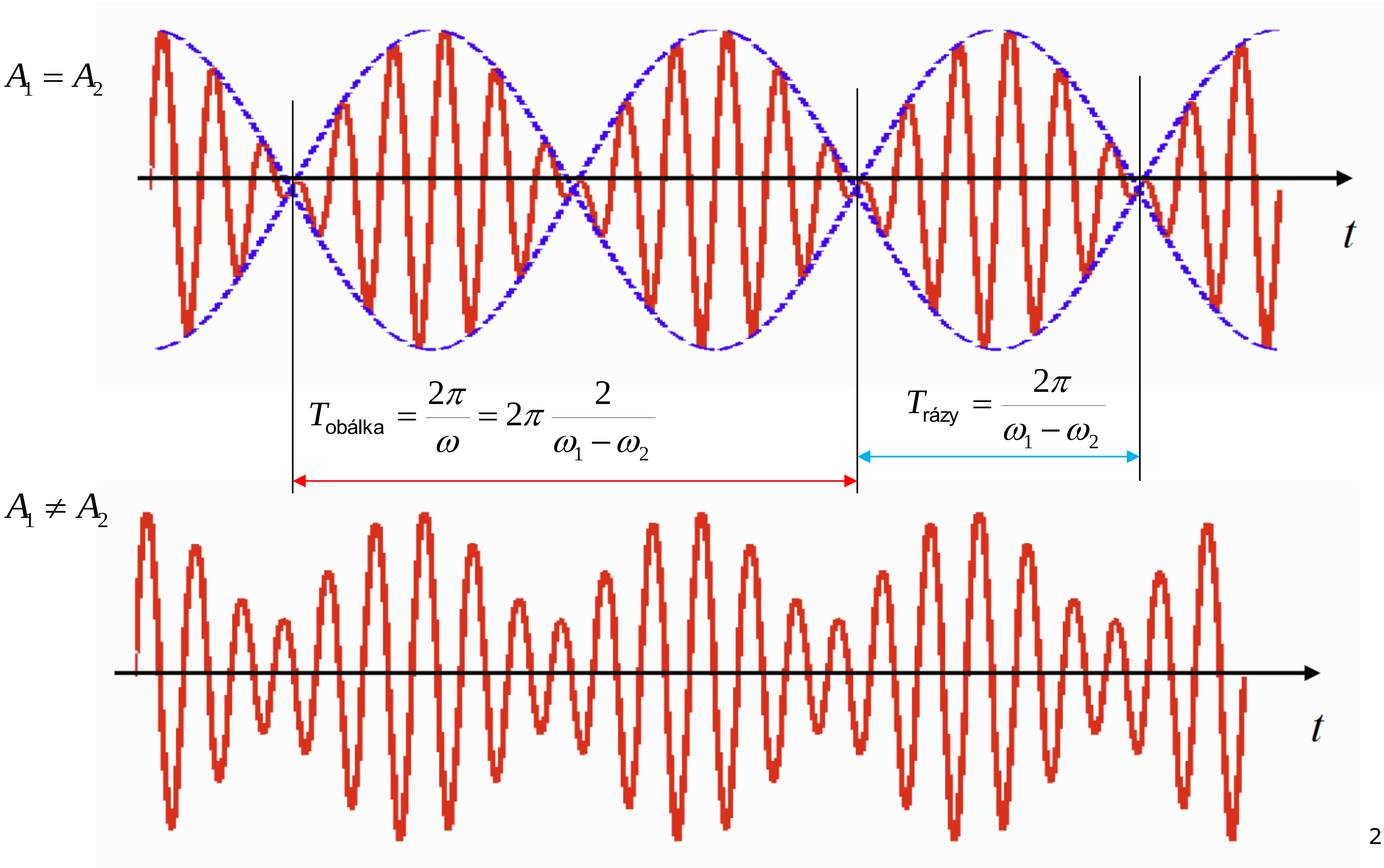
- zjednodušení $A_1 = A_2 = A$, předpokládáme $\omega_1 > \omega_2$
- $x_1 = A\sin(\omega_1 t + \alpha_1)$
- $x_2 = A\sin(\omega_2 t + \alpha_2)$
- užijeme $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

$$x = x_1 + x_2 = A\sin(\omega_1 t + \alpha_1) + A\sin(\omega_2 t + \alpha_2) =$$

$$= \underbrace{2A\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t + \frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}\right)}_{\text{proměnná amplituda}}\underbrace{\sin\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t + \frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\right)}_{\text{harmonické kmitání}}$$

- pro $\omega_1 - \omega_2 << \omega_1 + \omega_2$ se amplituda mění pomalu $\Rightarrow$ vznikají **rázy**
- kmitání má stálou úhlovou frekvenci $\dfrac{\omega_1+\omega_2}{2}$
- obálka amplitudy se mění s frekvencí $\dfrac{\omega_1-\omega_2}{2}$, rázy mají frekvenci $\omega = |\omega_1 - \omega_2|$

Skládání kmitů blízkých frekvencí



Skládání vzájemně kolmých kmitů

- $x = A_1 \sin(\omega_1 t)$
- $y = A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi)$

- pro $\omega_1 = \omega_2 = \omega$

$$y = A_2 \sin(\omega t + \varphi) = A_2 \sin \omega t \cos\varphi + A_2 \cos \omega t \sin\varphi =$$

$$= \frac{A_2}{A_1} \underbrace{A_1 \sin \omega t}_{x} \cos\varphi + A_2 \underbrace{\cos \omega t}_{\sqrt{1-\frac{x^2}{A_1^2}}} \sin\varphi = \frac{A_2}{A_1} x \cos\varphi + A_2 \sqrt{1-\frac{x^2}{A_1^2}} \sin\varphi$$

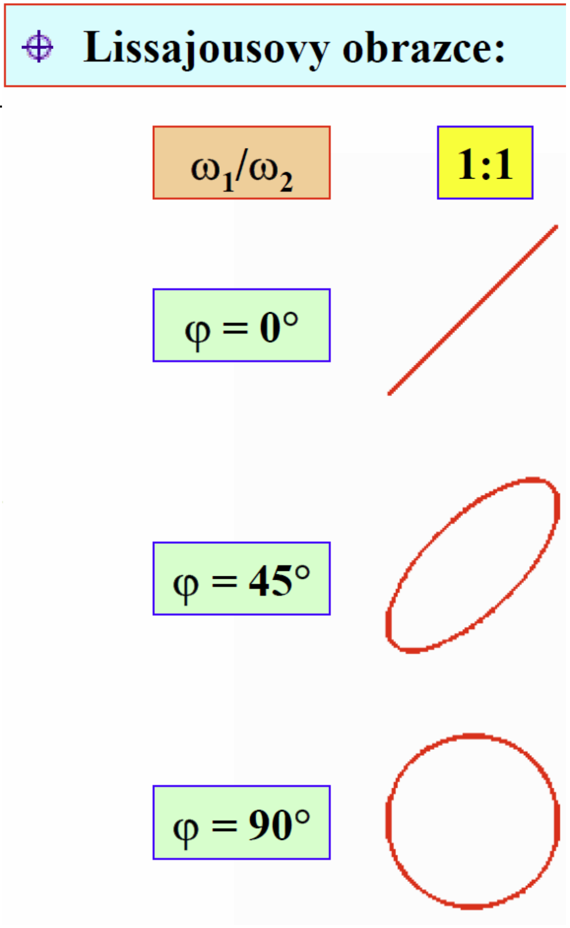
$$y - \frac{A_2}{A_1} x \cos\varphi = A_2 \sqrt{1-\frac{x^2}{A_1^2}} \sin\varphi \qquad \Big|^2$$

$$y^2 - 2\frac{A_2}{A_1} xy \cos\varphi + \frac{A_2^2}{A_1^2} x^2 \cos^2\varphi = A_2^2 \left(1-\frac{x^2}{A_1^2}\right) \sin^2\varphi \qquad \Big| \frac{1}{A_2^2}$$

$$\frac{y^2}{A_2^2} - 2\frac{xy}{A_1 A_2} \cos\varphi + \frac{x^2}{A_1^2} \cos^2\varphi = \sin^2\varphi - \frac{x^2}{A_1^2} \sin^2\varphi$$

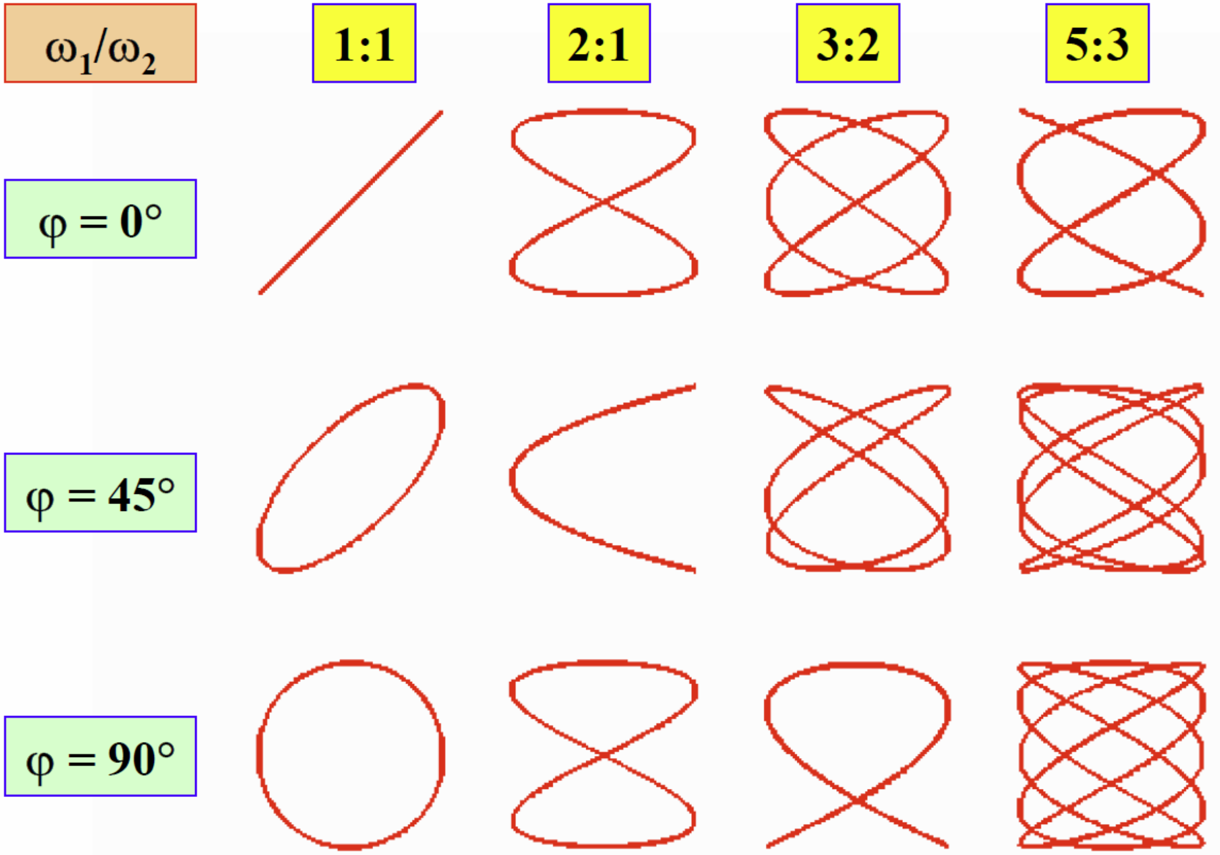
$$\frac{y^2}{A_2^2} - 2\frac{xy}{A_1 A_2} \cos\varphi + \frac{x^2}{A_1^2} = \sin^2\varphi$$

- výsledek - obecná rovnice elipsy



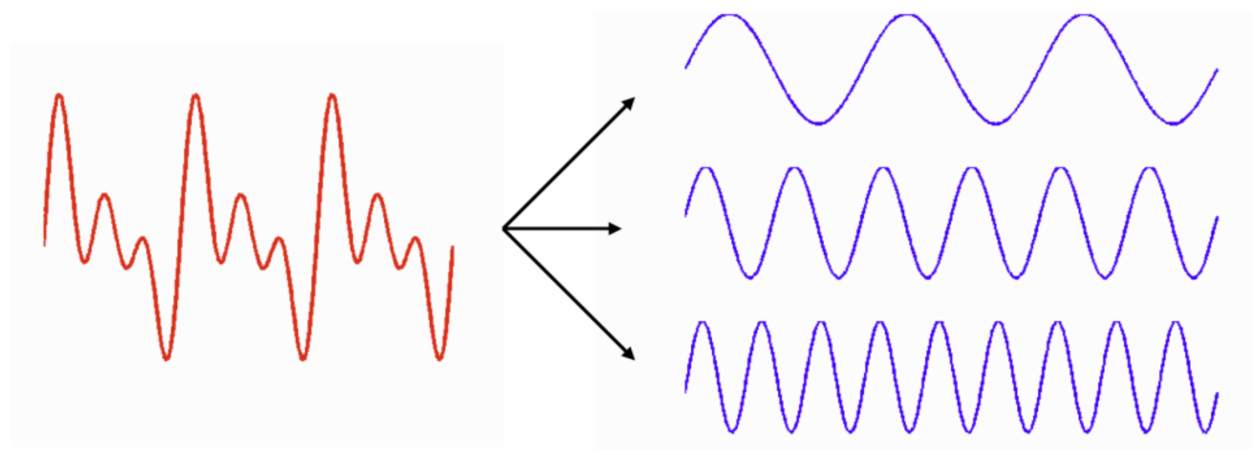
Skládání vzájemně kolmých kmitů

Lissajousovy obrazce: $\omega_1 \neq \omega_2$ $\omega_1 / \omega_2 = n_2 / n_1$

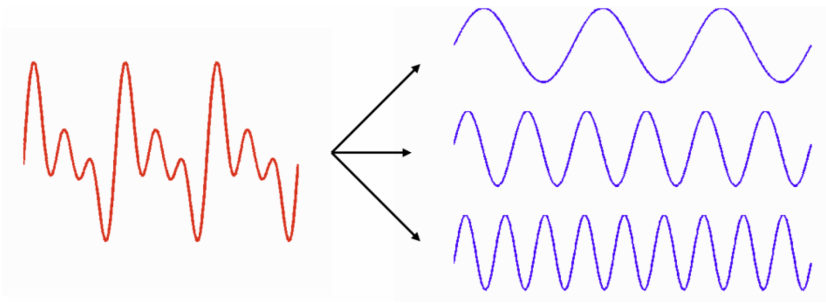


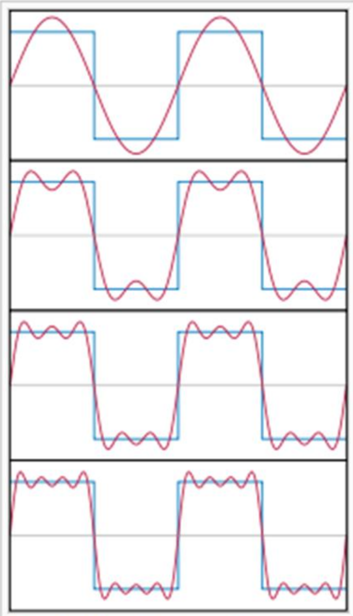
Harmonická (Fourierova) analýza

- každou periodickou funkci s periodou ($T = 1/f$) lze rozložit na harmonické složky s frekvencemi $f, 2f, 3f, \ldots$
- rozklad lze napsat například $$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos(k\omega t + \alpha_k)$$
- frekvence f se nazývá 1. harmonická
- frekvence nf se nazývá *n*-tá harmonická

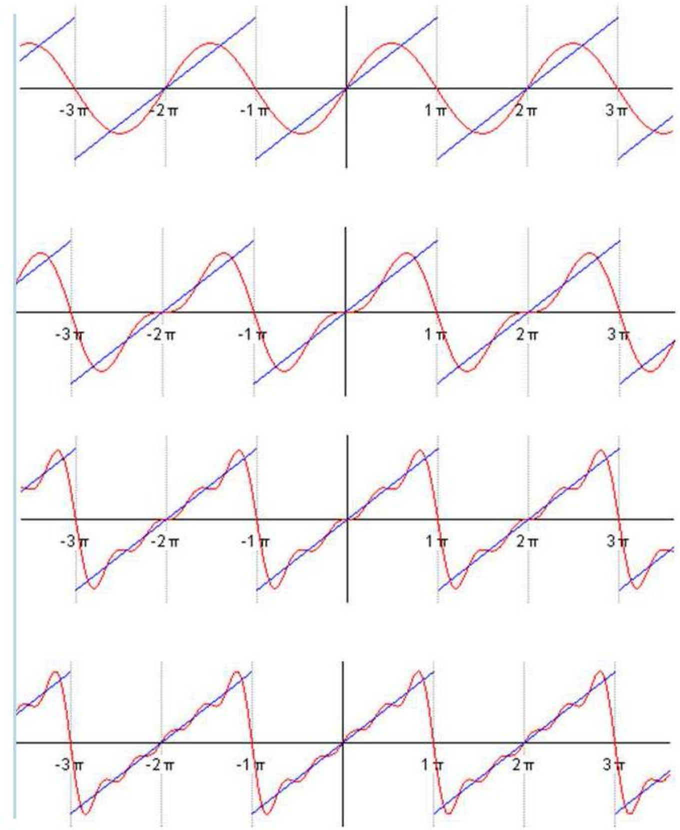


Harmonická analýza – jak to funguje





The first four Fourier series approximations for a square wave



Princip harmonické analýzy

ukážeme analogii s vektorovým počtem:

- vyjádření vektoru $\vec{X}$ jako lineární kombinace vektorů ortogonální (nikoliv ortonormální) báze $\vec{e}_k$ v N-dimenzionálním prostoru

$$\vec{X} = \sum_{k=1}^{N} \Phi_k \vec{e}_k$$

- <u>norma</u> vektoru dána <u>skalárním součinem</u> $\| \vec{X} \|^2 = (\vec{X} \cdot \vec{X})$
- pro určení koeficientu Φ_k nalezneme průmět vektoru $\vec{X}$ do směru $\vec{e}_k$

$$\vec{X} \cdot \vec{e}_k = \left(\sum_{i=1}^{N} \Phi_i \vec{e}_i \right) \cdot \vec{e}_k = \sum_{k=1}^{N} \Phi_i \underbrace{(\vec{e}_i \cdot \vec{e}_k)}_{\|\vec{e}_k\|^2 \delta_{ik}} = \| \vec{e}_k \|^2 \Phi_k$$

- koeficient lineární kombinace

$$\Phi_k = \frac{1}{\| \vec{e}_k \|^2} (\vec{X} \cdot \vec{e}_k)$$

Harmonická analýza – trigonometrické fce

- ortogonální báze tvořená $\cos(k\omega t)$ (pro $k=0,\cdots,\infty$) a $\sin(k\omega t)$ (pro $k=1,\cdots,\infty$)
- skalární součin funkcí $\langle f \mid g\rangle$ se definuje $\langle f \mid g\rangle \equiv \int_{-T/2}^{T/2} f(t)\overline{g(t)}\,dt$ (tak lze ověřit ortogonalitu)
- funkce musí být kvadraticky integrabilní $\langle f \mid f\rangle = \int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2\,dt < \infty$
- norma funkce dána skalárním součinem $\| f \|^2 = \langle f \mid f\rangle$
- platí $\|\cos(k\omega t)\|^2 = \int_{-T/2}^{T/2} \cos^2(k\omega t)\,dt = \frac{T}{2}$ pro $k=0,\cdots,\infty$
- platí $\|\sin(k\omega t)\|^2 = \int_{-T/2}^{T/2} \sin^2(k\omega t)\,dt = \frac{T}{2}$ pro $k=1,\cdots,\infty$
- zápis reálné funkce pomocí báze (Fourierův rozvoj) $y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos(k\omega t) + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin(k\omega t)$
- koeficienty rozvoje

$$\Phi_k = \frac{1}{\|\vec{e}_k\|^2}(\vec{X}\cdot\vec{e}_k)$$

$$A_k = \frac{1}{\|\cos(k\omega t)\|^2}\langle f \mid \cos(k\omega t)\rangle \rightarrow A_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(k\omega t)\,dt$$

$$B_k = \frac{1}{\|\sin(k\omega t)\|^2}\langle f \mid \sin(k\omega t)\rangle \rightarrow B_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin(k\omega t)\,dt$$

Harmonická analýza – komplexní formulace

- ortogonální báze tvořená $e^{ik\omega t}$ pro $k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots, \pm\infty$
- platí pro normu $\| e^{ik\omega t} \|^2 = \int_{-T/2}^{T/2} e^{ik\omega t} \underbrace{e^{-ik\omega t}}_{\overline{e^{ik\omega t}}} dt = \int_{-T/2}^{T/2} dt = T$
- Fourierův rozvoj funkce $\boxed{y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{ik\omega t}}$
- koeficienty rozvoje $C_k = \frac{1}{\| e^{ik\omega t} \|^2} \left\langle f \mid e^{ik\omega t} \right\rangle \to \boxed{C_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-ik\omega t} dt}$
- pro reálnou funkci platí

$$C_{-k} = C_k^*$$

$$\operatorname{Im} C_0 = 0$$

- přepočet z trigonometrické báze

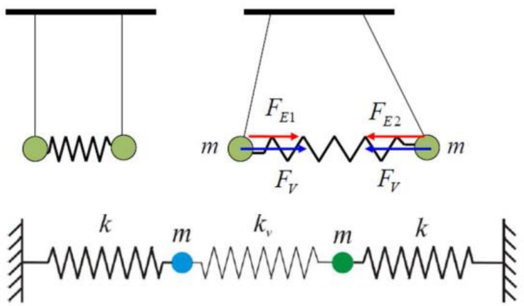
$$C_0 = A_0$$

$$C_k = \frac{1}{2}(A_k - iB_k) \qquad \text{pro } k = 1, \cdots, \infty$$

$$C_k = \frac{1}{2}(A_k + iB_k) \qquad \text{pro } k = -1, \cdots, -\infty$$

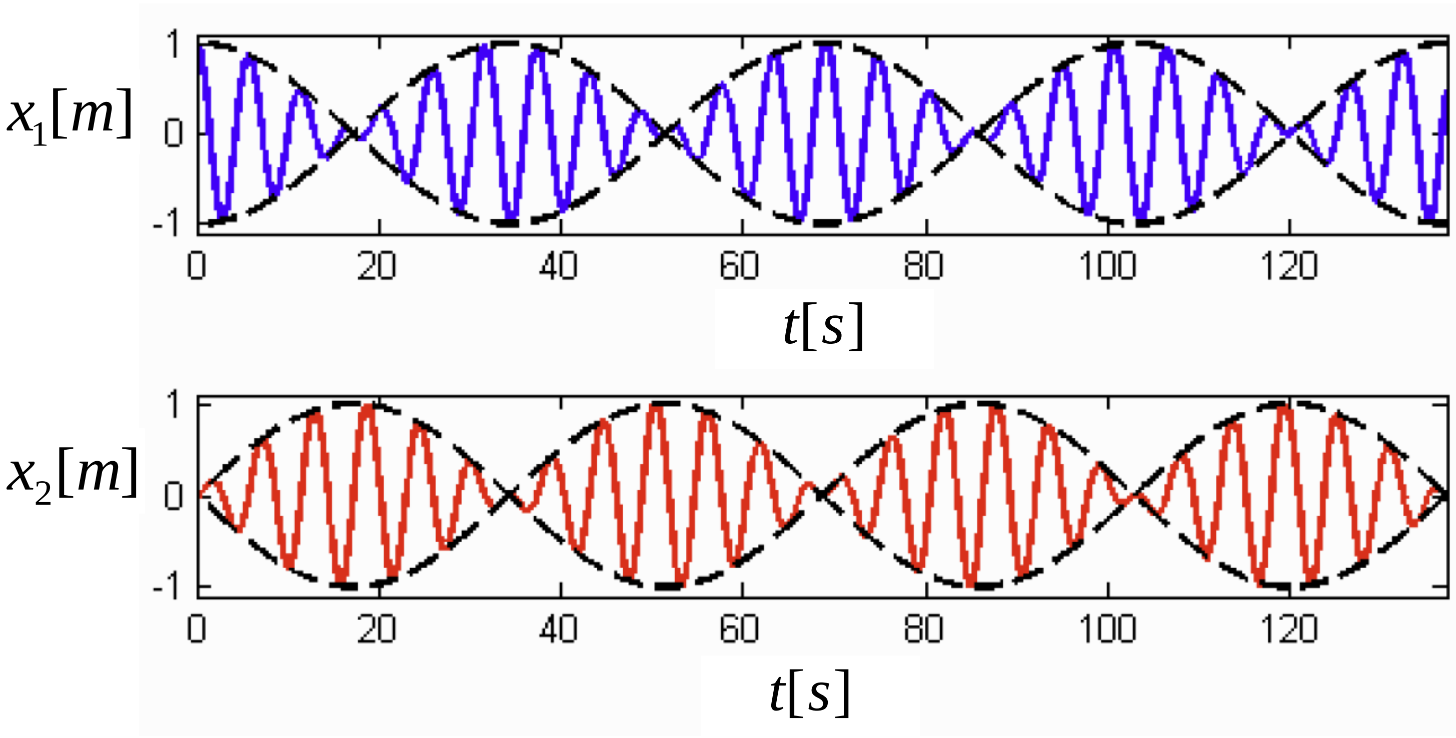
Vázané oscilátory

- 2 oscilátory (kyvadla, pružiny) – mezi nimi elastická vazba velikosti k_v
- působí
  - síly úměrné výchylce (tíhové, elastické) $F_{Ei} = -kx_i$
  - vazebná síla $F_V = \pm k_v(x_2 - x_1)$



- pohybové rce $\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -kx_1 + k_v(x_2 - x_1) \\ m\ddot{x}_2 = -kx_2 - k_v(x_2 - x_1) \end{cases}$
- součet a rozdíl $\begin{cases} m(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) = -k(x_1 + x_2) \\ m(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) = -k(x_1 - x_2) - 2k_v(x_1 - x_2) \end{cases}$
- zavedeme $\eta = x_1 + x_2 \quad \wedge \quad \xi = x_1 - x_2$
- potom $\begin{cases} m\ddot{\eta} = -k\eta \\ m\ddot{\xi} = (-k - 2k_v)\xi \end{cases} \rightarrow \quad \ddot{\eta} + \frac{k}{m}\eta = 0 \quad \wedge \quad \ddot{\xi} + \frac{k + 2k_v}{m}\xi = 0$
- pro $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ a $\omega_v^2 = \frac{k + 2k_v}{m}$ dostaneme $\eta = \eta_0 \cos(\omega_0 t + \alpha_0)$ a $\xi = \xi_0 \cos(\omega_v t + \alpha_v)$
- pak řešení $x_{1,2} = \frac{\eta \pm \xi}{2} = \frac{1}{2}\left[\eta_0 \cos(\omega_0 t + \alpha_0) \pm \xi_0 \cos(\omega_v t + \alpha_v)\right]$
- pro $k_v << k$ jsou ω_0 a ω_v blízké $\Rightarrow$ vznikají rázy (viz skládání blízkých frekvencí)

Vázané oscilátory



čím silnější vazba mezi oscilátory

- tím rychlejší výměna energie mezi nimi
- tím větší frekvence rázů