Matematická analýza

Tento text obsahuje odpřednášenou látku z Matematické analýzy a Teorie míry od Stanislava Hencla a Bohumíra Opice.

Obsah

1 Posloupnosti **5**
1.1 Úvod 5
1.2 Vlastní limita posloupnosti 5
1.3 Nevlastní limita posloupnosti 9
1.4 Hlubší věty o limitách 10

2 Funkce jedné reálné proměnné **16**
2.1 Základní pojmy 16
2.2 Limita funkce, spojitost, věty o limitách 17
2.3 Funkce spojité na intervalu 22
2.4 Elementární funkce 25

3 Derivace funkce jedné reálné proměnné a Taylorův polynom **28**
3.1 Derivace funkce jedné reálné proměnné 28
3.1.1 Derivace elementárních funkcí 37
3.2 Konvexní a konkávní funkce 39
3.3 Průběh funkce 43
3.3.1 Vyšetřování průběhu funkce 44
3.4 Taylorův polynom 44

4 Řady **48**
4.1 Úvod 48
4.2 Řady s nezápornými členy 49
4.3 Absolutní a neabsolutní konvergence řad 53
4.4 Přerovnání řad a součin řad 57
4.5 Limita posloupnosti a součet řady v komplexním oboru 59

5 Primitivní funkce **60**
5.1 Základní vlastnosti 60
5.1.1 Tabulkové integrály 62
5.2 Integrace racionální funkce 63
5.2.1 Substituce převádějící na racionální funkce 64
5.2.2 Integrace trigonometrických funkcí 64
5.2.3 Integrace funkcí obsahující odmocniny 65

6 Určitý integrál **66**
6.1 Riemannův integrál 66
6.2 Newtonův integrál 75
6.3 Konvergence Newtonova integrálu 78
6.4 Aplikace určitého integrálu 82

7 Obyčejné diferenciální rovnice **87**
7.1 Řešení, existence a jednoznačnost 87
7.2 Rovnice prvního řádu 88
7.3 Systémy lineárních ODR a lineární rovnice n-tého řádu 91
7.4 Rovnice n-tého řádu s konstantními koeficienty 93
7.5 Systémy rovnic s konstantními koeficienty 95

8 Metrické prostory **98**
8.1 Základní pojmy 98
8.2 Konvergence a spojitá zobrazení v metrických prostorech 105
8.3 Kompaktní množiny 107
8.4 Úplné metrické prostory 109

9 Funkce více proměnných **114**
9.1 Úvodní definice a spojitost 114
9.2 Parciální derivace a totální diferenciál 115
9.3 Parciální derivace vyšších řádů 121
9.4 Implicitní funkce 123
9.5 Regulární zobrazení 127

10 Metrické prostory 2 **129**
10.1 Více o kompaktních a úplných metrických prostorech 129
10.2 Prostory L^p 133
10.3 Husté a řídké množiny 138
10.4 Separabilní prostory 141

11 Hilbertovy prostory **143**
11.1 Základní definice 143
11.2 Rozklad do Schauderovy báze 146
11.3 Trigonometrické řady 149

12 Stejnoměrná konvergence posloupností a řad funkcí **151**
12.1 Bodová a stejnoměrná konvergence posloupností funkcí 151
12.2 Stejnoměrná konvergence řady funkcí 154
12.3 Mocninné řady 156

13 Absolutně spojité funkce a funkce s konečnou variací **159**
13.1 Derivace monotónní funkce 159
13.2 Funkce s konečnou variací 161
13.3 Absolutně spojité funkce 163

14 Fourierovy řady **168**
14.1 Základní pojmy 168
14.2 Bodová konvergence Fourierových řad 171
14.3 Stejnoměrná konvergence - Fejérova věta 175
14.4 Fourierova transformace 180

15 Souvislé a obloukově souvislé množiny 182

16 Teorie míry a integrálu 186
16.1 Měřitelné funkce 192
16.2 Abstraktní Lebesgeův integrál 195
16.3 Lebesgueův integrál v $\mathbb{R}$ 201
16.4 Integrál závislý na parametru 202
16.5 d-systémy 204
16.6 Součin měr a Fubiniova věta 208
16.7 Radon-Nikodymova věta, Lebesgueův rozklad míry 218
16.8 Konvergence podle míry 227

17 Obyčejné diferenciální rovnice 231
17.1 Základní definice a existence řešení 231
17.2 Jednoznačnost řešení 236
17.3 Maximální řešení 237
17.4 Závislost řešení na počáteční podmínce a parametrech 239
17.5 Lineární ODR 242
17.6 Lineární rovnice s konstantními koeficienty 244

18 Stabilita řešení 248

19 Teoretické příklady 249

20 Početní příklady 261

1 Posloupnosti

1.1 Úvod

Definice 1.1. Jestliže ke každému $n \in \mathbb{N}$ je přiřazeno $a_n \in \mathbb{R}$, tak říkáme, že:

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a_n\} = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$$

je posloupnost reálných čísel.

Definice 1.2. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je:

- neklesající, jestliže $\forall n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \leq a_{n+1}$,
- nerostoucí, jestliže $\forall n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \geq a_{n+1}$,
- klesající, jestliže $\forall n \in \mathbb{N}$ platí $a_n > a_{n+1}$,
- rostoucí, jestliže $\forall n \in \mathbb{N}$ platí $a_n < a_{n+1}$.
- konstantní, jestliže $\forall n \in \mathbb{N}$ platí $a_n = c$, kde $c \in \mathbb{R}$.

Definice 1.3. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ je omezená, jestliže množina členů posloupnosti $\{a_n\}$ je omezená podmnožina $\mathbb{R}$. Analogicky definujeme omezenost shora a omezenost zdola.

1.2 Vlastní limita posloupnosti

Definice 1.4. Nechť $A \in \mathbb{R}$ a $\{a_n\}$ je posloupnost. Řekneme, že A je (vlastní) limitou posloupnosti $\{a_n\}$, jestliže:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_0 : |a_n - A| < \varepsilon.$$

Značíme $\lim_{n\to\infty} a_n = A$.

Věta 1.5 (Jednoznačnost limity)**.** Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.

Důkaz. Dokážeme sporem. Nechť $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ a $\lim_{n\to\infty} a_n = B$, $A > B$. Zvolme $\varepsilon = \frac{A-B}{3}$. Z definice $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ víme, že existuje $n_A \in \mathbb{N}$ tak, že $\forall n \geq n_0$ platí $|a_n - A| < \varepsilon$. Z definice $\lim_{n\to\infty} a_n = B$ dostaneme, že existuje $n_B \in \mathbb{N}$ tak, že $\forall n \geq n_B$ platí $|a_n - B| < \varepsilon$. Položme $n_0 = \max\{n_A, n_B\}$. Pak platí:

$$|A - B| \leq |(A - a_{n_0}) + (a_{n_0} - B)| \leq |A - a_{n_0}| + |a_{n_0} - B| < \varepsilon + \varepsilon = \frac{2}{3}(A - B).$$

To je spor. Nerovnost $|A - B| < \frac{2}{3}(A - B)$ nemůže nikdy nastat. $\square$

Věta 1.6 (O omezenosti konvergentní posloupnosti)**.** Nechť má posloupnost vlastní limitu. Pak je daná posloupnost omezená.

Důkaz. Nechť $\lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}$. Položme $\varepsilon = 1$. K tomuto $\varepsilon = 1$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $\forall n \geq n_0$ platí:

$$|a_n - A| < \varepsilon \Leftrightarrow a_n \in (A-1, A+1).$$

Množina $\{a_n : n = 1, 2, \ldots, n_0\}$ je konečná, a tedy omezená. Položme:

$$K = \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{n_0}|, |A| + 1\},$$

$\forall A \in \mathbb{R}$ jistě platí:

$$(A-1, A+1) \subset (-|A|-1, |A|+1).$$

Pak $\forall n \in \mathbb{N}$ buď máme:

$$n \leq n_0 \Rightarrow |a_n| \leq \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{n_0}|\} \leq K.$$

Nebo také může nastat:

$$n \geq n_0 \Rightarrow a_n \in (A-1, A+1) \Rightarrow |a_n| \leq |A| + 1 \leq K.$$

Tím je tedy důkaz hotov. $\square$

Definice 1.7. Řekneme, že posloupnost $\{b_k\}$ je vybraná z posloupnosti $\{a_n\}$, jestliže existuje rostoucí posloupnost $\{n_k\}$ tak, že $b_k = a_{n_k}$.

Věta 1.8 (O limitě vybrané posloupnosti)**.** Nechť $\lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}$ a nechť $\{b_k\}$ je vybraná posloupnost z $\{a_n\}$. Pak $\lim_{k\to\infty} b_k = A$.

Důkaz. Víme, že $\lim_{n\to\infty} a_n = A$. K $\varepsilon > 0$ tedy existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $\forall n \geq n_0$ je $|a_n - A| < \varepsilon$. Chceme dokázat, že $\lim_{k\to\infty} b_k = A$. K $\varepsilon > 0$ zvolme $k_0 = n_0$, kde n_0 pochází z definice a_n. Nechť $k \geq k_0$. Pak:

$$n_k \geq k \geq k_0 = n_0.$$

Dále tedy máme:

$$|b_k - A| = |a_{n_k} - A| < \varepsilon.$$

Z toho dostáváme, že $\lim_{k\to\infty} b_k = A$. Tím je důkaz hotov. $\square$

Poznámka. Následující podmínky jsou ekvivalentní:

- $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : |a_n - A| < \varepsilon$,
- $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : |a_n - A| < K\varepsilon$, $K \in \mathbb{R}$.
- $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : |a_n - A| \leq \varepsilon$.

Věta 1.9 (Aritmetika limit)**.** Nechť $\lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}$ a $\lim_{n\to\infty} b_n = B \in \mathbb{R}$. Pak platí:

1. $\lim_{n\to\infty} a_n + b_n = A + B$,
2. $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = AB$,
3. $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$, pokud $b_n \neq 0\ \forall n \in \mathbb{N}$ a $B \neq 0$.

Důkaz. Postupně dokážeme jednotlivá tvrzení:

1. Nechť $\varepsilon > 0$. Z $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ plyne, že existuje $n_A \in \mathbb{N}$ tak, že $\forall n \geq n_A$ je $|a_n - A| < \varepsilon$. Z $\lim_{n\to\infty} b_n = B$ dostáváme, že existuje $n_B \in \mathbb{N}$ tak, že $\forall n \geq n_B$ je $|b_n - B| < \varepsilon$. Zvolme $n_0 = \max\{n_A, n_B\}$. Pak $\forall n \geq n_0$ platí:
$$|(a_n + b_n) - (A + B)| = |(a_n - A) + (b_n - B)| \leq |a_n - A| + |b_n - B| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

2. Víme, že existuje $\lim_{n\to\infty} b_n = B$. $\{b_n\}$ je tedy omezená. Tím pádem existuje $K > 0$ takové, že $\forall n$ platí $|b_n| \leq K$. Z $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ opět dostaneme, že existuje $n_A \in \mathbb{N}$ tak, že $\forall n \geq n_A$ je $|a_n - A| < \varepsilon$. Z $\lim_{n\to\infty} b_n = B$ analogicky plyne, že existuje $n_B \in \mathbb{N}$ tak, že $\forall n \geq n_B$ platí $|b_n - B| < \varepsilon$. Zvolme $n_0 = \max\{n_A, n_B\}$. Pak $\forall n \geq n_0$ platí:
$$\begin{aligned} |a_n b_n - AB| &= |a_n b_n - b_n A + b_n A - AB| \leq |a_n b_n - b_n A| + |b_n A - AB| \\ &\leq |a_n - A||b_n| + |b_n - B||A| \leq \varepsilon K + \varepsilon |A| = \varepsilon(K + |A|). \end{aligned}$$

3. Nechť $\varepsilon_1 = \frac{|B|}{2}$. Pak existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ tak, že $\forall n \geq n_1$ platí:
$$|b_n - B| < \varepsilon_1 = \frac{|B|}{2}.$$
Z toho plyne, že $|b_n| > \frac{|B|}{2}$. Po úpravě dostaneme:
$$\frac{1}{|b_n|} < \frac{2}{|B|}.$$
Nechť $\varepsilon > 0$. Z $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ dostaneme, že existuje $n_A \in \mathbb{N}$ tak, že $\forall n \geq n_A$ platí $|a_n - A| < \varepsilon$. Z $\lim_{n\to\infty} b_n = B$ plyne, že existuje $n_B \in \mathbb{N}$ tak, že $\forall n \geq n_B$ platí $|b_n - B| < \varepsilon$. Položme $n_0 = \max\{n_A, n_B, n_1\}$. Pak $\forall n \geq n_0$ platí:
$$\begin{aligned} \left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{A}{B}\right| &= \frac{|a_n B - AB + AB - b_n A|}{|b_n||B|} \leq \frac{|a_n B - AB|}{|b_n||B|} + \frac{|AB - b_n A|}{|b_n||B|} \\ &\leq \frac{|a_n - A||B|}{|b_n||B|} + \frac{|A||B - b_n|}{|B||b_n|} < \frac{\varepsilon 2}{|B|} + \frac{|A|\varepsilon}{|B|}\frac{2}{|B|} = \varepsilon\left(\frac{2}{|B|} + \frac{2|A|}{|B|^2}\right). \end{aligned}$$

Tím jsme dokázali všechny tři body věty. □

Věta 1.10 (Limita a uspořádání)**.** Nechť $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, $\lim_{n\to\infty} b_n = B$, $A, B \in \mathbb{R}$. Pak platí:

1. Jestliže $A < B$, pak existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $\forall n \geq n_0$ platí $a_n < b_n$.

2. Jestliže existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $\forall n \geq n_0$ platí $a_n \geq b_n$, tak $A \geq B$.

Důkaz. Postupně dokážeme jednotlivá tvrzení:

1. Položme $\varepsilon = \frac{B-A}{2}$. Z $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ dostaneme, že existuje $n_A \in \mathbb{N}$ tak, že $\forall n \geq n_A$ je $|a_n - A| < \varepsilon$. Tedy musí platit:
$$a_n < A + \varepsilon = A + \frac{B-A}{2} = \frac{A+B}{2}.$$
Z $\lim_{n\to\infty} b_n = B$ plyne, že existuje $n_B \in \mathbb{N}$ tak, že $\forall n \geq n_B$ platí $|b_n - B| < \varepsilon$. Pak musí platit:
$$b_n > B - \varepsilon = B - \frac{B-A}{2} = \frac{A+B}{2}.$$
Zvolme $n_0 = \max\{n_A, n_B\}$. Pak $\forall n \geq n_0$ platí:
$$b_n > \frac{A+B}{2} > a_n.$$

2. Dokážeme sporem. Nechť $A < B$. Podle předchozího existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ tak, že $\forall n \geq n_1$ je $a_n < b_n$. Zároveň také existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $\forall n \geq n_0$ platí $a_n \geq b_n$. Pak pro libovolné $n \geq n_1$ a $n \geq n_0$ platí:
$$(a_n < b_n) \wedge (a_n \geq b_n).$$
To nemůže nastat, a tedy jsme dostali spor.

Tím jsme dokázali obě tvrzení. □

Věta 1.11 (O limitě vložené posloupnosti)**.** Nechť $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ jsou posloupnosti splňující:

1. Existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $\forall n \geq n_0$ platí $a_n \leq c_n \leq b_n$.

2. $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = A \in \mathbb{R}$.

Pak $\lim_{n\to\infty} c_n = A$.

Důkaz. Nechť $\varepsilon > 0$. Z $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ víme, že existuje $n_A \in \mathbb{N}$ tak, že $\forall n \geq n_A$ platí $|a_n - A| < \varepsilon$. Z toho snadno získáme, že $a_n > A - \varepsilon$. Z $\lim_{n\to\infty} b_n = A$ plyne, že existuje $n_B \in \mathbb{N}$ tak, že $\forall n \geq n_B$ je $|b_n - A| < \varepsilon$. Analogicky získáme $b_n < A + \varepsilon$. Položme $n_1 = \max\{n_0, n_A, n_B\}$. Pak $\forall n \geq n_1$ platí:
$$A - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < A + \varepsilon \Rightarrow |c_n - A| < \varepsilon.$$
Platí tedy, že $\lim_{n\to\infty} c_n = A$. □

Věta 1.12 (O limitě součinu omezené a mizející posloupnosti)**.** Nechť $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ a $\{b_n\}$ je omezená. Pak $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.

Důkaz. Posloupnost $\{b_n\}$ je omezená, tedy existuje $K > 0$ tak, že $\forall n$ platí $|b_n| \leq K$. Z $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ plyne, že k zadanému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $\forall n \geq n_0$ je $|a_n - 0| < \varepsilon$. K tomuto ε volme stejné n_0. Pak $\forall n \geq n_0$ platí:
$$|a_n b_n - 0| = |a_n b_n| \leq |a_n||b_n| \leq |a_n| K < \varepsilon K.$$
Věta je tedy dokázána. □

1.3 Nevlastní limita posloupnosti

Definice 1.13. Řekneme, že posloupnost má nevlastní limitu $+\infty$, respektive $-\infty$, pokud platí:

$$\forall K \in \mathbb{R}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : a_n > K\ (a_n < K).$$

Pro nevlastní limity platí následující věty: O jednoznačnosti limity, limita a uspořádání, o limitě vybrané posloupnosti, aritmetika limit, pokud jsou výrazy vpravo definovány. Tyto věty již nebudeme uvádět a dokazovat. Platí také pozměněná věta o limitě vložené posloupnosti, kterou uvedeme později.

Věta 1.14 (Limita typu $\frac{A}{0}$)**.** Nechť $\lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}^*$, $A > 0$ a $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$. Nechť dále existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $\forall n \geq n_0$ platí $b_n > 0$. Pak $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$.

Důkaz. Zvolme $K \in \mathbb{R}$. Z $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ víme, že máme dvě možnosti. Buďto $A = +\infty$. Pak existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ tak, že $\forall n \geq n_1$ platí $a_n > 1$. Nebo také může nastat, že $A \in \mathbb{R}$. Pak zvolme $\varepsilon = \frac{A}{2}$. Jistě existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ tak, že $\forall n \geq n_1$ máme:

$$|a_n - A| < \varepsilon = \frac{A}{2} \Rightarrow a_n > A - \varepsilon = \frac{A}{2}.$$

Položme tedy $\tilde{A} = \min\{1, \frac{A}{2}\}$. Pak $\forall n \geq n_1$ platí $a_n > \tilde{A}$. Z $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ plyne, že k $\varepsilon = \frac{\tilde{A}}{K}$ existuje $n_2 \in \mathbb{N}$ tak, že $\forall\ \exists n_2$ takové, že $\forall n \geq n_2$ platí:

$$|b_n - 0| < \frac{\tilde{A}}{K} \Rightarrow 0 < b_n < \frac{\tilde{A}}{K}.$$

Tedy dostaneme:

$$\frac{1}{b_n} > \frac{K}{\tilde{A}}.$$

Položme $n_3 = \max\{n_0, n_1, n_2\}$. Pak $\forall n \geq n_3$ platí:

$$\frac{a_n}{b_n} > \frac{\tilde{A}}{\tilde{A}} K = K.$$

Platí tedy, že $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$. Věta je tímto dokázána. □

Věta 1.15. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel a $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$. Potom je daná posloupnost zdola omezená.

Důkaz. Položme $K = 1$. Pak k tomuto K existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\forall n \geq n_0$ platí $a_n > 1$. Množina $\{a_n, n \in \mathbb{N}, n < n_0\}$ je konečná, a tedy omezená. Nechť M je některá její dolní závora. Potom:

$$a_n \geq \begin{cases} M, & 1 \leq n < n_0, \\ 1, & n \geq n_0. \end{cases}$$

$\forall n$ potom máme $a_n \geq \min\{M, 1\}$, takže daná posloupnost je zdola omezená. □

Věta 1.16. Nechť $\{a_n\}$ a $\{c_n\}$ jsou posloupnosti splňující:

1. Existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$ platí $a_n \leq c_n$.

2. $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

Pak $\lim_{n\to\infty} c_n = +\infty$.

Důkaz. Zvolme $K \in \mathbb{R}$. K němu nalezneme $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že $\forall n \geq n_1$ platí $a_n \geq K$. Pak $\forall n \geq \max\{n_0, n_1\}$ platí:
$$c_n \geq a_n \Rightarrow c_n \geq K.$$
Tedy $\lim_{n\to\infty} c_n = +\infty$. □

Věta 1.17. Nechť $\{b_n\}$ a $\{c_n\}$ jsou posloupnosti splňující:

1. Existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $\forall n \geq n_0$ platí $b_n \geq c_n$.

2. $\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$.

Pak $\lim_{n\to\infty} c_n = -\infty$.

Důkaz. Obdoba důkazu předešlé věty. □

1.4 Hlubší věty o limitách

Věta 1.18 (O limitě monotónní posloupnosti)**.** Každá monotónní posloupnost má limitu.

Důkaz. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $\{a_n\}$ je neklesající. Označíme $A = \sup(a_n)$. Budeme uvažovat dva případy:

1. $\underline{A = \infty}$: Nechť $K \in \mathbb{R}$. Pak $\sup(a_n) = +\infty$, a tedy a_n není shora omezená, z čehož plyne, že existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $a_{n_0} > K$. $\{a_n\}$ je neklesající, tedy $\forall n \geq n_0$ platí:
$$a_n \geq a_{n_0} > K.$$
Tím pádem $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

2. $\underline{A \in \mathbb{R}}$: Pak $\sup(a_n) = A$. Nechť $\varepsilon > 0$. Jistě platí, že $A - \varepsilon < A$. Dále z definice suprema existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $a_{n_0} > A - \varepsilon$. Nyní $\{a_n\}$ je neklesající, tedy $\forall n \geq n_0$ platí:
$$a_n \geq a_{n_0} > A - \varepsilon.$$
Dále z první vlastnosti suprema víme, že $\forall n$ platí:
$$a_n \leq A < A + \varepsilon.$$
Celkem $\forall n \geq n_0$ dostáváme:
$$|a_n - A| < \varepsilon.$$

Tím je důkaz hotov. □

Věta 1.19 (Cantorův princip vložených intervalů)**.** Nechť $\{[a_n, b_n]\}$ je posloupnost uzavřených intervalů splňující:

1. $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$,
2. $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$.

Pak je množina $\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]$ jednobodová.

Důkaz. Z 1. bodu vidíme, že $a_{n+1} \geq a_n$ a $b_{n+1} \leq b_n$. Navíc $\{a_n\}$ je shora omezená číslem b_1 a $\{b_n\}$ zdola omezená číslem a_1. Podle předchozí věty o limitě monotónní posloupnosti existuje $\lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}$ a $\lim_{n\to\infty} b_n = B \in \mathbb{R}$ tak, že platí:

$$0 = \lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = \lim_{n\to\infty} b_n - \lim_{n\to\infty} a_n = B - A \Rightarrow A = B.$$

Tedy $\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n] = \{A\}$. □

Věta 1.20 (Bolzano-Weierstrassova věta)**.** Z každé omezené posloupnosti lze vybrat konvergentní posloupnost.

Důkaz. Dokážeme půlením intervalů. $\{a_n\}$ je omezená, a tedy existuje $c_1, d_1 \in \mathbb{R}$ tak, že $\forall n$ platí $c_1 \leq a_n \leq d_1$. Zvolme $a_{n_1} \in [c_1, d_1]$ libovolně. Rozdělme $[c_1, d_1]$ na $[c_1, \frac{c_1+d_1}{2}]$ a $[\frac{c_1+d_1}{2}, d_1]$. V alespoň jednom tomto intervalu je nekonečně mnoho členů posloupnosti $\{a_n\}$. Pokud počet prvků

$$\left\{n : a_n \in \left[c_1, \frac{c_1 + d_1}{2}\right]\right\} = +\infty,$$

položme $c_2 = c_1$, $d_2 = \frac{c_1+d_1}{2}$. Pokud naopak počet prvků

$$\left\{n : a_n \in \left[\frac{c_1 + d_1}{2}, d_1\right]\right\} = +\infty,$$

položme $c_2 = \frac{c_1+d_1}{2}$, $d_2 = d_1$. Nalezneme $n_2 > n_1$ a $a_{n_2} \in [c_2, d_2]$. Dále pokračujme indukcí. Nechť počet prvků

$$\{n : a_n \in [c_k, d_k]\} = +\infty$$

a $n_k > n_{k-1}$. Dále $a_{n_k} \in [c_k, d_k]$. Rozdělme $[c_k, d_k]$ na $[c_k, \frac{c_k - d_k}{2}]$ a $[\frac{c_k+d_k}{2}, d_k]$. Pokud počet prvků

$$\left\{n : a_n \in \left[c_k, \frac{c_k + d_k}{2}\right]\right\} = +\infty,$$

položme $c_{k+1} = c_k$, $d_{k+1} = \frac{c_k+d_k}{2}$. Jestliže naopak je počet prvků

$$\left\{n : a_n \in \left[\frac{c_k + d_k}{2}, d_k\right]\right\} = +\infty,$$

položme $c_{k+1} = \frac{c_k+d_k}{2}$, $d_{k+1} = d_k$. Nalezneme $n_{k+1} > n_k$ a $a_{n_{k+1}} \in [c_{k+1}, d_{k+1}]$. Nyní máme posloupnost intervalů $[c_k, d_k]$ a $a_{n_k} \in [c_k, d_k]$. Víme, že $[c_{k+1}, d_{k+1}] \subset [c_k, d_k]$ a platí:

$$d_{k+1} - c_{k+1} = \frac{d_k - c_k}{2} = \frac{d_{k-1} - c_{k-1}}{2^2} = \cdots = \frac{d_1 - c_1}{2^k}.$$

Tedy $\lim_{k\to\infty} d_k - c_k = 0$, protože výraz $\frac{d_1-c_1}{2^k}$ jde k nule pro $k \to \infty$. Podle Cantorova principu vložených intervalů existuje A tak, že $\bigcap_{k=1}^{\infty}[c_k, d_k] = A$. Tudíž:

$$\lim_{k\to\infty} c_k = A = \lim_{k\to\infty} d_k.$$

Nyní $\{n_k\}$ je rostoucí posloupnost a $\{a_{n_k}\}$ je vybraná posloupnost. Víme, že $a_{n_k} \in [c_k, d_k]$. Tedy:

$$c_k \leq a_{n_k} \leq d_k.$$

Podle věty o limitě vložené posloupnosti můžeme psát:

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = A \in \mathbb{R}.$$

Tím je důkaz hotov. □

Definice 1.21. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost a označme $b_n = \sup\{a_k, k \geq n\}$, tedy $b_n = \sup\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots\}$. Dále $c_n = \inf\{a_k, k \geq n\}$, tedy $c_n = \inf\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots\}$. Pak $\{b_n\}$ je nerostoucí a $\{c_n\}$ je neklesající. Je-li $\{a_n\}$ shora neomezená, pak klademe $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$. Je-li $\{a_n\}$ zdola neomezená, pak klademe $\lim_{n\to\infty} c_n = -\infty$. Číslo $\lim_{n\to\infty} b_n$ nazý-váme limes superior a značíme $\limsup_{n\to\infty} a_n$. Číslo $\lim_{n\to\infty} c_n$ nazýváme limes inferior a značíme $\liminf_{n\to\infty} a_n$.

Poznámka. Zřejmě $\forall n$ platí:

$$c_n = \inf\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots\} \leq a_n \leq b_n = \sup\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots\}.$$

Věta 1.22 (Vztah limity, limes superior, limes inferior)**.** Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel a $A \in \mathbb{R}^*$. Pak $\lim_{n\to\infty} a_n = A \Leftrightarrow \limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n = A$.

Důkaz. Dokážeme jednotlivé implikace:

1. Pravá implikace: Nechť $A \in \mathbb{R}$. Pak je posloupnost $\{a_n\}$ omezená. Můžeme tedy definovat $b_n = \sup\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots\}$ a $c_n = \inf\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots\}$. Posloupnost $\{b_n\}$ je nerostoucí a posloupnost $\{c_n\}$ je neklesající. Zřejmě $\forall n$ platí $c_n \leq b_n$. Nechť $\varepsilon > 0$. Z definice $\lim_{n\to\infty} a_n$ víme, že existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $\forall n \geq n_0$ platí $|a_n - A| < \varepsilon$. Tedy:

   $$a_n \in (A - \varepsilon, A + \varepsilon).$$

   Tedy $\forall n \geq n_0$ platí:

   $$b_n = \sup\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots\} \leq A + \varepsilon.$$

   Analogicky $\forall n \geq n_0$ platí:

   $$c_n = \inf\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots\} \geq A - \varepsilon.$$

   Tím pádem $\forall n$ platí:

   $$A - \varepsilon \leq c_n \leq b_n \leq A + \varepsilon.$$

Podle věty o limitě a uspořádání dostaneme:

$$\lim_{n\to\infty} c_n \in [A-\varepsilon, A+\varepsilon],\ \lim_{n\to\infty} b_n \in [A-\varepsilon, A+\varepsilon]$$

Toto platí $\forall\varepsilon > 0$, a tedy:

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} b_n = A.$$

Je-li $A = +\infty$, pak je posloupnost $\{a_n\}$ zdola omezená. Podle definice dostáváme:

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \infty,\ \liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n.$$

Nechť $K \in \mathbb{R}$. K němu existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\forall n \geq n_0$ platí:

$$a_n > K \Rightarrow c_n \geq K.$$

Tedy $\lim_{n\to\infty} c_n = +\infty$. Analogicky bychom dokázali pro $A = -\infty$.

2. Levá implikace: Nechť $A \in \mathbb{R}$. Definujme $b_n = \sup\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots\}$ a $c_n = \inf\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots\}$. Z tohoto vidíme, že $\{a_n\}$ je omezená. Z předešlé poznámky víme, že $\forall n$ platí:

   $$c_n \leq a_n \leq b_n.$$

   Dále $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n = A$. Tedy podle věty o limitě vložené posloupnosti existuje $\lim_{n\to\infty} a_n = A$. Pokud $A = +\infty$, tak je posloupnost $\{a_n\}$ zdola omezená a definujeme opět posloupnost c_n jako výše. $\forall n$ je $c_n \leq a_n$. Dále:

   $$\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n$$

   Podle předpokladu platí:

   $$\lim_{n\to\infty} c_n = +\infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = +\infty.$$

   Analogicky bychom dokázali pro $A = -\infty$.

Tím jsme dokázali ekvivalenci. □

Definice 1.23. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel a $A \in \mathbb{R}^*$. Řekneme, že A je hromadná hodnota posloupnosti $\{a_n\}$, jestliže existuje vybraná posloupnost $\{a_{n_k}\}$ z $\{a_n\}$ tak, že $\lim_{k\to\infty} a_k = A$. Množinu hromadných hodnot značíme $H(\{a_n\})$.

Věta 1.24 (O hromadných hodnotách posloupnosti)**.** Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost. Potom $\limsup_{n\to\infty} a_n$ a $\liminf_{n\to\infty} a_n$ jsou hromadnými hodnotami posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a pro každou hromadnou hodnotu $A \in \mathbb{R}^*$ této posloupnosti platí:

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \leq A \leq \limsup_{n\to\infty} a_n.$$

Důkaz. Dokážeme pro $\limsup_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}$. Jelikož $A \in \mathbb{R}$, je posloupnost $\{a_n\}$ shora omezená. Označme $b_n = \sup\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots\}$, $\{b_n\}$ je nerostoucí a $\lim_{n\to\infty} b_n = A$. Z $\lim_{n\to\infty} b_n = A$ plyne, že pro $\varepsilon = 1$ existuje $m_1 \in \mathbb{N}$ tak, že:

$$|b_{m_1} - 1| < \varepsilon = 1.$$

Nyní z $b_{m_1} = \sup\{a_{m_1}, a_{m_1+1}, a_{m_1+2}, \dots\}$ plyne, že existuje $n_1 \in \mathbb{N}, n_1 \geq m_1$ tak, že:

$$b_{m_1} - 1 < a_{n_1} \leq b_{m_1} \Rightarrow |a_{n_1} - b_{m_1}| < 1 \Rightarrow |a_{n_1} - A| \leq |a_{n_1} - b_{m_1}| + |b_{m_1} - A| < 1 + 1 = 2,$$

kde jsme tedy využili vlastnosti suprema jako nejmenší horní závory. Dále budeme pokračovat indukcí. Mějme přirozená čísla $m_1, \dots, m_k, n_1, \dots, n_k$. Z $\lim_{n\to\infty} b_n = A$ plyne, že pro $\varepsilon = \frac{1}{k+1}$ existuje $m_{k+1} \in \mathbb{N}, m_{k+1} > n_k$ tak, že platí:

$$|b_{m_{k+1}} - A| < \varepsilon = \frac{1}{k+1}$$

Z $b_{m_{k+1}} = \sup\{a_{m_{k+1}}, a_{m_{k+1}+1}, \dots\}$ víme, že existuje $n_{k+1} \in \mathbb{N}, n_{k+1} \geq m_{k+1}$ tak, že:

$$b_{m_{k+1}} - \frac{1}{k+1} < a_{n_{k+1}} \leq b_{m_{k+1}} \Rightarrow |a_{n_{k+1}} - b_{n_{k+1}}| < \frac{1}{k+1}.$$

Z toho pak vidíme:

$$|a_{n_{k+1}} - A| \leq |a_{n_{k+1}} - b_{m_{k+1}}| + |b_{m_{k+1}} - A| < \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+1} = \frac{2}{k+1}.$$

Tedy jsme dostali rostoucí posloupnost $\{n_k\}$ $(n_{k+1} \geq m_{k+1} > n_k)$ tak, že:

$$|a_{n_k} - A| < \frac{2}{k} \Rightarrow \lim_{k\to\infty} a_{n_k} = A.$$

Tedy $\limsup_{n\to\infty} a_n = A \in H(\{a_n\})$. Analogicky bychom dokázali, že $\liminf_{n\to\infty} a_n = B \in H(\{a_n\})$. Zbývá dokázat, že $\forall A \in H(\{a_n\})$ platí:

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \leq A \leq \limsup_{n\to\infty} a_n.$$

Víme, že $\forall k$ platí $c_{n_k} \leq a_{n_k} \leq b_{n_k}$. Podle věty o limitě a uspořádání musí platit:

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \leq A \leq \limsup_{n\to\infty} a_n.$$

Pro $A \in \mathbb{R}^*$ nebudeme uvádět důkaz. □

Důsledek. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálých čísel a $A \in \mathbb{R}^*$. Pak:

1. $H(\{a_n\}) \neq \varnothing$,
2. $\liminf_{n\to\infty} a_n = \min\{H(\{a_n\})\}, \limsup_{n\to\infty} a_n = \max\{H(\{a_n\})\}$,
3. Je-li $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, pak $H(\{a_n\}_{n=1}^{\infty}) = \{A\}$.

Věta 1.25 (Bolzano-Cauchyho podmínka pro posloupnosti)**.** Posloupnost $\{a_n\}$ má vlastní limitu právě tehdy, když splňuje Bolzano-Cauchyho podmínku, tedy:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall m, n \geq n_0 : |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Důkaz. Nejprve dokážeme pravou implikaci, poté levou:

1. Pravá implikace: Nechť $\lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}^*$. Nechť $\varepsilon > 0$. Z definice limity víme, že existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $\forall n \geq n_0$ je $|a_n - A| < \varepsilon$. Tedy $\forall m \geq n_0$ a $n \geq n_0$ platí:

$$|a_m - a_n| \leq |a_m - A| + |A - a_n| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

2. Levá implikace: Nechť $\{a_n\}$ splňuje Bolzano-Cauchyho podmínku. Nechť $\varepsilon > 0$. Pak existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $\forall m, n \geq n_0$ platí $|a_n - a_m| < \varepsilon$. Toto použijeme pro $m = n_0$ a dostaneme:

$$a_{n_0} - \varepsilon < a_n < a_{n_0} + \varepsilon.$$

Tedy $\{a_n\}$ je omezená posloupnost. Nyní definujeme $b_n = \sup\{a_n, a_{n+1}, \dots\}$ a $c_n = \inf\{a_n, a_{n+1}, \dots\}$. Z definice b_n a c_n dostaneme, že $\forall n \geq n_0$ platí:

$$b_n \leq a_{n_0} + \varepsilon, c_n \geq a_{n_0} - \varepsilon.$$

Tedy:

$$a_{n_0} - \varepsilon \leq c_n \leq b_n \leq a_{n_0} + \varepsilon.$$

Podle věty o limitě a uspořádání máme:

$$a_{n_0} - \varepsilon \leq \liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n = \limsup_{n\to\infty} a_n \leq a_{n_0} + \varepsilon.$$

Odtud:

$$\limsup_{n\to\infty} a_n - \liminf_{n\to\infty} a_n \leq 2\varepsilon.$$

Toto platí $\forall \varepsilon > 0$. Tedy:

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n.$$

Vidíme, že tedy existuje vlastní limita $\lim_{n\to\infty} a_n$.

Tím jsme dokázali ekvivalenci. $\square$

2 Funkce jedné reálné proměnné

2.1 Základní pojmy

Definice 2.1. Funkcí jedné reálné proměnné rozumíme zobrazení $f\colon M \to \mathbb{R}$, kde $M \subset \mathbb{R}$.

Definice 2.2. Řekneme, že funkce $f\colon M \to \mathbb{R}$ je sudá, jestliže $\forall x \in M$ platí:

$$(-x \in M) \wedge (f(x) = f(-x).$$

Funkce je lichá, jestliže $\forall x \in M$ platí:

$$(-x \in M) \wedge (f(x) = -f(-x)).$$

Funkce je periodická, jestliže existuje $p > 0$ tak, že $\forall x \in M$ platí:

$$(x + p \in M) \wedge (f(x) = f(x + p)).$$

Definice 2.3. Řekneme, že funkce $f\colon M \to \mathbb{R}, M \subset \mathbb{R}$ je omezená (omezená shora, omezená zdola), jestliže $f(M)$ je omezená (shora omezená, zdola omezená).

Definice 2.4. Nechť $\delta > 0$ a $a \in \mathbb{R}$. Prstencové okolí bodu je:

$$P(a, \delta) = (a - \delta, a + \delta) \setminus \{a\},\ P(+\infty, \delta) = \left(\frac{1}{\delta}, +\infty\right),\ P(-\infty, \delta) = \left(-\infty, -\frac{1}{\delta}\right).$$

Pravé a levé prstencové okolí bodu a je:

$$P_+(a, \delta) = (a, a + \delta),\ P_-(a, \delta) = (a - \delta, a).$$

Okolí bodu je:

$$B(a, \delta) = (a - \delta, a + \delta),\ B(+\infty, \delta) = \left(\frac{1}{\delta}, +\infty\right),\ B(-\infty, \delta) = \left(-\infty, -\frac{1}{\delta}\right).$$

Pravé a levé okolí bodu a je:

$$B_+(a, \delta) = [a, a + \delta),\ B_-(a, \delta) = (a - \delta, a].$$

2.2 Limita funkce, spojitost, věty o limitách

Definice 2.5. Nechť $f\colon M \to \mathbb{R}, M \subset \mathbb{R}$. Řekneme, že f má v bodě $a \in \mathbb{R}^*$ limitu rovnou $A \in \mathbb{R}^*$, jestliže platí:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in P(a, \delta) : f(x) \in B(A, \varepsilon).$$

Značíme $\lim_{x\to a} f(x) = A$.

Poznámka. Definici lze také napsat následovně:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : f(P(a, \delta)) \subset B(A, \varepsilon).$$

Definice 2.6. Nechť $f\colon M \to \mathbb{R}, M \subset \mathbb{R}$. Řekneme, že f má v bodě $a \in \mathbb{R}$ limitu zprava rovnou $A \in \mathbb{R}^*$, jestliže platí:

$$\forall \varepsilon\ \exists \delta > 0\ \forall x \in P_+(a, \delta) : f(x) \in B(A, \varepsilon).$$

Pokud se jedná o limitu zleva, pak píšeme:

$$\forall \varepsilon\ \exists \delta > 0\ \forall x \in P_-(a, \delta) : f(x) \in B(A, \varepsilon).$$

Věta 2.7 (Heineho věta)**.** Nechť $A \in \mathbb{R}^*$, $f\colon M \to \mathbb{R}$ a f je definovaná na prstencovém okolí bodu $a \in \mathbb{R}^*$. Následující podmínky jsou ekvivalentní:

1. $\lim_{x\to a} f(x) = A$.
2. Pro každou posloupnost $\{x_n\}$ takovou, že $\forall n$ platí $x_n \in M, x_n \neq a$ a $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ platí:
$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A.$$

Důkaz. Dokážeme obě implikace:

1. Pravá implikace: Mějme posloupnost $\{x_n\}$ splňující $x_n \in M, x_n \neq a, \lim_{n\to\infty} x_n = a$. Nechť $\varepsilon > 0$. Podle prvního předpokladu Heineho věty exsituje $\delta > 0$ tak, že $\forall x \in P(a, \delta)$ platí:
$$f(x) \in B(A, \varepsilon)$$
Jelikož $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, tak k tomuto $\delta > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $\forall n \geq n_0$ platí $x_n \in B(a, \delta)$. Dále $\forall n$ platí $x_n \neq a$, a tedy $x_n \in P(a, \delta)$. Jelikož $f(x) \in B(A, \varepsilon)$, dostaneme:
$$f(x_n) \in B(A, \varepsilon).$$
To je přesně definice $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$.
2. Levá implikace: Dokážeme následující tvrzení: $\neg 1 \Rightarrow \neg 2$. Negace prvního tvrzení je:
$$\exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x \in P(a, \delta) : f(x) \notin B(A, \varepsilon).$$
Toto použijeme pro $\delta_n = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$. Pak existuje $x_n \in P\left(a, \frac{1}{n}\right)$ tak, že platí
$$f(x_n) \notin B(A, \varepsilon)$$
Nyní $\forall n$ platí $x_n \neq a$ a $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Na $\{x_n\}$ můžeme použít druhou podmínku Heineho věty. Dostaneme $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$. To je spor s $f(x_n) \notin B(A, \varepsilon)$.

Tím jsme dokázali ekvivalenci. □

Poznámka. Existují varianty pro jednostranné limity a pro spojitost f v a:

- 1. $\lim_{x \to a_+} f(x) = A$,
  2. $\forall x_n \to a, x_n > a : \lim_{n \to \infty} f(x_n) = A$.
- 1. f je spojitá v a, $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$,
  2. $\forall x_n \to a : \lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(a)$.

Věta 2.8 (O jednoznačnosti limity)**.** Funkce f má v bodě a nejvýše jednu limitu.

Důkaz. Dokážeme sporem. Nechť $\lim_{x \to a} f(x) = A$ a $\lim_{x \to a} f(x) = B$ a $A \neq B$. Nechť $\{x_n\}$ je posloupnost taková, že $\lim_{n \to \infty} x_n = a$ a $\forall n$ platí $x_n \neq a$. Podle Heineho věty:

$$\lim_{x \to a} f(x_n) = A, \ \lim_{x \to a} f(x_n) = B.$$

Toto je spor s jednoznačností limity posloupnosti. □

Věta 2.9 (Limita a omezenost)**.** Nechť f má vlastní limitu v bodě $a \in \mathbb{R}^*$. Pak existuje $\delta > 0$ takové, že f je na $P(a, \delta)$ omezená.

Důkaz. Označme $A = \lim_{x \to a} f(x)$. Víme, že $A \in \mathbb{R}$. Pro $\varepsilon = 1$ nalezneme $\delta > 0$ tak, že $\forall x \in P(a, \delta)$ platí:

$$f(x) \in B(A, 1) = (A - 1, A + 1).$$

Tedy:

$$f(P(a, \delta)) \subset (A - 1, A + 1).$$

Z toho plyne, že f je na $P(a, \delta)$ omezená. □

Věta 2.10 (O aritmetice limit)**.** Nechť $a \in \mathbb{R}^*, \lim_{x \to a} f(x) = A \in \mathbb{R}^*$ a $\lim_{x \to a} g(x) = B \in \mathbb{R}^*$. Pak platí:

1. $\lim_{x \to a}(f(x) + g(x)) = A + B$, má-li pravá strana smysl,
2. $\lim_{x \to a} f(x)g(x) = AB$, má-li pravá strana smysl,
3. $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$, má-li pravá strana smysl.

Důkaz. Dokážeme pouze první tvrzení. Zbylé dvě bychom dokázali analogicky. Nechť $\{x_n\}$ je posloupnost, $\lim_{n \to \infty} x_n = a$ a $\forall n$ platí $x_n \neq a$. Z Heineho věty 1. $\to$ 2. dostaneme:

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = A, \ \lim_{n \to \infty} g(x_n) = B.$$

Podle aritmetiky limit pro posloupnosti platí:

$$\lim_{n \to \infty} (f(x_n) + g(x_n)) = A + B.$$

Nyní z Heineho věty 2. $\to$ 1. dostaneme:

$$\lim_{x \to a}(f(x) + g(x)) = A + B.$$

První tvrzení tedy platí. □

Důsledek. Nechť jsou funkce f a g spojité v bodě $a \in \mathbb{R}$. Pak jsou funkce $f+g, fg$ spojité v a. Pokud navíc $g(a) \neq 0$, pak je funkce $\frac{f}{g}$ spojitá v a. Speciálně tedy platí, že polynomy jsou spojité na $\mathbb{R}$ a racionální lomené funkce $\frac{P(x)}{Q(x)}$ jsou spojité ve všech x, kde $Q(x) \neq 0$.

Věta 2.11 (Limita a uspořádání)**.** Nechť $a \in \mathbb{R}^*$.

1. Nechť $\lim_{x\to a} f(x) > \lim_{x\to a} g(x)$. Pak existuje prstencové okolí $P(a,\delta)$ tak, že $\forall x \in P(a,\delta)$ platí $f(x) > g(x)$.

2. Nechť existuje prstencové okolí $P(a,\delta)$ tak, že $\forall x \in P(a,\delta)$ platí $f(x) \leq g(x)$. Nechť existují $\lim_{x\to a} f(x)$ a $\lim_{x\to a} g(x)$. Potom platí, že $\lim_{x\to a} f(x) \leq \lim_{x\to a} g(x)$.

3. Nechť na nějakém prstencovém okolí $P(a,\eta)$ platí $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$. Nechť $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x)$. Pak existuje $\lim_{x\to a} h(x)$ a rovná se jim.

Důkaz. Postupně dokážeme jednotlivé body:

1. Označme $A = \lim_{x\to a} f(x)$ a $B = \lim_{x\to a} g(x)$. Víme, že $A > B$. Nalezneme $\varepsilon > 0$ tak, aby $B(A,\varepsilon) \cap B(B,\varepsilon) = \varnothing$. Navíc $\forall c \in B(A,\varepsilon)$ a $\forall d \in B(B,\varepsilon)$ platí $c > d$. K tomuto $\varepsilon > 0$ nalezneme $\delta_1 > 0$ a $\delta_2 > 0$ tak, že:
$$\forall x \in P(a,\delta_1) : f(x) \in B(A,\varepsilon),$$
$$\forall x \in P(a,\delta_2) : g(x) \in B(B,\varepsilon).$$
Položme $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Pak $\forall x \in P(a,\delta)$ platí:
$$f(x) \in B(A,\varepsilon),\ g(x) \in B(B,\varepsilon) \Rightarrow f(x) > g(x).$$

2. Dokážeme sporem. Víme, že $f(x) \leq g(x)$ na $P(a,\delta)$, ale $\lim_{x\to a} f(x) > \lim_{x\to a} g(x)$. Podle první části existuje $\delta_1 > 0$ tak, že $\forall x \in P(a,\delta_1)$ platí $f(x) > g(x)$. To je spor s $f(x) \leq g(x)$ na $P(a,\delta)$.

3. Označme $A = \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x)$. Nechť nejprve $A \in \mathbb{R}$. Nechť $\varepsilon > 0$. Nalezneme $\delta_1 > 0$ tak, že $\forall x \in P(a,\delta_1)$ platí:
$$A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon,$$
$$A - \varepsilon < g(x) < A + \varepsilon.$$
Nechť $\delta = \min\{\delta_1, \eta\}$. Pak $\forall x \in P(a,\delta)$ platí:
$$A - \varepsilon < f(x) \leq h(x) \leq g(x) < A + \varepsilon \Rightarrow A - \varepsilon < h(x) < A + \varepsilon.$$
Nechť $A = +\infty$ (analogicky pro $A = -\infty$). Nechť $\varepsilon > 0$. Nalezneme $\delta_1 > 0$ tak, že $\forall x \in P(a,\delta_1)$ platí:
$$f(x) \in B(+\infty,\varepsilon) = \left(\frac{1}{\varepsilon}, +\infty\right).$$
Nechť $\delta = \min\{\delta_1, \eta\}$. Pak $\forall x \in P(a,\delta)$ platí:
$$\frac{1}{\varepsilon} < f(x) \leq h(x) \Rightarrow h(x) \in B(+\infty,\varepsilon).$$

Tímto jsme dokázali všechny body tvrzení. □

Věta 2.12 (Limita složené funkce)**.** Nechť funkce f a g splňují $\lim_{x\to c} g(x) = A$ a $\lim_{y\to A} f(y) = B$. Je-li navíc splněna alespoň jedna z podmínek:

1. f je spojitá v A,
2. $\exists \eta > 0\ \forall x \in P(c,\eta) : g(x) \neq A$.

Pak platí $\lim_{x\to c} f(g(x)) = B$.

Důkaz. Ukážeme, že je-li splněna alespoň jedna z podmínek, pak věta platí:

1. Nechť $\varepsilon > 0$. Z $\lim_{y\to A} f(y) = B$ víme, že existuje $\psi > 0$ tak, že:

   $$f(P(A,\psi)) \subset B(B,\varepsilon).$$

   f je spojitá v A, a tedy $B = \lim_{y\to A} f(y) = f(A)$. Dokonce tedy:

   $$f(B(A,\psi)) \subset B(B,\varepsilon)$$

   K pevnému $\psi > 0$ nalezneme z $\lim_{x\to c} g(x) = A$ takové $\delta > 0$, že:

   $$g(P(c,\delta)) \subset B(A,\psi)$$

   Nyní:

   $$f(g(P(c,\delta))) \subset f(B(A,\psi)) \subset B(B,\varepsilon).$$

   Tedy $\lim_{x\to c} f(g(x)) = B$.

2. Nechť $\varepsilon > 0$. Z $\lim_{y\to A} f(y) = B$ plyne, že: $\exists \psi > 0$ tak, že:

   $$f(P(A,\psi)) \subset B(B,\varepsilon)$$

   K $\psi > 0$ plyne z $\lim_{x\to c} g(x) = A$, že $\exists \delta > 0$ tak, že:

   $$g(P(c,\delta)) \subset B(A,\psi).$$

   Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $\delta < \eta$. Z druhé podmínky dostaneme, že $\forall x \in P(c,\delta) \subset P(c,\eta)$ platí $g(x) \neq A$. Tedy dokonce:

   $$g(P(c,\delta)) \subset P(A,\psi).$$

   Dostaneme:

   $$f(g(P(c,\delta))) \subset f(P(A,\psi)) \subset B(B,\varepsilon)$$

   Pak tedy platí, že $\lim_{x\to c} f(g(x)) = B$.

Tím jsme dokázali, že stačí jedna z podmínek pro splnění předpokladu. □

Věta 2.13 (Limita monotónní funkce)**.** Nechť f je monotónní funkce na intervalu (a,b), $a,b \in \mathbb{R}^*$. Potom existuje $\lim_{x\to a^+} f(x)$ a $\lim_{x\to b^-} f(x)$.

Důkaz. Nechť f je neklesající. Pro nerostoucí funkci je důkaz analogický. Označme $m = \inf_{x \in (a,b)}\{f(x)\}$. Dokážeme, že $\lim_{x\to a^+} f(x) = m$ v případě, že $m \in \mathbb{R}$. Analogicky bychom dokázali pro $m = -\infty$ a pro $\lim_{x\to b^-} f(x) = \sup_{x\in(a,b)}\{f(x)\}$. Nechť $\varepsilon > 0$. Z vlastnosti infima víme, že existuje $y \in f((a,b))$ tak, že $y < m + \varepsilon$. Z definice $f((a,b))$ víme, že existuje $x' \in (a,b)$ tak, že platí $f(x') = y$. f je neklesající, a proto $\forall x \in (y, x')$ platí:

$$f(x) \leq f(x') = y < m + \varepsilon.$$

m je dolní závora $f((a,b))$, a tedy $\forall x \in (a,b)$ platí:

$$m - \varepsilon < m \leq f(x).$$

Celkem $\forall x \in (a, x')$ platí:

$$m - \varepsilon < f(x) < m + \varepsilon.$$

Tedy $\lim_{x\to a^+} f(x) = m$. □

Věta 2.14 (Bolzano-Cauchyho podmínka pro funkce)**.** Nechť $a \in \mathbb{R}^*$ a $\delta_0 > 0$. Nechť f je funkce definovaná alespoň na $P(a,\delta_0)$. Potom existuje vlastní $\lim_{x\to a} f(x)$ právě tehdy, když je splněna následující Bolzano-Cauchyho podmínka:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x, y \in P(a,\delta) : |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Důkaz. Nejdříve dokážeme pravou implikaci, poté levou:

1. Pravá implikace: Nechť $\varepsilon > 0$ a $\lim_{x\to a} f(x) = A \in \mathbb{R}$. Z definice limity plyne, že existuje $\delta > 0$ tak, že $\forall x \in P(a,\delta)$ platí:

   $$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

   Toto δ použijeme pro BC podmínku a dostaneme, že $\forall x, y \in P(a,\delta)$ platí:

   $$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - A| + |A - f(y)| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

   Toto je ekvivalentní s BC podmínkou.

2. Levá implikace: Využijeme BC podmínky pro posloupnosti. Podle ní existuje vlastní $\lim_{n\to\infty} a_n$ právě tehdy, když:

   $$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \; \forall m, n \geq n_0 : |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

   Předpokládáme BC podmínku a chceme, aby existovalo $A \in \mathbb{R}$ tak, že $\lim_{x\to a} f(x) = A$. Podle Heineho věty toto platí právě tehdy, když pro každou posloupnost $x_n \to a, x_n \neq a$ platí, že $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$. Nechť tedy $x_n \to a, x_n \neq a$. Tvrdíme, že $a_n = f(x_n)$ splňuje BC podmínku pro posloupnosti. Dokážeme. Nechť $\varepsilon > 0$. Nalezneme $\delta > 0$ z BC podmínky pro funkce. K tomuto $\delta > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $\forall n \geq n_0$ platí $x_n \in P(a,\delta)$, neboť $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Tedy $\forall m, n \geq n_0$ platí:

   $$|a_n - a_m| = |f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon.$$

Předpokládali jsme BC podmínku pro funkce a podle ní našli δ tak, že $x_n \in P(a,\delta)$. Nerovnost výše je tedy správná. $a_n = f(x_n)$ tím pádem splňuje BC podmínku pro posloupnosti, protože jsme našli m, n tak, že $\forall m, n \geq n_0$ platí, že $|a_n - a_m| < \varepsilon$. Tedy existuje vlastní limita:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} f(x_n).$$

Nyní pro $n \to \infty$ nechť $x_n \to a, x_n \neq a$ a $y_n \to a, y_n \neq a$. Podle předchozího existuje $A, B \in \mathbb{R}$ tak, že:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A, \lim_{n\to\infty} f(y_n) = B.$$

Nechť $z_n = x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, \ldots$ je nová posloupnost tak, že $\lim_{n\to\infty} z_n = a$ a $\forall n$ platí $z_n \neq a$. Pak platí:

$$\lim_{n\to\infty} f(z_n) = A = B,$$

podle věty o limitě posloupnosti.

Tím jsme dokázali Bolzan-Cauchyho podmínku pro funkce. □

2.3 Funkce spojité na intervalu

Definice 2.15. Vnitřními body intervalu J rozumíme ty body z intervalu J, které nejsou krajními.

Definice 2.16. Nechť f je funkce a J je interval. Řekneme, že f je spojitá na J, jestliže je spojitá ve všech vnitřních bodech J. Je-li počáteční bod J prvkem J, tak požadujeme i spojitost zprava v tomto bodě. Je-li koncový bod J prvkem J, tak požadujeme i spojitost zleva v tomto bodě.

Věta 2.17 (Darbouxova věta)**.** Nechť f je spojitá na intervalu $[a,b]$ a platí $f(a) < f(b)$. Pak pro každé $y \in ((f(a), f(b))$ existuje $x_0 \in (a,b)$ tak, že $f(x_0) = y$.

Důkaz. Nechť $y \in (f(a), f(b))$ a položme $M = \{z \in [a,b] : f(z) < y\}$. Množina M je neprázdná, alespoň $a \in M$, a je shora omezená číslem b, a tedy existuje $x_0 = \sup M$. Zřejmě $x_0 \in [a,b]$. Dokážeme, že $f(x_0) = y$ vyloučením případů $f(x_0) > y$ a $f(x_0) < y$.

1. $\underline{f(x_0) > y}$: Nelezneme $\varepsilon > 0$ tak, aby $f(x_0) - \varepsilon > y$. Z definice $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) > y$ nalezneme $\delta > 0$ tak, že $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0]$ platí:

   $$f(x) > y.$$

   Tedy z definice množiny M víme, že $(x_0 - \delta, x_0]$ neleží v M, tedy x_0 není nejmenší horní závora množiny M. Tím jsme došli ke sporu.

2. $\underline{f(x_0) < y}$: Nalezneme $\varepsilon > 0$ tak, aby $f(x_0) + \varepsilon < y$. Z definice $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ nalezneme $\delta > 0$ tak, že $\forall x \in [x_0, x_0 + \delta)$ platí:

   $$f(x) < f(x_0) + \varepsilon < y.$$

   Tedy platí:

   $$[x_0, x_0 + \delta) \subset M.$$

   Tedy x_0 není horní závora M. To je ale spor.

Tím pádem můžeme napsat závěr:

$$f(x_0) = y \Rightarrow x_0 \neq a, x_0 \neq b \Rightarrow x_0 \in (a, b).$$

Věta tedy platí. □

Důsledek. Nechť J je interval a funkce $f\colon J \to \mathbb{R}$ je spojitá. Pak $f(J)$ je interval.

Definice 2.18. Nechť $f\colon M \to \mathbb{R}, M \subset \mathbb{R}$. Řekneme, že funkce f nabývá v bodě a maxima (minima) na M, jestliže $\forall x \in M$ platí:

$$f(x) \leq f(a) \ (f(x) \geq f(a)).$$

Řekneme, že funkce f nabýva v bodě a ostrého maxima (ostrého minima) na M, jestliže $\forall x \in M$ a $x \neq a$ platí:

$$f(x) < f(a) \ (f(x) > f(a)).$$

Řekneme, že funkce f nabýva v bodě a lokálního maxima (minima, ostrého lokálního maxima, ostrého lokálního minima), jestliže existuje $\delta > 0$ tak, že f nabývá na $M \cap B(a, \delta)$ svého maxima (minima, ostrého maxima, ostrého minima).

Věta 2.19 (Spojitost funkce a nabývání extrémů)**.** Nechť f je spojitá na $[a, b]$. Pak f nabývá na $[a, b]$ svého maxima a minima.

Důkaz. Označme $G = \sup\{f([a, b])\}$. Z definice suprema víme, že existuje $y_n \in f([a, b])$ tak, že $y_n \to G$ pro $n \to \infty$. Z definice $f([a, b])$ víme, že existuje $x_n \in [a, b]$ tak, že platí:

$$f(x_n) = y_n.$$

Podle Bolzano-Weierstrassovy věty víme, že existuje $x_{n_k} \to x^* \in [a, b]$ pro $k \to \infty$. Pokud $x_{n_k} \to x^*$ pro $k \to \infty$, pak podle Heineho věty platí:

$$f(x_{n_k}) = y_{n_k} \to f(x^*)$$

pro $k \to \infty$. Posloupnost y_n konverguje ke G, tedy podle věty o limitě vybrané posloupnosti konverguje i posloupnost y_{n_k} ke G. Tím pádem můžeme psát:

$$G = f(x^*).$$

V x^* je tedy nabyto maximum. Pro minimum by byl důkaz analogický. □

Důsledek. Nechť f je spojitá funkce na $[a, b]$. Pak f je na $[a, b]$ omezená.

Definice 2.20. Nechť f je funkce a J je interval. Řekneme, že f je prostá na J, jestliže $\forall x, y \in J$ platí $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$. Pro prostou funkci $f\colon J \to \mathbb{R}$ definujeme funkci $f^{-1}\colon f(J) \to \mathbb{R}$ předpisem:

$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y.$$

Věta 2.21 (O inverzní funkci)**.** Nechť f je spojitá a rostoucí (popřípadě spojitá a klesající) funkce na intervalu J. Potom f^{-1} je spojitá a rostoucí (klesající) na intervalu $f(J)$.

Důkaz. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že f je spojitá a rostoucí. Důkaz rozdělíme do tří kroků:

1. Víme, že f^{-1} je definovaná na intervalu $f(J)$. Chceme dokázat, že f^{-1} je rostoucí. To dokážeme sporem. Nechť $y_1 = f(x_1) < y_2 = f(x_2)$ (to je vlastně definice rostoucí funkce f), ale $f^{-1}(y_1) = x_1 \geq f^{-1}(y_2) = x_2$ (tedy předpokládáme, že f^{-1} je nerostoucí). Pak platí:
$$x_1 \geq x_2 \Rightarrow f(x_1) = y_1 \geq f(x_2) = y_2,$$
protože f je rostoucí. To je ale spor. f^{-1} je tedy rostoucí, pokud f je rostoucí.

2. Nyní dokážeme spojitost ve vnitřním bodě $y_0 \in f(J)$. Víme, že $f^{-1}(y_0) = x_0$ a x_0 je vnitřní bod J. Nechť $\varepsilon > 0$. Existují x_1, x_2 tak, že:
$$x_1, x_2 \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap J,\ x_1 < x_0 < x_2.$$
Pak platí:
$$f(x_1) < f(x_0) = y_0 < f(x_2).$$
Zvolme $\delta = \min\{f(x_2) - f(x_0), f(x_0) - f(x_1)\}$. Pak platí:
$$B(f(x_0), \delta) = B(y_0, \delta) \subset (f(x_1), f(x_2)).$$
Nyní můžeme psát:
$$f^{-1}(B(y_0, \delta)) \subset (x_1, x_2) \subset (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \Rightarrow \lim_{y \to y_0} f^{-1}(y) = f^{-1}(y_0) = x_0.$$
Tím je spojitost dokázána.

3. Nakonec dokážeme spojitost v levém krajním bodě $y_0 \in f(J)$. Pro pravý krajní bod by důkaz byl analogický. Víme, že $f^{-1}(y_0) = x_0$ a x_0 je krajní bod J. Nechť $\varepsilon > 0$. Pak existuje x_1 tak, že:
$$x_1 \in (x_0, x_0 + \varepsilon) \cap J,\ x_0 < x_1 \Rightarrow f(x_0) < f(x_1).$$
Položme $\delta = f(x_1) - f(x_0)$. Pak:
$$B_+(y_0, \delta) = [y_0, y_0 + \delta) = [y_0, f(x_1)).$$
Nyní můžeme zapsat:
$$f^{-1}(B_+(y_0, \delta)) = [x_0, x_1) \subset (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon).$$
Důkaz spojitosti v krajních bodech je tímto hotov.

Tím je věta dokázána. $\square$

2.4 Elementární funkce

Věta 2.22 (Zavedení exponenciely)**.** Existuje funkce $\mathrm{e}^x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující:

1. e^x je rostoucí na $\mathbb{R}$,
2. $\forall x, y \in \mathbb{R} : \mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x \mathrm{e}^y$,
3. $\mathrm{e}^0 = 1$,
4. $\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1$,
5. e^x je spojitá na $\mathbb{R}$.

Definice 2.23. Funkcí inverzní k e^x je logaritmus $\ln(x)$.

Věta 2.24 (Vlastnosti logaritmu)**.** Funkce $\ln(x)$ splňuje:

1. $\ln(x)\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$ je spojitá a rostoucí funkce,
2. $\forall x, y > 0 : \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$,
3. $\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$.

Důkaz. Postupně dokážeme jednotlivá tvrzení.

1. e^x je spojitá a rostoucí, tedy existuje inverzní funkce:
$$\mathrm{e}^x\colon \mathbb{R} \to (0, \infty) \Rightarrow \ln(x)\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}.$$
Podle věty o inverzní funkci je $\ln(x)$ spojitá a rostoucí funkce.

2. Můžeme označit:
$$\ln(x) = A \Leftrightarrow \mathrm{e}^A = x,$$
$$\ln(y) = B \Leftrightarrow \mathrm{e}^B = y.$$
Z předchozí věty vidíme, že můžeme psát:
$$xy = \mathrm{e}^A \mathrm{e}^B = \mathrm{e}^{(A+B)} \Rightarrow \ln(xy) = A + B.$$

3. Chceme ukázat, že $\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$. Označme:
$$f(y) = \frac{\mathrm{e}^y - 1}{y},\ y \neq 0,$$
$$g(x) = \ln(x),\ g(x) \neq 0\ \forall x \neq 1.$$
Víme, že $\lim_{y\to 0} f(y) = 1$ z přechozí věty. Dále $\lim_{x\to 1} g(x) = 0$. Z druhé podmínky věty o limitě složené funkce dostaneme:
$$\lim_{x\to 1} f(g(x)) = 1 = \lim_{x\to 1} \frac{\mathrm{e}^{\ln(x)} - 1}{\ln(x)} = \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\ln(x)}.$$

Tím jsme dokázali všechny body věty. □

Definice 2.25. Nechť $a > 0$ a $b \in \mathbb{R}$. Pak definujeme $a^b = \mathrm{e}^{b\ln(a)}$. Je-li $b > 0$, pak definujeme $\log_b(a) = \frac{\ln(a)}{\ln(b)}$.

Věta 2.26 (Zavedení funkcí $\sin(x)$ a $\cos(x)$)**.** Existují takové funkce $\sin(x)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a $\cos(x)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující:

1. $\forall x, y \in \mathbb{R}$ platí následující vztahy:

$$\begin{aligned}\sin(x+y) &= \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y),\\ \cos(x+y) &= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y),\\ \cos(-x) &= \cos(x),\ \sin(-x) = \sin(x),\end{aligned}$$

2. existuje kladné číslo π tak, že $\sin(x)$ je rostoucí na $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ a $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$,
3. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.

Definice 2.27. Pro $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ a $y \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ definujeme funkce $\mathrm{tg}(x)$ a $\mathrm{cotg}(x)$ následujícími vztahy:

$$\mathrm{tg}(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)},\ \mathrm{cotg}(y) = \frac{\cos(y)}{\sin(y)}.$$

Poznámka. Složením dvou spojitých funkcí dostaneme opět spojitou funkci. Toto tvrzení je triviální a použijeme ho při důkazu následující věty.

Věta 2.28 (Spojitost funkcí $\sin(x), \cos(x), \mathrm{tg}(x)$ a $\mathrm{cotg}(x)$)**.** Funkce $\sin(x), \cos(x), \mathrm{tg}(x)$ a $\mathrm{cotg}(x)$ jsou spojité na svém definičním oboru.

Důkaz. Chceme dokázat, že platí:

$$\lim_{x\to a} \sin(x) = \sin(a).$$

V bodě 0 dostaneme:

$$\lim_{x\to 0} \sin(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} x = 0 = \sin(0).$$

Budeme postupovat následovně:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}(\sin(x) - \sin(a)) &= \lim_{x\to a} 2\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)\cos\left(\frac{x+a}{2}\right)\\ &= 2\lim_{x\to a} \frac{\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)}{\frac{x-a}{2}} \lim_{x\to a} \frac{x-a}{2} \lim_{x\to a} \cos\left(\frac{x+a}{2}\right) = 0,\end{aligned}$$

kde jsme využili věty o limitě složené funkce, a sice druhé podmínky, tedy $\frac{x-a}{2} \neq 0$ například na prstencovém okolí $P(0,1)$. V předchozí poznámce jsme uvedli, že složením spojitých funkcí dostaneme spojitou funkci. Jelikož $\cos(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, je funkce $\cos(x)$ na svém definičním oboru spojitá. Dále $\mathrm{tg}(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ a $\mathrm{cotg}(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$ jsou spojité na svém definičním oboru z aritmetiky limit. □

Definice 2.29. Nechť $\sin^*(x) = \sin(x)$ pro $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos^*(x) = \cos(x)$ pro $x \in [0, \pi]$, $\mathrm{tg}^*(x) = \mathrm{tg}(x)$ pro $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $\mathrm{cotg}^*(x) = \mathrm{cotg}(x)$ pro $x \in (0, \pi)$. Pak definujeme cyklometrické funkce $\arcsin(x), \arccos(x), \mathrm{arctg}(x)$ a $\mathrm{arccotg}(x)$ jako inverzní funkce k $\sin^*(x), \cos^*(x), \mathrm{tg}^*(x)$ a $\mathrm{cotg}^*(x)$.

3 Derivace funkce jedné reálné proměnné a Taylorův polynom

3.1 Derivace funkce jedné reálné proměnné

Definice 3.1. Nechť f je reálná funkce a $a \in \mathbb{R}$. Pak derivací f v bodě a rozumíme:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Derivací f v bodě a zprava rozumíme:

$$f'_+(a) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Derivací f v bodě a zleva rozumíme:

$$f'_-(a) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Poznámka. Platí následující tvrzení:

1. $f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$,
2. $f'(a) = A \Leftrightarrow f'_+(a) = A \wedge f'_-(a) = A$.

Věta 3.2 (Vztah derivace a spojitosti)**.** Nechť má funkce f v bodě $a \in \mathbb{R}$ derivaci $f'(a) \in \mathbb{R}$. Pak je f v bodě a spojitá.

Důkaz. Tvrzení jednoduše dokážeme výpočtem:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to a} f(x) &= \lim_{x \to a} (f(x) - f(a)) + f(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}(x - a) + f(a) \\ &= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \lim_{x \to a}(x - a) + \lim_{x \to a} f(a) = 0f'(a) + f(a) = f(a). \end{aligned}$$

Jelikož $f'(a) \in \mathbb{R}$, dostaneme po vynásobení nulou nulu. Tedy nedostaneme žádný nedefinovaný výraz. $\square$

Věta 3.3 (Aritmetika derivací)**.** Nechť existují $f'(a)$ a $g'(a)$. Pak platí následující tvrzení:

1. $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$, pokud má pravá strana smysl.
2. Nechť je g spojitá v a, pak: $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$, pokud má pravá strana smysl.
3. Nechť je g spojitá v a a $g(a) \neq 0$, pak: $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{g^2(a)}$, pokud má pravá strana smysl.

Důkaz. Postupně dokážeme jednotlivá tvrzení:

1. Jednoduše spočítáme, že platí:

$$\begin{aligned}(f+g)'(a) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)+g(a+h)-(f(a)+g(a))}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(a+h)-g(a)}{h}=f'(a)+g'(a).\end{aligned}$$

2. Zde pro výpočet použijeme trik, a sice že odečteme a přičteme člen $f(a)g(a+h)$:

$$\begin{aligned}(fg)'(a) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)g(a+h)-f(a)g(a)-f(a)g(a+h)+f(a)g(a+h)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)g(a+h)-f(a)g(a+h)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(a)g(a+h)-f(a)g(a)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}g(a+h)\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}+\lim_{h\to 0}f(a)\lim_{h\to 0}\frac{g(a+h)-g(a)}{h}\\ &= f'(a)g(a)+f(a)g'(a).\end{aligned}$$

3. Z předpokladu věty víme, že $g(a)\neq 0$ a g je spojitá v a. Tedy existuje $\delta>0$ tak, že $\forall h\in B(0,\delta)$ platí $g(a+h)\neq 0$. Toto tvrzení platí. Vezmeme-li totiž například $g(a)>0$ a $g(a)\in\mathbb{R}$, pak k $\varepsilon=\frac{g(a)}{2}$ najdeme $\delta>0$ tak, že $\forall h\in B(0,\delta)$ platí:

$$|g(a+h)-g(a)|<\varepsilon=\frac{g(a)}{2}.$$

Nyní tedy již dokažme samotné tvrzení:

$$\begin{aligned}\left(\frac{f}{g}\right)'(a) &= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(a+h)}{g(a+h)}-\frac{f(a)}{g(a)}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)g(a)-f(a)g(a+h)}{g(a+h)g(a)h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{g(a+h)g(a)}\\ &\cdot\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)g(a)-f(a)g(a+h)+f(a)g(a)-f(a)g(a)}{h}\\ &= \frac{1}{g^2(a)}\left(\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)g(a)-f(a)g(a)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(a)g(a)-f(a)g(a+h)}{h}\right)\\ &= \frac{1}{g^2(a)}\left(\lim_{h\to 0}g(a)\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}+\lim_{h\to 0}f(a)\lim_{h\to 0}\frac{g(a)-g(a+h)}{h}\right)\\ &= \frac{1}{g^2(a)}(g(a)f'(a)-f(a)g'(a)=\frac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{g^2(a)}.\end{aligned}$$

Tím jsme dokázali všechny body věty. □

Věta 3.4 (Derivace složené funkce)**.** Nechť f má derivaci v bodě y_0. Nechť g je spojitá v bodě x_0 a má v x_0 derivaci. Dále nechť $y_0=g(x_0)$. Pak platí:

$$(f\circ g)'(x_0)=f'(y_0)g'(x_0)=f'(g(x_0))g'(x_0),$$

je-li výraz vpravo definován.

Důkaz. Funkce f má v bodě $y_0 \in \mathbb{R}$ derivaci, a proto je f definována na jistém okolí $B(y_0, \eta)$. Funkce g je spojitá v $x_0 \in \mathbb{R}$, $g(x_0) = y_0$, a proto je funkce $f(g(x))$ definována na jistém okolí $B(x_0, \delta)$.

1. Předpokládejme, že $f'(y_0) \in \mathbb{R}$. Definujme pomocnou funkci:

$$S(y) = \begin{cases} f'(y_0), & y = y_0, \\ \dfrac{f(y) - f(y_0)}{y - y_0}, & y \in D(f) \setminus \{y_0\}. \end{cases}$$

   Platí: $\lim_{y \to y_0} S(y) = S(y_0)$, tedy S je v bodě y_0 spojitá. Pro $x \in D(f \circ g)$ platí:

$$\frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} = \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0},$$

   kde jsme členem $\frac{g(x)-g(x_0)}{g(x)-g(x_0)}$ rozšířili za podmínky $g(x) \neq g(x_0)$, jinak $0 = 0$. Rovnici přepíšeme:

$$\frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} = S(g(x)) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}.$$

   Odtud z věty o limitě složené funkce za použití první podmínky dostaneme ($S(y)$ je spojitá v y_0):

$$\begin{aligned} (f \circ g)'(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} S(g(x)) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\ &= S(g(x_0)) g'(x_0) = f'(g(x_0)) g'(x_0). \end{aligned}$$

2. Předpokládejme, že $f'(y_0) \notin \mathbb{R}$, tedy $f'(y_0) \in \{-\infty, +\infty\}$. Pak ale $g'(x_0) \neq 0$, jinak by výraz nebyl definován. Pak existuje $\tilde{\eta} > 0$ tak, že $\forall x \in P(x_0, \tilde{\eta})$ platí:

$$\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \neq 0.$$

   Toto tvrzení je triviální, dokažme jej například pro $g'(x_0) > 0$ a $g'(x_0) \in \mathbb{R}$. K $\varepsilon = \frac{g'(x_0)}{2}$ najdeme $\tilde{\eta} > 0$ tak, že $\forall x \in P(x_0, \tilde{\eta})$ platí:

$$\left| \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} - g'(x_0) \right| < \varepsilon = \frac{g'(x_0)}{2} \Rightarrow \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \in \left(\frac{g'(x_0)}{2}, \frac{3}{2} g'(x_0) \right).$$

   Takže $\forall x \in P(x_0, \tilde{\eta})$ můžeme psát, že $g(x) \neq g(x_0) (= y_0)$. Tedy můžeme použít větu o limitě složené funkce s podmínkou 2. Odtud:

$$\begin{aligned} (f \circ g)'(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} S(g(x)) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\ &= f'(g(x_0)) g'(x_0). \end{aligned}$$

Tím je důkaz hotov. □

Věta 3.5 (Derivace inverzní funkce)**.** Nechť f je na intervalu (a,b) spojitá a rostoucí, respektive klesající. Nechť f má v bodě $x_0 \in (a,b)$ derivaci $f'(x_0)$ vlastní a různou od nuly. Potom má funkce f^{-1} derivaci v bodě $y_0 = f(x_0)$ a platí:

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Důkaz. Z věty o inverzní funkci víme, že f^{-1} je spojitá na $f((a,b))$ a y_0 je vnitřní bod $f((a,b))$. Víme, že platí:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0).$$

Dále víme:

$$\lim_{y\to y_0} f^{-1}(y) = f^{-1}(y_0) = x_0.$$

Tedy $f^{-1}(y) \neq f^{-1}(y_0)$ jinde než v bodě y_0, tedy víme druhou podmínku pro větu o limitě složené funkce a můžeme psát:

$$f'(x_0) = \lim_{y\to y_0} \frac{f(f^{-1}(y))-y_0}{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)} = \lim_{y\to y_0} \frac{y-y_0}{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}.$$

Nakonec tedy můžeme psát:

$$(f^{-1})'(y_0) = \lim_{y\to y_0} \frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0} = \frac{1}{\lim_{y\to y_0} \frac{y-y_0}{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Tím jsme větu dokázali. □

Poznámka. Platí následující tvrzení:

1. Pokud $f'(x_0) = 0$ a f je rostoucí, pak:

$$(f^{-1})'(y_0) = +\infty.$$

2. Pokud $f'(x_0) = \pm\infty$ a ostatní předpoklady věty o derivaci inverzní funkce platí, pak:

$$(f^{-1})'(y_0) = 0.$$

Věta 3.6 (Fermatova věta)**.** Nechť $a \in \mathbb{R}$ je bod lokálního extrému funkce f na M. Pak $f'(a)$ neexistuje, nebo $f'(a) = 0$.

Důkaz. Dokážeme sporem. Nechť a je bod lokálního extrému funkce f na M a nechť existuje derivace $f'(a)$, ale $f'(a) \neq 0$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $f'(a) > 0$. Pak existuje $\delta > 0$ tak, že $\forall x \in P(a,\delta)$ platí:

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} > 0.$$

Opět nastíníme důkaz tohoto triviálního tvrzení. Předpokládejme, že $f(a) \in \mathbb{R}$. K $\varepsilon = \frac{f'(a)}{2}$ najdeme $\delta > 0$ tak, že $\forall x \in P(a, \delta)$ platí:

$$\left|\frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a)\right| < \varepsilon = \frac{f'(a)}{2} \Rightarrow \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \in \left(\frac{f'(a)}{2}, \frac{3}{2}f'(a)\right).$$

Nyní za předpokladu, že $a < x$, tedy $x \in (a, a + \delta)$, vidíme z rovnice nahoře, že:

$$f(x) > f(a).$$

V tomto bodě tedy není lokální maximum. Naopak pro $a > x$, tedy $x \in (a - \delta, a)$, vidíme ze stejné rovnice, že:

$$f(x) < f(a).$$

V bodě tedy není ani lokální minimum. Došli jsme tedy ke sporu, protože v a funkce nenabývá extrému. $\square$

Věta 3.7 (Rolleova věta)**.** Nechť f je spojitá na intervalu $[a, b]$ a nechť derivace $f'(x)$ existuje $\forall x \in (a, b)$ a $f(a) = f(b)$. Pak existuje $\xi \in (a, b)$ tak, že $f'(\xi) = 0$.

Důkaz. Je-li $f(x) = f(a)\ \forall x \in (a, b)$, volme ξ libovolně v (a, b). Funkce je totiž konstatní. Jinak nechť existuje $x_0 \in (a, b)$ tak, že $f(x_0) \neq f(a) = f(b)$. Bez újmy na obecnosti předpokládejme $f(x_0) > f(a)$. Podle věty o spojitosti funkce a nabývání extrémů existuje bod $\xi \in [a, b]$ tak, že:

$$f(\xi) = \max\{f(x), x \in [a, b]\}.$$

Víme, že $f(x_0) > f(a)$, a tedy platí:

$$\xi \neq a,\ \xi \neq b \Rightarrow \xi \in (a, b).$$

Víme, že existuje $f'(\xi)$, protože $f'(x)$ existuje $\forall x \in (a, b)$. Podle Fermatovy věty platí:

$$f'(\xi) = 0.$$

Tím jsme větu dokázali. $\square$

Věta 3.8 (Lagrangeova věta o střední hodnotě)**.** Nechť je funkce f spojitá na intervalu $[a, b]$ a nechť má derivaci v každém bodě intervalu (a, b). Pak existuje $\xi \in (a, b)$ tak, že:

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Důkaz. K důkazu věty si zvolíme novou funkci $F(x)$ následovně:

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Pak F je spojitá na intervalu $[a, b]$. Dále platí:

$$F(a) = f(a) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a) = 0,$$

$$F(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) = 0.$$

Dále $\forall x \in (a, b)$ existuje $F'(x)$. Podle Rolleovy věty existuje $\xi \in (a, b)$ tak, že $F'(\xi) = 0$. Dále tedy:

$$0 = F'(\xi) = f'(\xi) - 0 - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \Rightarrow f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Tím jsme větu dokázali. □

Důsledek. Nechť $\forall x \in (a, b)$ platí $f'(x) = 0$. Pak f je na (a, b) konstantní.

Definice 3.9. Nechť J je interval. Množina všech vnitřních bodů J nazýváme vnitřek J a značíme $\operatorname{int} J$.

Věta 3.10 (O vztahu derivace a monotonie)**.** Nechť $J \subset \mathbb{R}$ je interval a f je spojitá na J a v každém bodě J má derivaci. Platí:

1. Je-li $f'(x) > 0$ na $\operatorname{int} J$, pak je f rostoucí na J,
2. Je-li $f'(x) < 0$ na $\operatorname{int} J$, pak je f klesající na J,
3. Je-li $f'(x) \geq 0$ na $\operatorname{int} J$, pak je f neklesající na J,
4. Je-li $f'(x) \leq 0$ na $\operatorname{int} J$, pak je f nerostoucí na J.

Důkaz. Nechť $a, b \in J$. Pak f je na $[a, b]$ spojitá a $\forall x \in (a, b)$ existuje $f'(x)$. Podle Lagrangeovy věty existuje $\xi \in (a, b)$ tak, že:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi) > 0 \Rightarrow f(b) > f(a),$$

kde $a < b$. Předpoklad $f'(\xi) > 0$ jsme vzali z prvního bodu věty a dokázali jsme, že je funkce rostoucí. Zbylé tři body věty by se dokázali analogicky. □

Věta 3.11 (Cauchyho věta o střední hodnotě)**.** Nechť jsou funkce f a g spojité na intervalu $[a, b]$ tak, že f má v každém bodě (a, b) derivaci a g má v každém bodě (a, b) vlastní derivaci různou od nuly. Pak existuje $\xi \in (a, b)$ tak, že:

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Důkaz. Tvrdíme, že $g(b) - g(a) \neq 0$. Jinak by dle Rolleovy věty existovalo $\xi \in (a, b)$ tak, že $g'(\xi) = 0$, což podle předpokladu věty nemůže nastat. Uvědomme si také, že f nemusí mít vlastní derivaci a následující důkaz je stále platný. Definujme novou funkci $H(x)$ tak, že platí:

$$H(x) = (f(x) - f(a))(g(b) - g(a)) - (f(b) - f(a))(g(x) - g(a)).$$

Vidíme, že funkce $H(x)$ je spojitá na $[a, b]$ a platí:

$$H(a) = (f(a) - f(a))(g(b) - g(a)) - (f(b) - f(a))(g(a) - g(a)) = 0,$$

$$H(b) = (f(b) - f(a))(g(b) - g(a)) - (f(b) - f(a))(g(b) - g(a)) = 0.$$

Dále existuje derivace této funkce:

$$H'(x) = f'(x)(g(b) - g(a)) - (f(b) - f(a))g'(x).$$

Podle Rolleovy věty existuje $\xi \in (a, b)$ tak, že:

$$0 = H'(\xi) = f'(\xi)(g(b) - g(a)) - (f(b) - f(a))g'(\xi).$$

Rovnici vynásobíme členem $\frac{1}{g'(\xi)(g(b)-g(a))}$ a dostaneme:

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Tím je věta dokázána. □

Věta 3.12 (L'Hospitalovo pravidlo)**.** Větu rozdělíme do dvou částí:

1. Nechť $a \in \mathbb{R}^*$ a nechť $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = 0$. Dále nechť existuje $\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Pak platí:
$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

2. Nechť $a \in \mathbb{R}^*$ a nechť $\lim_{x\to a^+} |g(x)| = +\infty$. Dále nechť existuje $\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Pak platí:
$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Důkaz. Nejprve dokážeme první tvrzení věty a to si rozdělíme na dva případy:

1. $\underline{a \in \mathbb{R}}$: Víme, že $\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \mathbb{R}^*$. Tedy existuje $\delta > 0$, že $\forall x \in P_+(a, \delta)$ platí:
$$g'(x) \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ f'(x) \in \mathbb{R}.$$
Definujeme $f(a) = g(a) = 0$. Pak f a g jsou spojité na $[a, a + \delta)$ a na $(a, a + \delta)$ existují derivace f' a g'. Jsou splněny předpoklady Cauchyho věty o střední hodnotě na intervalu $[a, x]$, a to $\forall x \in (a, a + \delta)$. Existuje tedy $\xi(x) \in (a, x)$ tak, že:
$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi(x))}{g'(\xi(x))},$$
neboť víme, že $f(a) = g(a) = 0$. Nechť $\varepsilon > 0$. Z definice $\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existuje $0 < \delta_0 < \delta$ tak, že $\forall y \in (a, a + \delta_0)$ platí:
$$\frac{f'(y)}{g'(y)} \in B(A, \varepsilon).$$

Nyní $\forall x \in (a, a+\delta_0)$ máme $\xi(x) \in (a, x) \subset (a, a+\delta_0)$, tedy:

$$\frac{f'(\xi(x))}{g'(\xi(x))} \in B(A, \varepsilon).$$

Jelikož víme, že $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi(x))}{g'(\xi(x))}$, můžeme psát:

$$\frac{f(x)}{g(x)} \in B(A, \varepsilon) \Rightarrow \lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = A.$$

2. $\underline{a = -\infty}$: Pro $a = +\infty$ se dokáže analogicky. Podle věty o limitě složené funkce s první podmínkou platí:

$$\lim_{x \to -\infty} h(x) = B \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow \lim_{y \to 0^+} h\left(-\frac{1}{y}\right) = B.$$

Dále víme, že existuje $\lim_{x \to -\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$. Zavedeme pomocné funkce:

$$F(y) = f\left(-\frac{1}{y}\right),\ G(y) = g\left(-\frac{1}{y}\right).$$

Pak platí:

$$F'(y) = f'\left(-\frac{1}{y}\right)\frac{1}{y^2},\ G'(y) = g'\left(-\frac{1}{y}\right)\frac{1}{y^2},$$

na jistém $P_+(0, \delta)$. Nyní můžeme psát:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{y \to 0^+} \frac{F(y)}{G(y)}.$$

Tedy:

$$\lim_{y \to 0^+} \frac{F'(y)}{G'(y)} = \lim_{y \to 0^+} \frac{f'\left(-\frac{1}{y}\right)\frac{1}{y^2}}{g'\left(-\frac{1}{y}\right)\frac{1}{y^2}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A.$$

Nyní z první částí důkazu pro bod 0 a funkce F a G dostaneme:

$$A = \lim_{y \to 0^+} \frac{F(y)}{G(y)} = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Tímto jsme dokončili první část důkazu. Důkaz je zcela stejný, pokud uvažujeme druhou podmínku a $a = -\infty$.

Nyní se podíváme na důkaz druhé části tvrzení. Opět rozdělíme na dvě části:

1. $\underline{A \in \mathbb{R}}$: Máme $\lim_{x \to a^+} = A \in \mathbb{R}$. Nechť $\varepsilon > 0$. Existuje $\delta_1 > 0$ tak, že $\forall z \in P_+(a, \delta_1)$ platí:

$$\left|\frac{f'(z)}{g'(z)} - A\right| < \varepsilon.$$

Zafixujeme si $y \in P_+(a, \delta_1)$. Zvolme $0 < \delta_2 < \delta_1$ tak, že $\forall x \in P_+(a, \delta_2)$ platí:

$$\frac{1}{|g(x)|}\left(|f(y)| + |g(y)|(|A| + \varepsilon)\right) < \varepsilon.$$

Konstantu vlastně dělíme nekonečnem. Připomeňme, že y je nad x a $|g(y)|$ je jen konstanta. Zvolme libovolně $x \in P_+(a, \delta_2) \cap (a, y)$. Na intervalu $[x, y]$ jsou splněny předpoklady Cauchyovy věty o střední hodnotě. To znamená, že existuje $\xi \in (x, y)$ tak, že platí:

$$\frac{f(y) - f(x)}{g(y) - g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Rovnici upravíme:

$$f(y) - f(x) = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} g(y) - \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} g(x).$$

Rovnici vynásobíme $\frac{1}{g(x)}$ a dostaneme:

$$\frac{f(y)}{g(x)} - \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \frac{g(y)}{g(x)} - \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Zřejmě platí:

$$\begin{aligned} \left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\right| &= \left|\frac{f(y)}{g(y)} - \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \frac{g(y)}{g(x)}\right| \le \frac{|f(y)|}{|g(x)|} + \left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\right| \frac{|g(y)|}{|g(x)|} \\ &\le \frac{|f(y)|}{|g(x)|} + (|A| + \varepsilon)\frac{|g(y)|}{|g(x)|} < \varepsilon, \end{aligned}$$

což nahlédneme z přechozích odhadů nahoře. Tedy $\forall \varepsilon > 0$ existuje $\delta_2 > 0$ tak, že $\forall x \in P_+(a, \delta_2)$ platí:

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - A\right| \le \left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\right| + \left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\right| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

2. $\underline{A = \pm\infty}$: Předpokládejme nejprve, že $A = +\infty$. Jako v prvním bodu důkazu prvního tvrzení máme, že $\forall x \in P_+(a, \delta)$ jsou $f'(x) \in \mathbb{R}$ a $g(x) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Díky druhé podmínce můžeme usoudit, že g je na tomto okolí nenulová. Nechť $K > 0$. Z $\lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = +\infty$ nalezneme $\delta_1 \in (0, \delta)$ tak, že $\forall x \in P_+(a, \delta_1)$ platí:

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} > 2K.$$

Zvolme $y \in P_+(a, \delta_1)$. Nalezneme $\delta_2 \in (0, y - a)$ tak, že $\forall x \in P_+(a, \delta_2)$ platí:

$$\left|\frac{g(y)}{g(x)}\right| < \frac{1}{4}, \quad \left|\frac{f(y)}{g(x)}\right| < \frac{K}{2}.$$

Opět jsme defakto konstantu podělili nekonečnem, tedy odhad je jistě správný. Nechť $x \in P_+(a, \delta_2)$. Pak $x < y$. Použijeme Cauchyovu větu o střední hodnotě pro funkce f a g na $[x, y]$ a nalezneme $\xi \in [x, y]$ tak, že platí:

$$\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Pak:
$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(y)}{g(x)} + \frac{f(y)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)}\left(1-\frac{g(y)}{g(x)}\right) + \frac{f(y)}{g(x)}.$$

Díky tomuto můžeme psát:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\left(1-\frac{g(y)}{g(x)}\right) + \frac{f(y)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\frac{g(y)}{g(x)} + \frac{f(y)}{g(x)}.$$

Nakonec tedy máme:
$$\frac{f(x)}{g(x)} > 2K - 2K\frac{1}{4} - \frac{K}{2} = K.$$

Pro $A = -\infty$ stačí výsledek již dokázaného použit na funkce $-f$ a g a dostaneme:

$$\lim_{x\to a^+} \frac{-f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{-f'(x)}{g(x)} = +\infty.$$

Tedy:
$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty.$$

Obě tvrzení věty jsou dokázány. □

Poznámka. L'Hospitalovo pravidlo platí i pro $x \to a^-$ a pro $x \to a$.

Věta 3.13 (Derivace a limita derivace)**.** Nechť je funkce f spojitá zprava v a a nechť existuje $\lim_{x\to a^+} f'(x) = A \in \mathbb{R}^*$. Pak $f'_+(a) = A$.

Důkaz. Z definice derivace:

$$f'_+(a) = \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \left|\ \tfrac{0}{0}\ \right| = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{1} = A.$$

Tedy věta platí. □

3.1.1 Derivace elementárních funkcí

Dokážeme vztahy pro derivace pro základní funkce:

1. $c' = 0$, $c \in \mathbb{R}$. Je zřejmé, že derivace konstanty je rovná nule.

2. $(x^n)' = nx^{n-1}$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Můžeme dokázat ihned z definice:

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h\to 0} \frac{(a+h)^n - a^n}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}h + \cdots + h^n - a^n}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} na^{n-1} + \lim_{h\to 0} \binom{n}{2} a^{n-2}h + \cdots + \lim_{h\to 0} h = na^{n-1}. \end{aligned}$$

3. $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$, $x \in (0, \infty)$. Dokážeme z definice a použijeme větu o limitě složené funkce:
$$\lim_{h\to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}} \frac{1}{x} = \frac{1}{x},$$
kde $g(x) = \frac{h}{x} \neq 0$ na $P(0,1)$. Tedy bylo použití věty korektní.

4. $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$. Opět z definice:
$$\lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{e}^{x+h} - \mathrm{e}^x}{h} = \lim_{h\to 0} \mathrm{e}^x \frac{e^h - 1}{h} = \mathrm{e}^x.$$

5. $(x^a)' = ax^{a-1}$, $x \in (0, \infty)$, $a \in \mathbb{R}$.
$$(x^a)' = \left(\mathrm{e}^{a\ln(x)}\right)' = \mathrm{e}^{a\ln(x)}(a\ln(x))' = x^a a \frac{1}{x}.$$

6. $(a^x)' = a^x \ln(a)$, $x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$.
$$(a^x)' = \left(\mathrm{e}^{x\ln(a)}\right)' = \mathrm{e}^{x\ln(a)}(x\ln(a))' = a^x \ln(a).$$

7. $(\sin(x))' = \cos(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
$$\begin{aligned}(\sin(x))' &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2\sin\left(\frac{h}{2}\right)\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{2\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} \lim_{h\to 0} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) = 1\cos(x) = \cos(x),\end{aligned}$$
kde jsme využili věty o limitě složené funkce, kde $\frac{h}{2} \neq 0\ \forall h \neq 0$.

8. $(\cos(x))' = -\sin(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
$$\begin{aligned}(\cos(x))' &= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-2\sin\left(\frac{x+h-x}{2}\right)\sin\left(\frac{x+h+x}{2}\right)}{h} \\ &= -\lim_{h\to 0} \frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} \lim_{h\to 0} \sin\left(x + \frac{h}{2}\right) = \sin(x),\end{aligned}$$
kde jsme využili věty o limitě složené funkce, kde $\frac{h}{2} \neq 0\ \forall h \neq 0$.

9. $(\mathrm{tg}(x))' = \frac{1}{\cos^2(x)}$, $x \in \mathcal{D}(\mathrm{tg}(x))$.
$$(\mathrm{tg}(x))' = \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' = \frac{\cos(x)\cos(x) - (-\sin(x))\sin(x))}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

10. $(\mathrm{cotg}(x))' = -\frac{1}{\sin^2(x)}$, $x \in \mathcal{D}(\mathrm{cotg}(x))$.
$$(\mathrm{cotg}(x))' = \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' = \frac{-\sin(x)\sin(x) + \cos(x)\cos(x)}{\sin^2(x)} = -\frac{1}{\sin^2(x)}.$$

11. $(\arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1, 1)$. K důkazu využijeme věty o derivaci inverzní funkce:

$$(\arcsin(x))' = \frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}},\ x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),\ y \in (-1, 1).$$

Dále:

$$\sin(x) = y,\ \sin^2(x) = 1 - \cos^2(x) = y^2 \Rightarrow 1 - y^2 = \cos^2(x).$$

12. $(\arccos(x))' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1, 1)$. Důkaz analogicky jako pro $\arcsin(x)$.

13. $(\operatorname{arctg}(x))' = \frac{1}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$. Opět využijeme věty o derivaci inverzní funkce:

$$(\operatorname{arctg}(y))' = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2(x)}} = \cos^2(x) = \frac{1}{1+y^2},\ x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),\ y \in \mathbb{R}.$$

Neboť:

$$y = \operatorname{tg}(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)},\ y^2 = \frac{1-\cos^2(x)}{\cos^2(x)} \Rightarrow y^2\cos^2(x) + \cos^2(x) = 1.$$

Tedy:

$$\cos^2(x) = \frac{1}{1+y^2}.$$

14. $(\operatorname{arccotg}(x))' = -\frac{1}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$. Důkaz analogicky jako pro $\operatorname{arctg}(x)$.

3.2 Konvexní a konkávní funkce

Definice 3.14. Nechť $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$ a nechť f má vlastní n-tou derivaci na okolí bodu a. Pak $(n+1)$-ní derivací v bodě a rozumíme:

$$f^{(n+1)}(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f^{(n)}(a+h) - f^{(n)}(a)}{h}.$$

Definice 3.15. Funkci f na intervalu I nazveme konvexní, jestliže $\forall x_1, x_2, x_3 \in I, x_1 < x_2 < x_3$ platí:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

Funkce je konkávní, pokud je daná nerovnost opačná ($\geq$). Funkce nazveme ryze konvexní (ryze konkávní), jsou-li příslušné nerovnosti ostré.

Lemma. Nechť je funkce f na intervalu I konvexní, pak $\forall x_1, x_2, x_3 \in I, x_1 < x_2 < x_3$ platí:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

Pokud je funkce ryze konvexní, pak jsou nerovnosti ostré.

Důkaz. Předpokládejme, že $x_1 < x_2 < x_3$. Z definice víme, že:

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}.$$

Chceme dostat:

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}.$$

Budeme upravovat:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x_3-x_1}(f(x_3)-f(x_1)) &= \frac{1}{x_3-x_1}(f(x_3)-f(x_2)+f(x_2)-f(x_1)) \\
&\geq \frac{1}{x_3-x_1}\left(\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x_3-x_2)+f(x_2)-f(x_1)\right) \\
&= (f(x_2)-f(x_1))\frac{1}{x_3-x_1}\left(\frac{x_3-x_2+x_2-x_1}{x_2-x_1}\right) \\
&= \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}.
\end{aligned}$$

Druhou nerovnost bychom dostali analogicky. □

Věta 3.16 (Vztah druhé derivace a konvexity (konkávity))**.** Nechť f má na intervalu (a,b) spojitou první derivaci. Platí:

1. Jestliže $\forall x \in (a,b) : f''(x) > 0$, pak f je ryze konvexní,
2. Jestliže $\forall x \in (a,b) : f''(x) < 0$, pak f je ryze konkávní,
3. Jetsliže $\forall x \in (a,b) : f''(x) \geq 0$, pak f je konvexní,
4. Jestliže $\forall x \in (a,b) : f''(x) \leq 0$, pak f je konkávní.

Důkaz. Víme, že $\forall x \in (a,b)$ platí $f''(x) \geq 0$. Tedy podle věty o vztahu derivace a monotonie platí, že f' je neklesající na (a,b). Zvolme $x_1 < x_2 < x_3$, $x_1, x_2, x_3 \in (a,b)$. Podle Lagrangeovy věty o střední hodnotě platí:

$$\exists \xi_1 \in (x_1,x_2) : \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(\xi_1),$$

$$\exists \xi_2 \in (x_2,x_3) : \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2} = f'(\xi_2).$$

Víme, že $\xi_1 < \xi_2$. Navíc f' je neklesající. Tedy $f'(\xi_1) \leq f'(\xi_2)$ a můžeme psát:

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}.$$

Zbylé body věty bychom dokázali analogicky. □

Věta 3.17 (Konvexita a jednostranné derivace)**.** Nechť f je konvexní na otevřeném intervalu J a $a \in \operatorname{int} J$. Pak $f'_+(a) \in \mathbb{R}$ a $f'_-(a) \in \mathbb{R}$.

Důkaz. Z definice $f'_+(a) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$. Nechť $a < x_1 < x_2$. Z lemmatu víme, že:

$$\frac{f(x_1) - f(a)}{x_1 - a} \leq \frac{f(x_2) - f(a)}{x_2 - a}.$$

Tedy funkce $x \to \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ je neklesající. Podle věty o limitě monotónní funkce tedy existuje:

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \in \mathbb{R}^*.$$

Zvolme $y \in J$, $y < a$, y je pevné. Nyní $\forall x \in J$, $x > a$, platí:

$$\frac{f(a) - f(y)}{a - y} \leq \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Tedy $x \to \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ je zdola omezená (na jistém $P_+(a, \delta)$). Tedy:

$$f'_+(a) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \in \mathbb{R}.$$

Analogicky bychom dokázali pro $f'_-(a)$. □

Věta 3.18 (Konvexita a spojitost)**.** Nechť f je konvexní na otevřeném intervalu J. Pak f je spojitá na J.

Důkaz. Víme, že $a \in J$, a tedy $a \in \operatorname{int} J$. Podle přechozí věty (konvexita a jednostranné derivace) existuje $f'_+(a) \in \mathbb{R}$ a $f'_-(a) \in \mathbb{R}$. Jelikož existuje $f'_+(a) \in \mathbb{R}$, a tedy podle věty o vztahu derivace a spojitosti (platí i pro jednostranné derivace) máme, že f je spojitá zprava. Podle $f'_-(a) \in \mathbb{R}$ zase dostaneme, že f je spojitá zleva. Tedy f je spojitá. □

Definice 3.19. Nechť f má vlastní derivaci v bodě $a \in \mathbb{R}$. Označme:

$$T_a^b = \{[x, y] : x \in \mathbb{R}, y = f(a) + f'(a)(x - a)\}.$$

Řekneme, že bod $[x, f(x)]$, $x \in D(f)$ leží nad tečnou T_a^b, jestliže platí:

$$f(x) > f(a) + f'(a)(x - a).$$

Bod leží pod tečnou, jestliže platí:

$$f(x) < f(a) + f'(a)(x - a).$$

Definice 3.20. Funkce f má v bodě a inflexi (a je inflexní bod), jestliže $f'(a) \in \mathbb{R}$ a existuje $\delta > 0$ tak, že:

1. $\forall x \in (a - \delta, a) : [x, f(x)]$ leží nad tečnou,
2. $\forall x \in (a, a + \delta) : [x, f(x)]$ leží pod tečnou.

Nebo také:

1. $\forall x \in (a-\delta, a) : [x, f(x)]$ leží pod tečnou,
2. $\forall x \in (a, a+\delta) : [x, f(x)]$ leží nad tečnou.

Věta 3.21 (Nutná podmínka pro inflexi)**.** Nechť $f''(a) \neq 0$. Pak a není inflexní bod funkce f.

Důkaz. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $f''(a) > 0$, tedy platí:

$$f''(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f'(a+h) - f'(a)}{h} > 0.$$

Standardním způsobem odvodíme, že $\exists \delta > 0 \; \forall h \in P(0,\delta)$ tak, že:

$$\frac{f'(a+h) - f'(a)}{h} > 0.$$

Důkaz tohoto tvrzení je jednoduchý. Zvolme $\varepsilon = \frac{f''(a)}{2}$. Pak:

$$\left| \frac{f'(a+h) - f'(a)}{h} - f''(a) \right| < \varepsilon = \frac{f''(a)}{2} \Rightarrow \frac{f'(a+h) - f'(a)}{h} \in \left(\frac{f''(a)}{2}, \frac{3f''(a)}{2} \right).$$

Tedy platí:

$$\forall x \in (a, a+\delta) : f'(x) > f'(a),$$
$$\forall x \in (a-\delta, a) : f'(x) < f'(a).$$

Jinými slovy pro h kladné musí být $f'(a+h) > f'(a)$ a pro h záporné musí naopak platit $f'(a+h) < f'(a)$, aby byl celý výraz kladný. Uvědomme si, že $h \in P(0,\delta)$. Pro $y \in (a, a+\delta)$ platí podle Lagrangeovy věty, kde $\xi \in (a, y)$, že:

$$\frac{f(y) - f(a)}{y - a} = f'(\xi) > f'(a).$$

Odtud dostaneme, že:

$$f(y) - f(a) > f'(a)(y-a) \Rightarrow f(y) > f(a) + f'(a)(y-a).$$

Analogicky pro $y \in (a-\delta, a)$ platí ($\xi \in (y, a)$):

$$\frac{f(y) - f(a)}{y - a} = f'(\xi) < f'(a).$$

Odtud dostaneme vynásobením členem $(y-a) < 0$ (dojde ke změně znaménka):

$$f(y) > f(a) + f'(a)(y-a).$$

Můžeme tedy konstatovat, že v a není inflexe. $\square$

Věta 3.22 (Postačující podmínka pro inflexi)**.** Nechť f má spojitou první derivaci na (a, b). Nechť $z \in (a, b)$ a platí následující:

$$\forall x \in (a, z) : f''(x) > 0,$$

$$\forall x \in (z, b) : f''(x) < 0.$$

Pak z je inflexní bod.

Důkaz. Podle věty o vztahu derivace a monotonie víme, že f' klesá na $[z, b)$. Podle Lagrangeovy věty o střední hodnotě nalezneme pro $x \in [z, b)$ takové $\xi \in (z, x)$ tak, že platí:

$$\frac{f(x) - f(z)}{x - z} = f'(\xi).$$

Odtud dostaneme:

$$f(x) = f(z) + f'(\xi)(x - z) < f(z) + f'(z)(x - z),$$

protože $\xi > z$ a f' klesá na $[z, b)$, a tedy $f'(\xi) < f'(z)$. Dále f' roste na $(a, z]$. Pro $x \in (a, z]$ najdeme $\eta \in (x, z)$ tak, že platí:

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} = f'(\eta).$$

Tedy:

$$f(x) = f(z) + f'(\eta)(x - z) > f(z) + f'(z)(x - z),$$

protože $\eta < z$ a f' roste na $(a, z]$, a tedy $f'(\eta) < f'(z)$. □

Poznámka. Analogicky věta platí pro $f''(x) < 0$ na (a, z) a $f''(x) > 0$ na (z, b).

3.3 Průběh funkce

Definice 3.23. Řekneme, že funkce $ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, je asymptota funkce f v $+\infty$ (respektive $-\infty$), jestliže:

$$\lim_{x\to\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0,$$

respektive, jestliže platí:

$$\lim_{x\to-\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0.$$

Věta 3.24 (Tvar asymptoty)**.** Funkce f má v $+\infty$ asymptotu $ax + b$ právě tehdy, když platí:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = a, \ \lim_{x\to\infty} (f(x) - ax) = b.$$

Důkaz. Nejdříve dokážeme pravou, potom levou implikaci:

1. Pravá implikace: Můžeme psát:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-(ax+b)}{x}+\lim_{x\to\infty}\frac{ax+b}{x}=0+a=a.$$

   Nyní druhou rovnici:

$$\lim_{x\to\infty}(f(x)-ax)=\lim_{x\to\infty}f(x)-(ax+b)+\lim_{x\to\infty}b=0+b=b.$$

   Tím jsme pravou implikaci dokázali.

2. Levá implikace: Jednoduchým výpočtem dostaneme:

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-(ax+b)]=\lim_{x\to\infty}(f(x)-ax)+\lim_{x\to\infty}(-b)=b+(-b)=0.$$

Tím je věta dokázána. □

Poznámka. Věta platí analogicky i pro $-\infty$.

3.3.1 Vyšetřování průběhu funkce

Při vyšetřování průběhu funkce provádíme následující kroky:

1. Určíme definiční obor funkce a obor spojitosti funkce.
2. Zjistíme průsečíky se souřadnými osami.
3. Určíme symetrii funkce, tedy sudost, lichost, periodičnost.
4. Dopočítáme limity v krajních bodech definičního oboru.
5. Spočteme první derivaci, a to včetně jednostranných derivací v problematických bodech. Určíme intervaly monotonie a nalezneme lokální a globální extrémy.
6. Spočteme druhou derivaci a určíme intervaly, kde je funkce konvexní nebo konkávní. Určíme inflexní body.
7. Určíme asymptoty funkce.
8. Načrtneme graf funkce a určíme obor hodnot funkce.

3.4 Taylorův polynom

Definice 3.25. Nechť f je reálná funkce, $a\in\mathbb{R}$ a existuje vlastní n-tá derivace f v bodě a. Pak polynom

$$T_n^{f,a}(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+f''(a)\frac{(x-a)^2}{2}+\cdots+f^{(n)}\frac{(x-a)^n}{n!}$$

nazýváme Taylorovým polynomem řádu n funkce f v bodě a.

Poznámka. Formulujme následující poznámky:

1. Stupeň polynomu $T_n^{f,a}(x)$ je vždy menší nebo roven n. Píšeme:
$$\deg(T_n^{f,a}(x)) \leq n.$$
2. Derivace Taylorova polynomu je rovna:
$$(T_n^{f,a}(x))' = 0 + f'(a) + f''(a)(x-a) + \cdots + f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} = T_{n-1}^{f',a}(x).$$

Lemma. Nechť Q je polynom, $a \in \mathbb{R}$, $\deg Q \leq n$ a $\lim_{x\to a} \frac{Q(x)}{(x-a)^n} = 0$. Pak $Q \equiv 0$.

Důkaz. Důkaz provedeme matematickou indukcí. Pro $n = 1$ dostaneme:
$$\lim_{x\to a} \frac{Q(x)}{x-a} = 0 \Rightarrow Q(a) = 0 \Rightarrow Q(x) = c(x-a),$$
protože zřejmě $\deg(Q) = 1$. Nyní můžeme psát:
$$\lim_{x\to a} \frac{Q(x)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{c(x-a)}{x-a} = c \Rightarrow c = 0 \Rightarrow Q \equiv 0.$$
Nyní pokud tvrzení platí pro $n-1$, pak jistě platí i pro n. Tedy:
$$\lim_{x\to a} \frac{Q(x)}{(x-a)^n} = 0 \Rightarrow Q(a) = 0 \Rightarrow Q(x) = (x-a)R(x),$$
kde $\deg(R) \leq n-1$. Tedy:
$$0 = \lim_{x\to a} \frac{Q(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x\to a} \frac{(x-a)R(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x\to a} \frac{R(x)}{(x-a)^{n-1}}.$$
Z indukčního předpokladu pro polynom R je $\deg(R) \leq n-1$, tedy dostáváme $R \equiv 0 \Rightarrow Q \equiv 0$. □

Věta 3.26 (O nejlepší aproximaci Taylorovým polynomem)**.** Nechť $a \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(a) \in \mathbb{R}$ a P je polynom stupně n. Pak platí:
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - P(x)}{(x-a)^n} = 0 \Leftrightarrow P(x) = T_n^{f,a}(x).$$

Důkaz. Nejdříve dokážeme levou, poté pravou implikaci:

1. Levá implikace: Opět dokážeme indukcí. Pro $n = 1$ máme:
$$T_1^{f,a}(x) = f(a) + f'(a)(x-a).$$
Chceme:
$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{x\to a} \frac{f(x) - T_1^{f,a}(x)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)}{x-a} \\ &= \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} - f'(a) = 0, \end{aligned}$$

což víme z definice derivace. Nyní budeme předpokládat, že tvrzení platí pro $n-1$. Pak platí i pro n:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - T_n^{f,a}}{(x-a)^n} = \left| \tfrac{0}{0} \right| = \lim_{x\to a} \frac{f'(x) - (T_n^{f,a}(x))'}{n(x-a)^{n-1}} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x) - T_{n-1}^{f',a}(x)}{n(x-a)^{n-1}} = 0,$$

kde poslední rovnost plyne z indukčního předpokladu pro funkci f' pro $n-1$.

2. Pravá implikace: Jednoduše můžeme psát:

$$\lim_{x\to a} \frac{P(x) - T_n^{f,a}(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x\to a} \frac{P(x) - f(x)}{(x-a)^n} + \lim_{x\to a} \frac{f(x) - T_n^{f,a}(x)}{(x-a)^n} = 0,$$

kde jedna limita je rovna nule z předpokladu věty a druhá dle již dokázané implikace. Tedy:

$$\deg(P - T_n^{f,a}) \leq n \Rightarrow P - T_n^{f,a} \equiv 0,$$

což plyne z přechozího lemmatu.

Tím je důkaz hotov. $\square$

Věta 3.27 (Taylorova věta)**.** Nechť má funkce f vlastní $(n+1)$-ní derivaci na intervalu $[a, x]$ a nechť φ je spojitá funkce na $[a, x]$ a má vlastní nenulovou derivaci na (a, x). Pak existuje $\xi \in (a, x)$ tak, že platí:

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{n!} \frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{\varphi'(\xi)} f^{n+1}(\xi)(x-\xi)^n.$$

Důkaz. Pro $t \in [a, x]$ definujme:

$$F(t) = f(x) - \left[f(t) + \frac{f'(t)}{1!}(x-t) + \frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n \right].$$

Platí:

- F je spojitá na $[a, x]$. f^n je totiž skutečně spojitá. Z věty víme, že f^{n+1} je vlastní, a tedy f^n je spojitá.
- $F(x) = 0$, neboť po dosazení x za t dostaneme nulu.
- $F(a) = f(x) - T_n^{f,a}(x)$.
- existuje F' na (a, x). Všechny funkce v $F(t)$ jsou totiž diferencovatelné.

Ze znění věty dále víme, že φ je spojitá na $[a, x]$ a má vlastní derivaci na (a, x). Můžeme tedy použít Cauchyho větu o střední hodnotě. Podle ní existuje $\xi \in (a, x)$ tak, že:

$$\frac{0 - (f(x) - T_n^{f,a}(x))}{\varphi(x) - \varphi(a)} = \frac{F(x) - F(a)}{\varphi(x) - \varphi(a)} = \frac{F'(\xi)}{\varphi'(\xi)}.$$

Tedy:

$$F'(\xi) = 0 - \Bigg[f'(\xi) + f'(\xi)(-1) + f''(\xi)(x-\xi) + f''(\xi)\frac{2(x-\xi)}{2}(-1) + f'''(\xi)\frac{(x-\xi)^2}{2}$$
$$+ \cdots + \frac{f^n(\xi)n(x-\xi)^{n-1}}{n!}(-1) + f^{n+1}(\xi)\frac{(x-\xi)^n}{n!}\Bigg] = -f^{n+1}(\xi)\frac{(x-\xi)^n}{n!}.$$

Nakonec:

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = -F'(\xi)\frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{\varphi'(\xi)} = f^{n+1}(\xi)\frac{(x-\xi)^n}{n!}\frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{\varphi'(\xi)}.$$

Důkaz je tímto hotov. □

Poznámka. $R_n^{f,a}(x) = f(x) - T_n^{f,a}(x)$ nazýváme zbytek po Taylorově polynomu stupně n.

Důsledek (Lagrangeův tvar zbytku)**.** Speciálně existuje $\xi_1 \in (a,x)$ tak, že:

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{(n+1)!}f^{n+1}(\xi_1)(x-a)^{n+1}.$$

Důkaz. Položme $\varphi(t) = (x-t)^{n+1}$, pak $\varphi'(t) = (n+1)(x-t)^n(-1)$. Po dosazení do zbytku bychom dostali horní rovnost. □

Důsledek (Cauchyův tvar zbytku)**.** Speciálně existuje $\xi_2 \in (a,x)$ tak, že:

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{n!}f^{(n+1)}(\xi_2)(x-\xi_2)^n(x-a).$$

Důkaz. Položili bychom $\varphi(t) = t$ a dosadili. □

Definice 3.28. Nechť f, g jsou funkce a $a \in \mathbb{R}^*$. Řekneme, že funkce f je v bodě a malé o od g, jestliže platí, že $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = 0$. Píšeme $f(x) = o(g(x))$ pro $x \to a$.

4 Řady

4.1 Úvod

Definice 4.1. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost. Číslo $s_m = a_1 + a_2 + \cdots + a_m = \sum_{n=1}^{m} a_n$ nazveme m-tým částečným součtem řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Součtem nekonečné řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazveme limitu posloupnosti $\{s_m\}$, pokud tato limita existuje. Je-li tato limita konečná, pak řekneme, že řada je konvergentní. Je-li tato limita nekonečná nebo neexistuje, pak řekneme, že řada je divergentní. Tuto limitu budeme značit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Věta 4.2 (Nutná podmínka konvergence)**.** Jestliže je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní, pak $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Důkaz. Pokud $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, pak existuje číslo $s \in \mathbb{R}$ tak, že:

$$s = \lim_{m\to\infty} s_m = \lim_{m\to\infty} (a_1 + a_2 + \cdots + a_m).$$

Dále můžeme psát:

$$a_n = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) - (a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}) = s_n - s_{n-1}.$$

Tedy:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n - s_{n-1} = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s - s = 0.$$

Tím je důkaz hotov. □

Věta 4.3 (Konvergence součtu řad)**.** Platí následující tvrzení:

1. Nechť $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje právě tehdy, když $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n$ konverguje a platí:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

2. Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergují, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n + b_n$ konverguje a platí:
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n + b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Důkaz. Postupně dokážeme:

1. Jestliže $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, pak existuje limita z s_m a platí:
$$\lim_{m\to\infty} s_m = \lim_{m\to\infty} (a_1 + a_2 + \cdots + a_m) = s \in \mathbb{R}.$$
Pro $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n$ pak platí:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} \alpha a_n = \alpha \lim_{m\to\infty} s_m = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \alpha s,$$
kde $\alpha s \in \mathbb{R}$. Tedy $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n$ konverguje. Opačná implikace je nyní triviální.

2. Pokud $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, tak platí:

$$s_m = a_1 + \cdots + a_m \xrightarrow{m\to\infty} s \in \mathbb{R}.$$

Dále pokud $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konveruje, tak platí:

$$\sigma_m = b_1 + \cdots + b_m \xrightarrow{m\to\infty} \sigma \in \mathbb{R}.$$

Dále:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m}(a_n + b_n) = \lim_{m\to\infty} s_m + \lim_{m\to\infty} \sigma_m = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n = s + \sigma,$$

kde $s + \sigma \in \mathbb{R}$. Řada $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ tedy konverguje.

Věta je tedy dokázána. $\square$

4.2 Řady s nezápornými členy

Věta. Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s nezápornými členy. Pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, nebo má součet $+\infty$.

Důkaz. Platí:

$$s_m = a_1 + \cdots + a_m \leq a_1 + \cdots + a_{m+1} = s_{m+1}.$$

Dále s_m je neklesající, tedy existuje $\lim_{n\to\infty} s_m \in [0, \infty]$. $\square$

Věta 4.4 (Srovnávací kritérium)**.** Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou řady s nezápornými členy a nechť existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$ platí $a_n \leq b_n$. Pak:

1. Jestliže $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje,
2. Jestliže $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje, pak $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverguje.

Důkaz. Postupně dokážeme:

1. Označme $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ a $\sigma_n = b_1 + \cdots + b_n$. Pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$ platí:

$$\begin{aligned} s_n = a_1 + \cdots + a_{n_0} + a_{n_0+1} + \cdots + a_n &\leq a_1 + \cdots + a_{n_0} + b_{n_0+1} + \cdots + b_n \\ &\leq a_1 + \cdots + a_{n_0} + \sigma_n. \end{aligned}$$

   Jelikož $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, tak existuje $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \sigma \in \mathbb{R}$. Tedy:

$$a_1 + \cdots + a_{n_0} + \sigma_n \leq a_1 + \cdots + a_{n_0} + \sigma \in \mathbb{R}.$$

   s_n je tedy shora omezená. Dále s_n je neklesající, tedy existuje $\lim_{n\to\infty} s_n \in \mathbb{R}$.

2. Jelikož víme, že první implikace platí, tak hned víme, že platí i implikace druhá, a sice z nepřímého důkazu. Pokud platí $A \Rightarrow B$, tak platí i $\neg B \Rightarrow \neg A$.

Důkaz je tedy hotov. $\square$

Věta 4.5 (Limitní srovnávací kritérium)**.** Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou řady s nezápornými členy a nechť $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = A \in \mathbb{R}^*$. Pak platí:

1. Jestliže $A \in (0, \infty)$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje právě tehdy, když $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.
2. Jestliže $A = 0$, pak pokud $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, tak i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konerguje.
3. Jestliže $A = \infty$, pak pokud $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, tak i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje.

Důkaz. Postupně dokážeme jednotlivá tvrzení:

1. Z $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = A \in (0, \infty)$ plyne, že k $\varepsilon = \frac{A}{2}$ existuje n_0 tak, že $\forall n \geq n_0$ platí:

   $$\left|\frac{a_n}{b_n} - A\right| < \varepsilon = \frac{A}{2} \Rightarrow \frac{A}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3A}{2}.$$

   Pokud $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, pak i $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2}Ab_n$ konverguje. Dále $a_n < \frac{3}{2}Ab_n$, a tedy řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. Pokud naopak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, tak i $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A}{2}b_n$ konverguje, protože $\frac{A}{2}b_n < a_n$. Tedy i řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje. Tím je ekvivalence dokázána.

2. Z $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ plyne, že k $\varepsilon = 1$ najdeme $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $\forall n \geq n_0$ platí:

   $$\left|\frac{a_n}{b_n} - 0\right| < 1 \Rightarrow a_n < b_n,$$

   tedy za předpokladu, že $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, tak konverguje jistě i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

3. Z $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$ plyne, že k $\varepsilon = 1$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $\forall n \geq n_0$ platí:

   $$\frac{a_n}{b_n} > 1 \Rightarrow a_n > b_n.$$

   Z toho platí, že $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, jelikož víme, že $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

Tímto je důkaz hotov. □

Věta 4.6 (Cauchyovo odmocninové kritérium)**.** Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s nezápornými členy. Pak:

1. Jestliže existuje $q \in (0, 1)$ a $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $\forall n \geq n_0$ je $\sqrt[n]{a_n} < q$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.
2. Jestliže $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.
3. Jestliže $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.
4. Jestliže $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.
5. Jestliže $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Důkaz. Postupně dokážeme jednotlivá tvrzení:

1. Označme $b_n = q^n$. Z prvního tvrzení víme, že existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $\forall n \geq n_0$ platí, že $a_n < b_n$, protože $\sqrt[n]{a_n} < q \ \forall n \geq n_0$. Dále víme, že $q \in (0,1)$. Tedy $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, jedná se totiž o geometrickou řadu. Jelikož $a_n < b_n$, tak konverguje i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

2. Toto tvrzení dokážeme pomocí prvního tvrzení ($1 \Rightarrow 2$). Nejprve označme $b_n = \sup\{\sqrt[n]{a_n}, \sqrt[n+1]{a_{n+1}}, \dots\}$. Jistě platí:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1.$$

Nalezneme $q \in \left(\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}, 1\right)$. Z definice $\lim_{n\to\infty} b_n$ plyne, že pro $\varepsilon = q - \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $\forall n \geq n_0$ platí:

$$b_n < q \Rightarrow b_{n_0} = \sup\left\{\sqrt[n_0]{a_{n_0}}, \sqrt[n_0+1]{a_{n_0+1}}, \dots\right\} < q.$$

Tedy $\forall n \geq n_0$ platí, že $\sqrt[n]{a_n} < q$. Tedy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

3. Dokážeme pomocí druhého tvrzení ($2 \Rightarrow 3$). Víme, že existuje $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$, a tedy existuje i $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$. Podle druhého tvrzení $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

4. Označme $b_n = \sup\{\sqrt[n]{a_n}, \sqrt[n+1]{a_{n+1}}, \dots\}$. Platí:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \limsup_{n\to\infty} a_n > 1.$$

Nalezneme $q \in \left(1, \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}\right)$. Z definice $\lim_{n\to\infty} b_n$ pro $\varepsilon = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} - q$ nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $\forall n \geq n_0$ platí:

$$b_n > q > 1 \Rightarrow \sup\left\{\sqrt[n]{a_n}, \sqrt[n+1]{a_{n+1}}, \dots\right\} > 1.$$

Tedy existuje $\{n_k\}$ tak, že $\sqrt[n_k]{a_{n_k}} > q > 1$. Tedy:

$$a_{n_k} > 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n \neq 0.$$

Z toho víme, že $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

5. Důkaz se provede analogicky třetímu tvrzení.

Věta je tímto dokázána. $\square$

Věta 4.7 (d'Alembertovo podílové kritérium)**.** Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s kladnými členy. Pak:

1. Jestliže existuje $q \in (0,1)$ a $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $\forall n \geq n_0$ je $\frac{a_{n+1}}{a_n} < q$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

2. Jestliže $\limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

3. Jestliže $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

4. Jestliže $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Důkaz. Postupně dokážeme jednotlivá tvrzení:

1. Víme, že $a_{n_0+1} < qa_{n_0}$. Dále zřejmě platí:
$$a_{n_0+2} < qa_{n_0+1} < q^2 a_{n_0}.$$
Pokračujeme matematickou indukcí a dostaneme:
$$a_{n_0+k} < q^k a_{n_0}.$$
$\sum_{k=1}^{\infty} q^k a_{n_0}$ jistě konverguje, a tedy i $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_0+k}$ konverguje. Tím pádem i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

2. Dokážeme pomocí prvního tvrzení ($1 \Rightarrow 2$). Označme $b_n = \sup\{\frac{a_{n+1}}{a_n}, \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}, \dots\}$. Platí:
$$\lim_{n\to\infty} b_n = \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1.$$
Zvolme $q \in (\lim_{n\to\infty} b_n, 1)$. Z definice $\lim_{n\to\infty} b_n$ pro $\varepsilon = q - \lim_{n\to\infty} b_n$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $\forall n \geq n_0$ platí:
$$b_n < q \Rightarrow \sup\left\{\frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}}, \frac{a_{n_0+2}}{a_{n_0+1}}, \dots\right\} < q.$$
Tedy $\forall n \geq n_0$ platí, že $\frac{a_{n+1}}{a_n} < q$, a tím pádem $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

3. Dokážeme pomocí druhého tvrzení ($2 \Rightarrow 3$). Víme, že $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, a tedy i $\limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$. Což dle druhého bodu znamená, že $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

4. Víme, že $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$. Z definice limity pro $\varepsilon = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} - 1$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $\forall n \geq n_0$ platí:
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \Rightarrow a_{n+1} > a_n.$$
Máme rostoucí posloupnost kladných čísel, a tedy $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ tím pádem diverguje.

Důkaz je tímto hotov. □

Věta 4.8 (Kondenzační kritérium)**.** Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s nezápornými členy splňující $a_{n+1} \leq a_n \ \forall n \in \mathbb{N}$. Pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje právě tehdy, když $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ konverguje.

Důkaz. Pro $k \in \mathbb{N}$ máme:
$$s_k = \sum_{j=1}^{k} a_j, \ t_k = \sum_{j=0}^{k} 2^j a_{2^j}.$$

Dokážeme postupně jednotlivé implikace:

1. Levá implikace: Víme tedy, že $\sum_{j=0}^{\infty} 2^j a_{2^j} = A$, $A \in \mathbb{R}$. Chceme dokázat, že pokud tato řada konverguje, tak existuje vlastní limita s_k. Nechť $m \in \mathbb{N}$ a nalezneme $k \in \mathbb{N}$ tak, že $m < 2^k$. Pak $t_{k-1} \leq A$ a platí:

$$\begin{aligned} s_m &\leq a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + \cdots + (a_{2^{k-1}} + \cdots + a_{2^k - 1}) \\ &\leq \sum_{j=0}^{k-1} 2^j a_{2^j} = t_{k-1} \leq A, \end{aligned}$$

protože $a_2 + a_3 \leq 2a_2$, $a_4 + a_5 + a_6 + a_7 \leq 4a_4$ a poslední výraz je menší nebo roven $2^{k-1} a_{2^{k-1}}$. Tedy s_m je shora omezená (a rostoucí), a tedy existuje vlastní limita. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

2. Pravá implikace: Označme $B = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $B \in \mathbb{R}$. Zvolme $k \in \mathbb{N}$ a nalezneme $m \in \mathbb{N}$ tak, aby $2^k \leq m$. Pak $s_m \leq B$ a platí:

$$\begin{aligned} B \geq s_m &\geq a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + (a_5 + a_6 + a_7 + a_8) + \cdots + (a_{2^{k-1}+1} + \cdots + a_{2^k}) \\ &\geq a_1 + \sum_{j=1}^{k} 2^{j-1} a_{2^j} = a_1 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k} 2^j a_{2^j} \geq \frac{1}{2} t_k \Rightarrow t_k \leq 2B, \end{aligned}$$

protože $a_2 \geq a_1$, $a_3 + a_4 \geq 2a_4$ a poslední člen je větší roven $2^{k-1} a_{2^k}$. t_k je shora omezená, a tedy existuje $\lim_{k\to\infty} t_k \in \mathbb{R}$. $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ konverguje.

Tímto je důkaz hotov. $\square$

4.3 Absolutní a neabsolutní konvergence řad

Definice 4.9. Nechť pro řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ platí, že $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konverguje. Pak říkáme, že $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně.

Věta 4.10 (Bolzano-Cauchyova podmínka pro konvergenci řad)**.** Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje právě tehdy, když je splněna následující BC podmínka:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall m, n \in \mathbb{N}, m \geq n, m, n \geq n_0 : \left| \sum_{j=n}^{m} a_j \right| < \varepsilon.$$

Důkaz. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konerguje právě tehdy, když existuje $\lim_{n\to\infty} s_n \in \mathbb{R}, s_n = a_1 + \cdots + a_n$. Na tuto posloupnost použijeme BC podmínku pro posloupnosti:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall m, n \geq n_0 : |s_m - s_{n-1}| < \varepsilon.$$

Neboli:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall m, n \geq n_0 : \left|(a_1 + \cdots + a_m) - (a_1 + \cdots + a_{n-1})\right| < \varepsilon.$$

A tedy:

$$\left| \sum_{j=n}^{m} a_j \right| = |a_n + a_{n+1} + \cdots + a_m| < \varepsilon.$$

Věta tedy platí. $\square$

Věta 4.11 (Vztah konvergence a absolutní konvergence)**.** Nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

Důkaz. Jestliže $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konverguje, pak podle BC podmínky platí:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall m, n \in \mathbb{N}, m \geq n, m, n \geq n_0 : \sum_{j=n}^{m} |a_j| < \varepsilon.$$

Chceme dokázat, že $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. K tomu stačí ověřit BC podmínku. K $\varepsilon > 0$ volme n_0 jako nahoře. Pak $\forall m, n \geq n_0$ platí:

$$\left| \sum_{j=n}^{m} a_j \right| \leq \sum_{j=n}^{m} |a_j| < \varepsilon.$$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ tedy konverguje. □

Důsledek. Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada. Pak platí:

1. Jestliže $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.
2. Jestliže $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

Poznámka. Dokonce platí následující:

1. Jestliže $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.
2. Jestliže $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Věta 4.12 (Leibnitzovo kritérium)**.** Nechť $\{a_n\}$ je nerostoucí posloupnost nezáporných čísel. Pak $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ konverguje právě tehdy, když $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Důkaz. Dokážeme postupně jednotlivé implikace:

1. <u>Pravá implikace</u>: Platí:

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n a_n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0,$$

kde první rovnost plyne z nutné podmínky pro konvergenci řad.

2. <u>Levá implikace</u>: Platí:

$$s_{2k+2} - s_{2k} = (-1)^{2k+2} a_{2k+2} + (-1)^{2k+1} a_{2k+1} = a_{2k+2} - a_{2k+1} \leq 0.$$

Z toho plyne, že s_{2k} je nerostoucí. Dále:

$$s_{2k+1} - s_{2k-1} = -a_{2k+1} + a_{2k} \geq 0,$$

a tedy s_{2k+1} je neklesající. Můžeme psát:

$$s_{2k} = (-a_1 + a_2) + (-a_3 + a_4) + \cdots + (-a_{2k-1} + a_{2k}) \leq 0,$$

protože uzávorkované členy jsou menší nebo rovny nule. Platí:

$$s_{2k+1} = -a_1 + (a_2 - a_3) + (a_4 - a_5) + \cdots + (a_{2k} - a_{2k+1}) \geq -a_1,$$

protože uzávorkované členy jsou větší nebo rovny nule. Dále:

$$0 \geq s_{2k} = s_{2k+1} - a_{2k+1} \geq -a_1 + a_{2k+1} \geq -a_1,$$

a tedy je s_{2k} omezená. Analogicky:

$$-a_1 \leq s_{2k+1} = s_{2k} - a_{2k+1} \leq 0 - a_{2k+1} \leq 0.$$

Zjistili jsme, že i s_{2k+1} je omezená. Pak jistě existuje $\lim_{k\to\infty} s_{2k} = S_1 \in \mathbb{R}$ a $\lim_{k\to\infty} s_{2k+1} = S_2 \in \mathbb{R}$. Dále také víme, že $s_{2k+1} = s_{2k} - a_{2k+1}$. Takže platí:

$$S_2 = \lim_{k\to\infty} s_{2k+1} = \lim_{k\to\infty} (s_{2k} - a_{2k+1}) = S_1 - \lim_{k\to\infty} a_{2k+1} = S_1,$$

protože $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Z toho pak jistě platí:

$$\lim_{k\to\infty} s_{2k} = \lim_{k\to\infty} s_{2k+1} \in \mathbb{R},$$

a tedy existuje i $\lim_{n\to\infty} s_n \in \mathbb{R}$.

Věta je dokázána. □

Lemma (Abelova parciální sumace)**.** Nechť $m, n \in \mathbb{N}$ a $m \leq n$. Nechť $a_m, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ a $b_m, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$. Označme $s_k = \sum_{i=m}^{k} a_i$. Pak platí:

$$\sum_{i=m}^{n} a_i b_i = \sum_{i=m}^{n-1} s_i (b_i - b_{i+1}) + s_n b_n.$$

Důkaz. Zřejmě:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=m}^{n} a_i b_i &= a_m b_m + a_{m+1} b_{m+1} + \cdots + a_n b_n \\
&= s_m b_m + (s_{m+1} - s_m) b_{m+1} + \cdots + (s_n - s_{n-1}) b_n \\
&= s_m (b_m - b_{m+1}) + s_{m+1}(b_{m+1} - b_{m+2}) + \cdots + s_{m-1}(b_{n-1} - b_n) + s_n b_n \\
&= \sum_{i=m}^{n-1} s_i (b_i - b_{i+1}) + s_n b_n.
\end{aligned}$$

Lemma tedy platí. □

Věta 4.13 (Abel-Dirichletovo kritérium)**.** Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel a $\{b_n\}$ je nerostoucí posloupnost nezáporných čísel. Nechť je splněna alespoň jedna z následujících podmínek:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentní.

2. $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ má omezené částečné součty, tedy $\forall m \in \mathbb{N}$ existuje $M > 0$ tak, že:
$$|s_m| = \left|\sum_{i=1}^{m} a_i\right| < M.$$

Pak je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konvergentní.

Důkaz. Budeme ověřovat BC podmínku pro $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$. Označme $s_k = \sum_{i=m}^{k} a_i$. b_n je nerostoucí a $b_n \geq 0$, a tedy $\forall i$ platí:
$$b_i - b_{i+1} \geq 0.$$

Dále existuje $K > 0$ tak, že $\forall n$ platí $|b_n| \leq K$. Nyní dokážeme, že je-li splňena jedna z podmínek, je věta pravdivá.

1. Jestliže $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, pak podle BC podmínky $\forall \varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $\forall i, m, i \geq m \geq n_0$ platí:
$$|s_i| = \left|\sum_{j=m}^{i} a_j\right| < \varepsilon.$$
Nyní k $\varepsilon > 0$ zvolme n_0 jako výše a nechť $n \geq m \geq n_0$. Pak:
$$\begin{aligned}\left|\sum_{i=m}^{n} a_i b_i\right| &\leq \sum_{i=m}^{n-1} |s_i(b_i - b_{i+1})| + |s_n||b_n| \leq \varepsilon \sum_{i=m}^{n-1}(b_i - b_{i+1}) + \varepsilon b_n \\ &= \varepsilon(b_m - b_n) + \varepsilon b_n \leq \varepsilon K + \varepsilon K = 2K\varepsilon.\end{aligned}$$
Podle BC podmínky $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konverguje.

2. Opět $s_k = \sum_{i=m}^{k} a_i$. Z předpokladů víme, že existuje $M > 0$ tak, že $\forall i \geq m$ platí:
$$|s_i| = \left|\sum_{j=1}^{i} a_n - \sum_{j=1}^{m-1} a_n\right| \leq M.$$
Z $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ k $\varepsilon > 0$ existuje n_0 tak, že $\forall n \geq n_0$ platí:
$$|b_n - 0| < \varepsilon \Rightarrow |b_n| < \varepsilon.$$
Nyní $\forall n \geq m \geq n_0$ platí:
$$\begin{aligned}\left|\sum_{i=m}^{n} a_i b_i\right| &\leq \sum_{i=m}^{n-1} |s_i(b_i - b_{i+1})| + |s_n||b_n| \leq \sum_{i=m}^{n-1} M(b_i - b_{i+1}) + M b_n \\ &= M(b_m - b_n) + M b_n \leq M\varepsilon + M\varepsilon = 2M\varepsilon.\end{aligned}$$
Podle BC podmínky $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konverguje.

Věta je tímto dokázána. □

Poznámka. V Abel-Dirichletově kritériu stačí předpokládat, že $\{b_n\}$ je monotónní a omezená posloupnost. Pak totiž z prvního bodu dostaneme, že pokud $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentní a $\{b_n\}$ je rostoucí a omezená posloupnost, pak také $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konverguje.

4.4 Přerovnání řad a součin řad

Definice 4.14. Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada a $p\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je bijekce[1]. Řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_{p(n)}$ nazýváme přerovnáním řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Lemma 4.15. Nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. Pak $\forall \varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $\left|\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n\right| < \varepsilon$.

Věta 4.16 (O přerovnání absolutně konvergentní řady)**.** Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je absolutně konvergentní řada a $\sum_{n=1}^{\infty} a_{p(n)}$ je její přerovnání. Pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_{p(n)}$ je absolutně konvergentní řada a má stejný součet.

Důkaz. Jestliže $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konverguje, pak dle lemmatu pro $\varepsilon > 0$ najdeme $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že platí:

$$\sum_{i=n_0}^{\infty} |a_i| < \varepsilon.$$

Zvolme $n_0' = \max\{p(1), p(2), \ldots, p(n_0)\}$. Pak $\forall n' \geq n_0'$ platí:

$$p^{-1}(n') \geq n_0.$$

Tedy $\forall n' \geq m' \geq n_0'$ platí:

$$\sum_{i=m'}^{n'} |a_{p(i)}| \leq \sum_{i=n_0}^{\infty} |a_i| < \varepsilon,$$

protože $p^{-1}(m') \geq n_0$ a $p^{-1}(n') \geq n_0$. Tím pádem podle BC podmínky $\sum_{n=1}^{\infty} |a_{p(n)}|$ konverguje, a tedy i $\sum_{n=1}^{\infty} a_{p(n)}$ konverguje. Nyní dokážeme, že $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} a_{p(n)}$ konvergují k tomu samému. Označme $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$ a $\sum_{n=1}^{\infty} a_{p(n)} = A'$. Víme, že k $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že platí:

$$\sum_{i=n_0}^{\infty} |a_i| < \varepsilon.$$

Zvolme $n_0' \geq \max\{p(1), p(2), \ldots, p(n_0)\}$, aby platilo:

$$\sum_{i=n_0}^{\infty} |a_{p(i)}| < \varepsilon.$$

Pak platí:

$$\left|\sum_{i=1}^{n_0} a_i - A\right| = \left|\sum_{i=n_0+1}^{\infty} a_i\right| \leq \sum_{i=n_0+1}^{\infty} |a_i| < \varepsilon.$$

A také:

$$\left|\sum_{i=1}^{n_0'} a_{p(i)} - A'\right| < \varepsilon.$$

[1] p zde tedy značí permutaci, často se také setkáme se značením π.

Nyní:

$$|A - A'| \le \left|\sum_{i=1}^{n_0} a_i - A\right| + \left|\sum_{i=1}^{n_0} a_i - \sum_{i=1}^{n_0'} a_{p(i)}\right| + \left|\sum_{i=1}^{n_0'} a_{p(i)} - A'\right| \le \varepsilon + \sum_{i \ge n_0} |a_i| + \varepsilon < 3\varepsilon.$$

Tím je důkaz hotov. □

Věta 4.17 (Riemannova věta)**.** Neabsolutně konvergentní řadu lze přerovnat k libovolnému součtu $s \in \mathbb{R}^*$. Tím se snažíme říct, že pokud $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje a $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = +\infty$, pak $\forall s \in \mathbb{R}^*$ existuje bijekce $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tak, že $\sum_{n=1}^{\infty} a_{p(n)} = s$.

Definice 4.18. Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou řady. Cauchyovským součinem těchto řad nazveme řadu $\sum_{k=2}^{\infty} (\sum_{i=1}^{\infty} a_{k-i} b_i)$.

Věta 4.19 (O součinu řad)**.** Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergují absolutně. Pak:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right) = \sum_{k=2}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_{k-i} b_i\right).$$

Důkaz. Označme $s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \xrightarrow{n\to\infty} A \in \mathbb{R}$ a $\sigma_n = \sum_{j=1}^{n} b_j \xrightarrow{n\to\infty} B \in \mathbb{R}$. Dále $\rho_n = \sum_{k=2}^{n} \left(\sum_{i=1}^{k-1} a_{k-i} b_i\right)$. Chceme dokázat, že $\lim_{n\to\infty} \rho_n = AB$. Nechť $\varepsilon > 0$. Pak existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že platí:

$$\sum_{i=n_0}^{\infty} |a_i| < \varepsilon,\ \sum_{j=n_0}^{\infty} |b_j| < \varepsilon.$$

Dále:

$$|s_{n_0}\sigma_{n_0} - AB| < \varepsilon.$$

Nechť $n \ge 2n_0$. Pak:

$$\begin{aligned}
|\rho_n - AB| &\le |\rho_n - s_{n_0}\sigma_{n_0}| + |s_{n_0}\sigma_{n_0} - AB| \\
&\le |(a_1 b_1) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) + \cdots + (a_{n-1} b_1 + \cdots + a_1 b_{n-1}) \\
&- (a_1 + \cdots + a_{n_0})(b_1 + \cdots + b_{n_0})| + \varepsilon \\
&\le \sum_{i \ge n_0 \vee j \ge n_0} |a_i b_j| + \varepsilon \le \sum_{i=1}^{\infty} |a_i| \sum_{j=n_0}^{\infty} |b_j| + \sum_{i=n_0}^{\infty} |a_i| \sum_{j=1}^{\infty} |b_j| + \varepsilon \\
&\le \varepsilon \sum_{i=1}^{\infty} |a_i| + \varepsilon \sum_{j=1}^{\infty} |b_j| + \varepsilon = \varepsilon(A + B + 1).
\end{aligned}$$

Věta tedy platí. □

Poznámka. Pro platnost věty dokonce stačí, aby konvergovala pouze jedna řada, důkaz je však obtížnější.

4.5 Limita posloupnosti a součet řady v komplexním oboru

Následuje velmi stručný úvod do dané problematiky. Podrobnější výklad později.

Definice 4.20. Nechť $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou dvě reálné posloupnosti. Pak $c_n = a_n + ib_n$ je komplexní posloupnost. Řekneme, že $\lim_{n\to\infty} c_n = A + iB$, pokud existují $\lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}$ a $\lim_{n\to\infty} b_n = B \in \mathbb{R}$.

Definice 4.21. Nechť $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou dvě reálné posloupnosti a $c_n = a_n + ib_n$. Řekneme, že komplexní řada $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konverguje k $A + iB$, pokud $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$.

Věta 4.22 (Vztah konvergence a absolutní konvergence pro komplexní řady)**.** Nechť $\{c_n\}$ je komplexní posloupnost a řada $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$ konverguje. Pak i řada $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konverguje.

Důkaz. Z BC podmínky pro konvergenci $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$ dostaneme:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \ \forall m \geq n \geq n_0 : \sum_{j=n}^{m} |c_j| < \varepsilon.$$

Víme, že $c_n = a_n + ib_n$. Nyní $\forall m \geq n \geq n_0$ platí:

$$\sum_{j=n}^{m} |a_j| \leq \sum_{j=n}^{m} |c_j| < \varepsilon, \ \sum_{j=n}^{m} |b_j| \leq \sum_{j=n}^{m} |c_j| < \varepsilon.$$

Tedy $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ a $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ splňují BC podmínku, a tedy konvergují. Pak jistě konvergují i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ a věta platí. □

5 Primitivní funkce

5.1 Základní vlastnosti

Definice 5.1. Nechť je funkce f definována na otevřeném intervalu I. Řekneme, že funkce F je primitivní funkce k funkci f, pokud pro každé $x \in I$ existuje $F'(x)$ a $F'(x) = f(x)$. Množinu všech primitivních funkcí k f na I značíme $\int f(x)\,\mathrm{d}x$.

Věta 5.2 (O jednoznačnosti primitivní funkce až na konstantu)**.** Nechť F a G jsou primitivní funkce k f na otevřeném intervalu I. Pak existuje $c \in \mathbb{R}$ tak, že $\forall x \in I$ platí:

$$F(x) = G(x) + c.$$

Důkaz. Označme $H(x) = F(x) - G(x)$. Pak $\forall x \in I$ platí:

$$(H(x))' = (F(x) - G(x))' = f(x) - f(x) = 0,$$

a tedy z Lagrangeovy věty víme, že existuje $c \in \mathbb{R}$ tak, že $H(x) = c$ na I. □

Poznámka. Uveďme několik důležitých poznámek:

1. Primitivní funkci značíme následovně:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + c, \ c \in \mathbb{R}.$$

2. Nechť F je primitivní k f. Pak F je spojitá. To můžeme snadno náhlednout z toho, že F má všude vlastní derivaci.

3. Ne všechny funkce mají primitivní funkci. Příkladem takové funkce je $\operatorname{sgn}(x)$.

4. Funkce F je diferencovatelná, ale její derivace nemusí být spojitá na $\mathbb{R}$. Například funkce:

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Věta 5.3 (O vztahu spojitosti a existence primitivní funkce - *Důkaz v příští kapitole*)**.** Nechť I je otevřený interval a f je spojitá funkce na I. Pak f má na I primitvní funkci.

Věta 5.4 (Linearita a primitivní funkce)**.** Nechť f má na I primitivní funkci F a g má na I primitivní funkci G. Dále nechť $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Pak $\alpha f + \beta g$ má primitivní funkci $\alpha F + \beta G$.

Důkaz. Jistě $\forall x \in I$ platí:

$$(\alpha F(x) + \beta G(x))' = \alpha F'(x) + \beta G'(x) = \alpha f(x) + \beta g(x).$$

Věta tedy platí. □

Věta 5.5 (Nutná podmínka existence primitivní funkce)**.** Nechť f má na otevřeném intervalu I primitivní funkci. Pak f má na I Darbouxovu vlastnost, tedy pro každý interval $J \subset I$ je $f(J)$ interval.

Důkaz. Nechť $J \subset I$ je interval. Nechť $y_1, y_2 \in f(J)$ a $y_1 < z < y_2$. Chceme ukázat, že $z \in f(J)$. Nechť F je primitivní k f na I. Pro $x \in I$ definujeme $H(x) = F(x) - zx$. Pak je H spojitá na I a $\forall x \in I$ platí:

$$(H(x))' = F'(x) - z = f(x) - z.$$

Nalezneme $x_1, x_2 \in J$ tak, že $f(x_1) = y_1$ a $f(x_2) = y_2$. Nechť $x_1 < x_2$ (v opačném případě by byl důkaz analogický, hledali bychom maximum). Funkce H je spojitá na $[x_1, x_2]$, a tedy tam nabývá minima. Víme:

$$H'(x_1) = f(x_1) - z < f(x_1) - y_1 = 0.$$

Tedy existuje $\delta > 0$ tak, že $\forall x \in [x_1, x_1 + \delta)$ platí, že $H(x) < H(x_1)$. V x_1 není nabyto minimum. Analogicky:

$$H'(x_2) = f(x_2) - z > f(x_2) - y_2 = 0.$$

Tím pádem existuje $\delta > 0$ tak, že $\forall x \in (x_2 - \delta, x_2]$ platí, že $H(x) < H(x_2)$. Tedy ani v x_2 není nabyto minimum. Minimum musí být v jistém $x_0 \in (x_1, x_2)$. Dle Fermatovy věty platí, že:

$$H'(x_0) = f(x_0) - z = 0 \Rightarrow f(x_0) = z.$$

Funkce f tedy nabývá mezihodnot a věta platí. □

Věta 5.6 (Integrace per partes)**.** Nechť I je otevřený interval a funkce f a g jsou spojité na I. Nechť F je primitivní k f na I a G je primitvní k g na I. Pak $\forall x \in I$ platí:

$$\int g(x)F(x)\,\mathrm{d}x = G(x)F(x) - \int G(x)f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Důkaz. G je spojitá a f je spojitá, a tedy i Gf je spojitá a existuje k ní primitivní funkce. Nechť H je primitivní k Gf. Dále platí:

$$(G(x)F(x) - H(x))' = g(x)F(x) + G(x)f(x) - G(x)f(x) = g(x)F(x).$$

Neboli:

$$\int g(x)F(x) = G(x)F(x) - H(x).$$

Důkaz je hotov. □

Věta 5.7 (První věta o substituci)**.** Nechť F je primitivní k f na (a, b). Nechť φ je funkce definovaná na (α, β) s hodnotami v intervalu (a, b), která má v každém bodě (α, β) vlastní derivaci. Pak $\forall t \in (\alpha, \beta)$ platí:

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = F(\varphi(t)).$$

Důkaz. Podle věty o derivaci složené funkce $\forall t \in (\alpha, \beta)$ platí:

$$(F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t).$$

Věta tedy platí. $\square$

Věta 5.8 (Druhá věta o substituci)**.** Nechť má funkce φ v každém bodě intervalu (α, β) vlastní nenulovou derivaci a $\varphi((\alpha, \beta)) = (a, b)$. Funkce je tedy prostá a na. Nechť f je definovaná na intervalu (a, b) a $\forall t \in (\alpha, \beta)$ platí:

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = G(t).$$

Pak $\forall x \in (a, b)$ platí:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = G(\varphi^{-1}(x)).$$

Důkaz. Z nutné podmínky existence primitivní funkce plyne, že φ' nabývá mezihodnot. Navíc je všude nenulová, tedy buď $\varphi' > 0$ na (α, β), nebo $\varphi' < 0$ na (α, β). φ je tedy ryze monotónní a spojitá. Můžeme tím pádem použít větu o derivaci inverzní funkce a dostaneme:

$$(\varphi^{-1}(x))' = \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))}.$$

Nyní $\forall x \in (a, b)$ platí:

$$(G(\varphi^{-1}(x)))' = G'(\varphi^{-1}(x))(\varphi^{-1}(x))' = f(\varphi(\varphi^{-1}(x)))\varphi'(\varphi^{-1}(x))\frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))} = f(x).$$

Věta tedy platí. $\square$

Poznámka. Při použití druhé věty o substituci je vždy nutné ověřit, že φ je prostá a na.

5.1.1 Tabulkové integrály

Uveďme základní vzorce pro integraci:

$$\begin{aligned}
\int x^n\,\mathrm{d}x &= \frac{x^n}{n+1} + c,\ n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}, x \in \mathbb{R},\\
\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x &= \ln|x| + c,\ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\\
\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x &= \mathrm{e}^x + c,\ x \in \mathbb{R},\\
\int \sin(x)\,\mathrm{d}x &= -\cos(x) + c,\ x \in \mathbb{R},\\
\int \cos(x)\,\mathrm{d}x &= \sin(x) + c,\ x \in \mathbb{R},\\
\int \frac{1}{\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x &= \mathrm{tg}(x) + c,\ x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) + k\pi, k \in \mathbb{Z},\\
\int -\frac{1}{\sin^2(x)}\,\mathrm{d}x &= \mathrm{cotg}(x) + c,\ x \in (0, \pi) + k\pi, k \in \mathbb{Z},
\end{aligned}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin(x) + c,\ \ x \in (-1,1),$$
$$\int -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arccos(x) + c,\ \ x \in (-1,1).$$

5.2 Integrace racionální funkce

Definice 5.9. Racionální funkcí rozumíme podíl dvou polynomů $\frac{P}{Q}$, kde Q je nenulový polynom.

Věta (Základní věta algebry)**.** Nechť $P(x) = a_n x^n + \ldots a_1 x + a_0$, kde $a_j \in \mathbb{R}$, $j \in \{0,\ldots,n\}$ a $a_n \neq 0$. Pak existují $x_1,\ldots,x_n \in \mathbb{C}$ tak, že platí:

$$P(x) = a_n(x-x_1)\ldots(x-x_n),\ \ x \in \mathbb{R}$$

Lemma (O komplexních kořenech polynomu)**.** Nechť P je polynom s reálnými koeficienty a $z \in \mathbb{C}$ je kořen P násobnosti $k \in \mathbb{N}$. Pak i $\overline{z}$ je kořen násobnosti k.

Poznámka. K důkazu lemmatu využijeme toho, že $(\overline{z})^k = \overline{(z^k)}$. Důkaz je jednoduchý a vypadá následovně:

$$\begin{aligned}(\overline{z})^k &= \overline{(r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^k} = \overline{r^k(\cos(k\varphi) + i\sin(k\varphi))} = r^k(\cos(k\varphi) + i\sin(-k\varphi)) \\ &= r^k(\cos\varphi + i\sin -\varphi)^k = (\overline{z})^k.\end{aligned}$$

Důkaz. Pokud $z \in \mathbb{R}$, tak tvrzení jistě platí, protože $z = \overline{z}$. Zajimavý je pouze případ $z \in \mathbb{C}$. Důkaz provedeme matematickou indukcí podle k. Pro $k = 1$ ředpokládáme, že z je kořen, neboli $P(z) = 0$. Pak platí:

$$0 = \overline{P(z)} = \overline{a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0} = a_n\overline{(z^n)} + \cdots + a_1\overline{z} + a_0 = a_n(\overline{z})^n + \cdots + a_1\overline{z} + a_0 = P(\overline{z}),$$

a tedy i $\overline{z}$ je kořen. Nyní tedy předpokládejme, že tvrzení platí pro k. Dokážeme, že platí i pro $k+1$. Předpokládejme, že z je kořen alespoň násobnosti $k+1$. Z matematické indukce víme, že $\overline{z}$ je násobnosti alespoň k. Můžeme psát:

$$P(x) = (x-z)^k(x-\overline{z})^k Q(x) = (x^2 - (z+\overline{z})x + z\overline{z})^k Q(x) = (x^2 + \alpha x + \beta)^k Q(x),$$

kde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, a tedy polynom Q má reálné koeficienty. Navíc platí, že $Q(z) = 0$, protože z má násobnost $k+1$. Tím pádem i $Q(\overline{z}) = 0$ z prvního kroku matematické indukce. $\overline{z}$ je tedy také násobnosti $k+1$ a důkaz je hotov. □

Věta 5.10 (O rozkladu na parciální zlomky)**.** Nechť P a Q jsou polynomy s reálnými koeficienty takové, že platí:

1. $\deg(P) < \deg(Q)$,
2. $Q(x) = a_n(x-x_1)^{p_1}\ldots(x-x_k)^{p_k}(x^2+\alpha_1 x+\beta_1)^{q_1}\ldots(x^2+\alpha_l x+\beta_l)^{q_l}$, a_n, $x_1,\ldots,x_k$, $\alpha_1,\ldots,\alpha_l$, $\beta_1,\ldots,\beta_l \in \mathbb{R}$ a $a_n \neq 0$, $p_1,\ldots,p_k$, $q_1,\ldots,q_l \in \mathbb{N}$,

3. žádné dva z mnohočlenů $(x-x_1),\dots,(x-x_k)$, $(x^2+\alpha_1 x+\beta_1),\dots,(x^2+\alpha_l+\beta_l)$ nemají společný kořen,

4. mnohočleny $(x^2+\alpha_1 x+\beta),\dots,(x^2+\alpha_l x+\beta_l)$ nemají reálný kořen.

Pak existují jednoznačně určená čísla $A^i_j \in \mathbb{R}$, $i \in \{1,\dots,k\}$, $j \in \{1,\dots,p_i\}$ a $B^i_j, C^i_j \in \mathbb{R}$, $i \in \{1,\dots,l\}$, $j \in \{1,\dots,q_i\}$ tak, že platí:

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)} = {} & \frac{A^1_1}{x-x_1} + \dots + \frac{A^1_{p_1}}{(x-x_1)^{p_1}} + \dots + \frac{A^k_1}{x-x_k} + \dots + \frac{A^k_{p_k}}{(x-x_k)^{p_k}} \\ & + \frac{B^1_1 x + C^1_1}{x^2+\alpha_1 x+\beta_1} + \dots + \frac{B^1_{q_1} x + C^1_{q_1}}{(x^2+\alpha_1 x+\beta_1)^{q_1}} + \dots + \frac{B^l_1 x + C^l_1}{x^2+\alpha_l x+\beta_l} \\ & + \frac{B^l_{q_l} x + C^l_{q_l}}{(x^2+\alpha_l x+\beta_l)^{q_l}}.\end{aligned}$$

Postup při integraci racionální funkce:

1. Vydělíme polynomy a dostaneme:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x = \int P_1(x)\,\mathrm{d}x + \int \frac{P_2(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x,$$

   kde $\deg(P_2) < \deg(Q)$ a P_1 je polynom.

2. Provedeme rozklad na parciální zlomky dle předešlé věty.

3. Integrujeme parciální zlomky.

5.2.1 Substituce převádějící na racionální funkce

Pomocí R budeme značit racionální funkci. Nechť $a \in \mathbb{R}$. Při integraci funkce typu:

$$\int R\left(e^{ax}\right)\,\mathrm{d}x$$

používáme substituci $t = e^{ax}$. Při integraci funkce typu:

$$\int R(\ln(x))\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

používáme substituci $t = \ln(x)$.

5.2.2 Integrace trigonometrických funkcí

Definice 5.11. Racionální funkcí dvou proměnných rozumíme podíl dvou polynomů $R(a,b) = \frac{P(a,b)}{Q(a,b)}$, kde $P(a,b)$ a $Q(a,b)$ jsou polynomy dvou proměnných a polynom Q není identicky nulový.

Při integraci funkcí typu:

$$\int R(\sin(x), \cos(x))\,\mathrm{d}x$$

používáme následující substituce:

1. Jestliže $R(-\sin(x), \cos(x)) = -R(\sin(x), \cos(x))$, pak $t = \cos(x)$,
2. Jestliže $R(\sin(x), -\cos(x)) = -R(\sin(x), \cos(x))$, pak $t = \sin(x)$,
3. Jestliže $R(-\sin(x), -\cos(x)) = R(\sin(x), \cos(x))$, pak $t = \mathrm{tg}(x)$,
4. Vždy pak funguje substituce $t = \mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$.

Poznámka. Substituce $t = \mathrm{tg}(x)$ a $t = \mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$ jsou substituce druhého druhu a je třeba ověřit, že je funkce prostá a na. Dále je třeba také primitivní funkci po formálním spočtení lepit.

5.2.3 Integrace funkcí obsahující odmocniny

Nechť $q \in \mathbb{N}$ a $ad \neq bc$. Při integraci funkcí typu:

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{q}}\right)\mathrm{d}x$$

používáme substituci $t = \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{q}}$. Nechť $a \neq 0$. Při integraci funkcí typu:

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)\mathrm{d}x$$

používáme Eulerovy substituce:

1. Jestliže má polynom $ax^2 + bx + c$ dvojnásobný kořen $a > 0$, pak:

   $$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}|x-\alpha|$$

   a úpravami dostaneme racionální funkci.

2. Jestliže má polynom ax^2+bx+c dva reálné kořeny α_1 a α_2, tak úpravami převedeme na tvar:

   $$\sqrt{a\frac{x-\alpha_1}{x-\alpha_2}},$$

   popřípadě také na tvar:

   $$\sqrt{a\frac{\alpha_1-x}{\alpha_2-x}}.$$

3. Jestliže polynom $ax^2 + bx + c$ nemá žádné reálné kořeny a $a > 0$, tak používáme substituci $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}x + t$.

6 Určitý integrál

6.1 Riemannův integrál

Definice 6.1. Konečnou posloupnost $\{x_j\}_{j=0}^n$ nazýváme dělením intervalu $[a,b]$, jestliže $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$. Řekneme, že dělení D' zjemňuje dělení D intervalu $[a,b]$, jestliže každý bod dělení D je i bodem dělení D'.

Definice 6.2. Nechť f je omezená funkce definovaná na intervalu $[a,b]$ a D je dělení $[a,b]$. Definujeme horní a dolní součty:

$$S(f,D) = \sum_{j=1}^{n} \sup\{f(x)\colon x \in [x_{j-1},x_j]\}(x_j - x_{j-1}),$$
$$s(f,D) = \sum_{j=1}^{n} \inf\{f(x)\colon x \in [x_{j-1},x_j]\}(x_j - x_{j-1}).$$

Horní a dolní Riemannův integrál:

$$(R)\int_a^{\overline{b}} f(x)\,\mathrm{d}x = \inf\{S(f,D)\colon D \text{ je dělení } [a,b]\},$$
$$(R)\int_{\underline{a}}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = \sup\{s(f,D)\colon D \text{ je dělení } [a,b]\},$$

Pokud platí:

$$(R)\int_a^{\overline{b}} f(x)\,\mathrm{d}x = (R)\int_{\underline{a}}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

pak řekneme, že f je Riemannovsky integrovatelná a píšeme:

$$(R)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Množinu funkcí mající Riemannův integrál značíme $\mathcal{R}([a,b])$.

Poznámka. Omezenost f je nutný předpoklad pro existenci Riemannova integrálu.

Věta 6.3 (O zjemnění dělení)**.** Nechť f je omezená funkce na $[a,b]$, D a D' jsou dělení intervalu $[a,b]$ a D' zjemňuje D. Pak $s(f,D) \le s(f,D') \le S(f,D') \le S(f,D)$.

Důkaz. $s(f,D') \le S(f,D')$ je triviální, neboť supremum je vždy větší nebo rovno infimu. Předpokládejme, že $D = \{x_0, x_1, \dots, x_j, \dots, x_n\}$ a $D' = \{x_0, x_1, \dots, x_z, x_j, \dots, x_n\}$. Pak platí:

$$\inf\{f(x)\colon x \in [x_{j-1},x_j]\} \le \inf\{f(x)\colon x \in [x_{j-1},z]\}$$
$$\inf\{f(x)\colon x \in [x_{j-1},x_j]\} \le \inf\{f(x)\colon x \in [z,x_j]\}.$$

Dále:

$$\begin{aligned}&\inf\{f(x)\colon x\in[x_{j-1},x_j]\}(z-x_{j-1})+\inf\{f(x)\colon x\in[x_{j-1},x_j]\}(x_j-z)\\&\le\inf\{f(x)\colon x\in[x_{j-1},z]\}(z-x_{j-1})+\inf\{f(x)\colon x\in[z,x_j]\}(x_j-z),\end{aligned}$$

z čehož plyne, že $s(f,D)\le s(f,D')$. Pokud se D a D' liši o více bodů, pak postupujeme indukcí. Analogicky bychom dokázali, že $S(f,D')\le S(f,D)$. □

Věta 6.4 (O dvou děleních)**.** Nechť f je omezená funkce na $[a,b]$ a D_1, D_2 jsou dělení intervalu $[a,b]$. Pak $s(f,D_1)\le S(f,D_2)$.

Důkaz. Nechť D zjemňuje D_1 i D_2, tedy například $D=D_1\cup D_2$. Pak D je jemnější než D_1 i D_2 a podle předchozí věty platí:

$$s(f,D_1)\le s(f,D)\le S(f,D)\le S(f,D_2).$$

Věta tedy platí. □

Důsledek. Nechť f je omezená funkce na $[a,b]$, D_1 a D_2 jsou dělení $[a,b]$. Označme $m=\inf\{f(x)\colon x\in[a,b]\}$ a $M=\sup\{f(x)\colon x\in[a,b]\}$. Pak:

$$m(b-a)\le s(f,D_1)\le (R)\int_{\underline{a}}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x\le (R)\int_{a}^{\overline{b}} f(x)\,\mathrm{d}x\le S(f,D_2)\le M(b-a).$$

Definice 6.5. Nechť D je dělení $[a,b]$. Číslo $\nu(D)=\max_{j\in\{1,\dots,n\}}|x_j-x_{j-1}|$ nazveme normou dělení D.

Věta 6.6 (Aproximace Riemannova integrálu pomocí součtů)**.** Nechť f je omezená funkce na $[a,b]$ a $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost dělení $[a,b]$ taková, že $\lim_{n\to\infty}\nu(D_n)=0$ Potom platí:

$$\begin{aligned}(R)\int_{a}^{\overline{b}} f(x)\,\mathrm{d}x&=\inf_{n\in\mathbb{N}} S(f,D_n),\\(R)\int_{\underline{a}}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x&=\sup_{n\in\mathbb{N}} s(f,D_n).\end{aligned}$$

Důkaz. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $f\ge 0$, jinak bychom k f přičetli konstantu. Dokážeme druhou rovnost, první by se dokázala analogicky. Nechť D je dělení a $\varepsilon>0$. Stačí dokázat, že existuje $n_0\in\mathbb{N}$ tak, že $s(f,D_{n_0})\ge s(f,D)-\varepsilon$. Pak by totiž platilo:

$$\int_{\underline{a}}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x=\sup_{D} s(f,D)\ge\sup_{D_n} s(f,D_n)\ge\sup_{D} s(f,D)-\varepsilon=\int_{\underline{a}}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x-\varepsilon.$$

Nechť $0\le f\le K$ a l je počet intervalů D. Zvolme n_0 tak, aby $\nu(D_{n_0})\le\frac{\varepsilon}{4Kl}$. Označme κ intervaly vzniklé dělením $P=D\cup D_{n_0}$ a γ intervaly z P, ve kterých není žádný bod z dělení D. P je jemnější než D, a proto platí:

$$\begin{aligned}s(f,D)\le s(f,P)&=\sum_{L\in\kappa}\inf_L f|L|=\sum_{L\in\gamma}\inf_L f|L|+\sum_{L\in\kappa\setminus\gamma}\inf f|L|\\&\le s(f,D_{n_0})+2Kl\nu(D_{n_0})<s(f,D_{n_0})+\varepsilon.\end{aligned}$$

Tím je důkaz hotov. □

Důsledek. Pokud je D_{n+1} jemnější než D_n a jsou splněny předpoklady předchozí věty, pak platí:

$$\lim_{n\to\infty} S(f, D_n) = (R)\int_a^{\overline{b}} f(x)\,\mathrm{d}x,$$
$$\lim_{n\to\infty} s(f, D_n) = (R)\int_{\underline{a}}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Důkaz. D_{n+1} je jemnější než D_n, a tedy platí:

$$s(f, D_1) \leq s(f, D_2) \leq \cdots \leq s(f, D_n) \leq s(f, D_{n+1}).$$

Posloupnost $s(f, D_n)$ je neklesající, a tedy $\lim_{n\to\infty} s(f, D_n) = \sup s(f, D_n)$. Pro $S(f, D_n)$ bychom dokázali analogicky. □

Věta 6.7 (Kritérium existence Riemannova integrálu)**.** Nechť f je omezená funkce na $[a, b]$. Pak $f \in \mathcal{R}([a, b])$ právě tehdy, když $\forall \varepsilon > 0$ existuje dělení D intervalu $[a, b]$ tak, že $S(f, D) - s(f, D) < \varepsilon$.

Důkaz. Dokážeme postupně obě implikace:

1. Pravá implikace: Předpokládáme, že funkce je Riemannovsky integrovatelná. Zvolme libovolnou posloupnost dělení tak, že $\nu(D_n) \to 0$ pro $n \to \infty$ a bez újmy na obecnosti předpokládejme, že D_{n+1} je jemnější než D_n (pak $S(f, D_{n+1}) \leq S(f, D_n)$ a $s(f, D_{n+1}) \geq s(f, D_n)$) a můžeme psát:

$$\lim_{n\to\infty} S(f, D_n) = (R)\int_a^{\overline{b}} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$
$$\lim_{n\to\infty} s(f, D_n) = (R)\int_a^{b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

   Existuje tedy $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\forall n \geq n_0$ platí:

$$S(f, D_n) - s(f, D_n) < \varepsilon.$$

2. Levá implikace: Zvolme $\varepsilon > 0$ a k němu nalezneme dělení D z předpokladu. Pak:

$$0 \leq (R)\int_a^{\overline{b}} f(x)\,\mathrm{d}x - (R)\int_{\underline{a}}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x \leq S(f, D) - s(f, D) < \varepsilon,$$

   kde jsme využili důsledku za větou 6.4. Toto platí $\forall \varepsilon > 0$, a tedy $(R)\int_a^{\overline{b}} f(x)\,\mathrm{d}x = (R)\int_{\underline{a}}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$ a funkce je Riemannovsky integrovatelná.

Věta je tímto dokázána. □

Definice 6.8. Řekneme, že f je stejnoměrně spojitá na intervalu I, pokud platí:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x, y \in I\colon |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Poznámka. Uveďme dvě důležitá pozorování:

1. Spojitost a stejnoměrná spojitost se liší pořadím kvantifikátorů. Pro spojitost obecně máme:
$$\forall x \in I \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall y \in I \colon |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$
2. Nechť f je stejnoměrně spojitá na I. Pak f je spojitá na I. Toto neplatí obráceně. Funkce $\frac{1}{x}$ je spojitá na $(0, 1)$, ale není na tomto intervalu stejnoměrně spojitá.

Věta 6.9 (O vztahu spojitosti a stejnoměrné spojitosti)**.** Nechť f je spojitá na omezeném uzavřeném intervalu $[a, b]$. Pak f je stejnoměrně spojitá na $[a, b]$.

Důkaz. Dokážeme sporem. Nechť f je na $[a, b]$ spojitá, ale není tam stejnoměrně spojitá. Pak platí, že existuje $\varepsilon > 0$ tak, že pro $\delta = \frac{1}{n}$ existuje $x_n, y_n \in [a, b]$ tak, že $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ a $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$. Interval $[a, b]$ je omezený, a proto lze dle Weierstrassovy věty vybrat z x_n konvergentní podposloupnost. Tedy $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0$. Dále také $\lim_{k\to\infty} y_{n_k} = x_0$, neboť:
$$|y_{n_k} - x_0| \leq |y_{n_k} - x_{n_k}| + |x_{n_k} - x_0| < \frac{1}{n_k} + |x_{n_k} - x_0| \xrightarrow{n \to \infty} 0.$$
Dále f je spojitá v x_0. K našemu $\varepsilon > 0$ tedy existuje $\delta > 0$ tak, že platí:
$$\forall z \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap [a, b] \colon |f(z) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$
Nalezneme $k \in \mathbb{N}$ tak, aby $x_{n_k}, y_{n_k} \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Pak:
$$\varepsilon \leq |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \leq |f(x_{n_k}) - f(x_0)| + |f(x_0) - f(y_{n_k})| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3},$$
čímž dostáváme spor a důkaz je hotov. □

Věta 6.10 (O vztahu spojitosti a Riemannovské integrovatelnosti)**.** Nechť f je spojitá na $[a, b]$. Pak $f \in \mathcal{R}([a, b])$.

Důkaz. Pokud je f na $[a, b]$ spojitá, pak je tam i omezená. Z předchozí věty také víme, že f je na daném intervalu dokonce stejnoměrně spojitá. Nechť $\varepsilon > 0$. Pak platí:
$$\exists \delta > 0 \ \forall x, y \in I \colon |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$
Zvolme dělení D intervalu $[a, b]$ tak, že $\nu(D) = \min_{j\in\{1,\dots n\}}(x_j - x_{j-1}) < \delta$. Nechť $D = \{x_j\}_{j=0}^n$. Označme $M_j = \sup_{[x_j, x_{j-1}]} f$ a $m_j = \inf_{[x_j, x_{j-1}]} f$. Pak ze stejnoměrné spojitosti máme, že $M_j \leq m_j + \varepsilon$, což platí $\forall j \in \{1, \dots, n\}$. Tím pádem:
$$\begin{aligned} S(f, D) - s(f, D) &= \sum_{j=1}^n M_j(x_j - x_{j-1}) - \sum_{j=1}^n m_j(x_j - x_{j-1}) = \sum_{j=1}^n (M_j - m_j)(x_j - x_{j-1}) \\ &\leq \varepsilon \sum_{j=1}^n (x_j - x_{j-1}) = \varepsilon(b - a). \end{aligned}$$
Podle kritéria existence Riemannova integrálu je daná funkce Riemannovsky integrovatelná. □

Věta 6.11 (Vztah monotonie a Riemannovské integrovatelnosti)**.** Nechť f je (omezená) monotónní funkce na intervalu $[a, b]$. Pak $f \in \mathcal{R}([a, b])$.

Důkaz. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že f je neklesající. Nechť $\varepsilon > 0$. Zvolme ekvidistantní dělení $D = \left\{a + (b-a)\frac{j}{n}\right\}_{j=0}^{n}$ a volíme n tak, aby $n > \frac{1}{\varepsilon}(b-a)(f(b)-f(a))$. Nyní:

$$S(f, D) = \sum_{j=1}^{n} \sup_{[x_{j-1}, x_j]} f(x_j - x_{j-1}) = \sum_{j=1}^{n} f(x_j)(x_j - x_{j-1}) = \sum_{j=1}^{n} f(x_j)\frac{b-a}{n}.$$

Obdobně:

$$s(f, D) = \sum_{j=1}^{n} \inf_{[x_{j-1}, x_j]} f(x_j - x_{j-1}) = \sum_{j=1}^{n} f(x_{j-1})(x_j - x_{j-1}) = \sum_{j=1}^{n} f(x_{j-1})\frac{b-a}{n}.$$

Odtud:

$$\begin{aligned} S(f, D) - s(f, D) &= \sum_{j=1}^{n} \left(f(x_j) - f(x_{j-1})\right) \frac{b-a}{n} = \left(f(x_n) - f(x_0)\right)\frac{b-a}{n} \\ &= \left(f(b) - f(a)\right)\frac{b-a}{n} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Z toho dostaneme, že $f \in \mathcal{R}([a, b])$ a věta platí. □

Věta 6.12 (Vlastnosti Riemannova integrálu)**.** O Riemannově integrálu platí následující:

1. <u>Linearita</u>: Nechť $f, g \in \mathcal{R}([a, b])$, $\alpha f \in \mathbb{R}$. Pak $f + g \in \mathcal{R}([a, b])$ a $\alpha f \in \mathcal{R}([a, b])$. Navíc:

$$(R)\int_a^b f(x) + g(x)\,\mathrm{d}x = (R)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + (R)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x,$$
$$(R)\int_a^b \alpha f(x)\,\mathrm{d}x = \alpha(R)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

2. <u>Monotonie</u>: Nechť $f, g \in \mathcal{R}([a, b])$ a $f \leq g$ na $[a, b]$. Pak:

$$(R)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq (R)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

3. <u>Aditivita vzhledem k intervalům</u>: Nechť $a < c < b$. Pak $f \in \mathcal{R}([a, b])$ právě tehdy, když $f \in \mathcal{R}([a, c])$ a $f \in \mathcal{R}([c, b])$ a platí:

$$(R)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (R)\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + (R)\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Důkaz. Dokážeme postupně jednotlivé body:

1. Pokud $f, g \in \mathcal{R}([a,b])$, pak f a g jsou omezené na $[a,b]$, a tedy i $f+g$ a αf jsou omezené na $[a,b]$. Dokážeme nejprve pro $f+g$. Je-li $I \subset [a,b]$ interval, pak:

$$\sup_I (f+g) \leq \sup_I f + \sup_I g, \qquad \inf_I (f+g) \geq \inf_I f + \inf_I g.$$

Proto pro libovolné dělení D intervalu $[a,b]$ platí:

$$s(f,D) + s(g,D) \leq s(f+g,D) \leq S(f+g,D) \leq S(f,D) + S(g,D).$$

To můžeme nahlédnout následovně:

$$\sum_i \inf_{I_i} f|I_i| + \sum_i \inf_{I_i} g|I_i| = \sum_i (\inf_{I_i} f + \inf_{I_i} g)|I_i| \geq \sum_i \inf_{I_i}(f+g)|I_i|.$$

Zvolme dělení $\{D_n\}$ intervalu $[a,b]$ tak, že $\nu(D_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$ a D_{n+1} je jemnější než D_n. Pak:

$$\lim_{n\to\infty} S(f,D_n) + S(g,D_n) = (R)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + (R)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x,$$
$$\lim_{n\to\infty} s(f,D_n) + s(g,D_n) = (R)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + (R)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dále:

$$\lim_{n\to\infty} s(f+g,D_n) = \lim_{n\to\infty} S(f+g,D_n) = (R)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + (R)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x,$$

což plyne z věty o limitě a uspořádání. Máme tedy, že $f+g \in \mathcal{R}([a,b])$ a navíc:

$$(R)\int_a^b f(x) + g(x)\,\mathrm{d}x = (R)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + (R)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Nyní dokážeme pro αf. Předpokládejme nejprve, že $\alpha \geq 0$. Pro každý interval $I \subset [a,b]$ platí:

$$\sup_I \alpha f = \alpha \sup_I f, \qquad \inf_I \alpha f = \alpha \inf_I f.$$

Z toho opět snadno dostaneme:

$$S(\alpha f, D) = \alpha S(f,D), \qquad s(\alpha f, D) = \alpha s(f,D).$$

Nechť $\{D_n\}$ je posloupnost dělení $[a,b]$ tak, že $\nu \xrightarrow{n\to\infty} 0$ a D_{n+1} je jemnější než D_n. Opět:

$$\lim_{n\to\infty} S(\alpha f, D) = \lim_{n\to\infty} \alpha S(f,D) = \alpha(R)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$
$$\lim_{n\to\infty} s(\alpha f, D) = \lim_{n\to\infty} \alpha s(f,D) = \alpha(R)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dostaneme, že $\alpha f \in \mathcal{R}([a,b])$ a navíc:

$$(R)\int_a^b \alpha f(x)\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Zbývá $\alpha < 0$. Stačí dokázat pro $\alpha = -1$, protože z předchozího víme, že například $2f$ je R-integrovatelná. Pak jen použijeme $\alpha = -1$ a dostaneme, že $-2f$ je R-integrovatelná. Nechť $I \subset [a,b]$. Pak:

$$\sup_I(-f) = -\inf_I f, \qquad \inf_I(-f) = -\sup_I f.$$

Zvolme $\{D_n\}$ s $\nu(D_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$ a D_{n+1} je jemnější než D_n. Pak:

$$\lim_{n\to\infty} S(-f,D_n) = \lim_{n\to\infty} -s(f,D_n) = -(R)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$
$$\lim_{n\to\infty} s(-f,D_n) = \lim_{n\to\infty} -S(f,D_n) = -(R)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dostáváme, že $-f \in \mathcal{R}([a,b])$ a také:

$$(R)\int_a^b (-f(x))\,\mathrm{d}x = -(R)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

2. Nechť $\{D_n\}$ je posloupnost dělení s $\nu(D_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$ a D_{n+1} je jemnější než D_n. Pak $\sup_I f \le \sup_I g$, protože $f \le g$ dle předpokladu věty. Tím pádem:

$$(R)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} S(f,D_n) \le \lim_{n\to\infty} S(f,D_n) = (R)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

3. Nechť $\{D_n^1\}$ a $\{D_n^2\}$ jsou posloupnosti dělení $[a,c]$, respektive $[c,b]$ s $\nu(D_n^1) \xrightarrow{n\to\infty} 0$ a $\nu(D_n^2) \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Dále D_{n+1}^1 je jemnější než D_n^1 a D_{n+1}^2 je jemnější než D_n^2. Nechť $D_n = D_n^1 \cup D_n^2$. Pak D_n je dělení $[a,b]$ a $\nu(D_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Navíc D_{n+1} je jemnější než D_n. Začneme levou implikací. Nechť $f \in \mathcal{R}([a,c])$ a $f \in \mathcal{R}([c,b])$. Pak:

$$\lim_{n\to\infty} S(f,D_n^1) = \lim_{n\to\infty} s(f,D_n^1) = (R)\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x,$$
$$\lim_{n\to\infty} S(f,D_n^2) = \lim_{n\to\infty} s(f,D_n^2) = (R)\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Tedy:

$$\lim_{n\to\infty} S(f,D_n) = \lim_{n\to\infty} S(f,D_n^1) + S(f,D_n^2) = (R)\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + (R)\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$
$$\lim_{n\to\infty} s(f,D_n) = \lim_{n\to\infty} s(f,D_n^1) + s(f,D_n^2) = (R)\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + (R)\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Tím pádem máme, že $f \in \mathcal{R}([a,b])$ a navíc:

$$(R)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (R)\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + (R)\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Ještě dokážeme pravou implikaci. Nechť $f \in \mathcal{R}([a,b])$. Pak:

$$\begin{aligned} 0 &\leq S(f, D_n^1) - s(f, D_n^1) \leq S(f, D_n^1) - s(f, D_n^1) + S(f, D_n^2) - s(f, D_n^2) \\ &= S(f, D_n) - s(f, D_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S(f, D_n^1) - s(f, D_n^1) = 0. \end{aligned}$$

Platí tedy, že $f \in \mathcal{R}([a,c])$. Analogicky $f \in \mathcal{R}([a,b])$. Následující rovnost:

$$(R)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (R)\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + (R)\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

plyne z předchozí části důkazu.

Věta je tímto dokázána. □

Úmluva. Definujme následující:

1. Nechť $b < a$. Pak:
$$(R)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -(R)\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x.$$

2. Pro libovolné $a \in \mathbb{R}$ platí:
$$(R)\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Věta 6.13 (O derivaci integrálu podle horní meze)**.** Nechť J je neprázdný interval a $f \in \mathcal{R}([\alpha,\beta])$ pro každé $\alpha, \beta \in J$. Nechť $c \in J$ je libovolný pevný bod J. Definujme na J funkci:

$$F(x) = (R)\int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Pak platí:

1. F je spojitá na J.

2. Je-li f spojitá v $x_0 \in J$, pak $F'(x_0) = f(x_0)$.

Důkaz. Dokážeme postupně jednotlivé body věty:

1. Nechť $y_0 \in J$ není pravým krajním bodem J. Chceme dokázat, že $\lim_{y\to y_0^+} F(y) = F(y_0)$. Nyní:

$$F(y) - F(y_0) = (R)\int_c^y f(t)\,\mathrm{d}t - (R)\int_c^{y_0} f(t)\,\mathrm{d}t = (R)\int_{y_0}^y f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Najdeme $\delta > 0$ tak, že $[y_0, y_0+\delta] \subset J$. Pak $f \in \mathcal{R}([y_0, y_0+\delta])$. Každá Riemannovsky integrovatelná funkce je ale omezená. Existuje tedy $M > 0$ tak, že $\forall x \in [y_0, y_0+\delta]$ platí, že $-M \leq f(x) \leq M$. Tím pádem $\forall y \in [y_0, y_0+\delta]$ platí:

$$-M(y-y_0) \leq (R)\int_{y_0}^{y} f(t)\,\mathrm{d}t \leq M(y-y_0).$$

Jelikož $-M(y-y_0)$ a $M(y-y_0)$ jdou k nule pro $y \to y_0^+$, tak platí:

$$\lim_{y\to y_0^+} F(y) - F(y_0) = \lim_{y\to y_0^+} (R)\int_{y_0}^{y} f(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Limita zleva by se provedla analogicky.

2. Víme:

$$F'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left((R)\int_{c}^{x_0+h} f(t)\,\mathrm{d}t - (R)\int_{c}^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t\right)$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Dále platí:

$$\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,\mathrm{d}t - f(x_0) = \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} (f(t) - f(x_0))\,\mathrm{d}t.$$

Víme, že f je spojitá. Zvolme tedy $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $\delta > 0$ tak, že $\forall t \in [x_0-\delta, x_0+\delta]$ platí $|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$. Pak $\forall h, |h| < \delta$ a $\forall t \in [x_0, x_0+h]$ platí:

$$-\varepsilon = \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} -\varepsilon\,\mathrm{d}t < \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} (f(t) - f(x_0))\,\mathrm{d}t < \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} \varepsilon\,\mathrm{d}t = \varepsilon.$$

Tím pádem dostaneme:

$$F'(x_0) - f(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} (f(t) - f(x_0))\,\mathrm{d}t = 0,$$

protože $\left|\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}(f(t) - f(x_0))\,\mathrm{d}t\right| < \varepsilon$.

Tím je důkaz hotov. □

Důsledek (Věta 5.3)**.** Je-li f spojitá na J, pak má na J primitivní funkci.

Důkaz. Zřejmě $\forall \alpha, \beta \in J$ platí, že f je spojitá na $[\alpha, \beta]$, a tedy existuje $(R)\int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x$. Podle druhého bodu předchozí věty je F primitivní k f na J. □

Důsledek. Nechť f je spojitá na $[\alpha, \beta]$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (je tedy omezená). Pak:

$$(R)\int_{\alpha}^{\beta} f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to\beta^-} F(x) - \lim_{x\to\alpha^+} F(x),$$

kde F je primitivní k f na (α, β).

Důkaz. Definujme:

$$f(x) = \begin{cases} f(\alpha), & x \in [\alpha - 1, \alpha], \\ f(x), & x \in [\alpha, \beta], \\ f(\beta), & x \in [\beta, \beta + 1]. \end{cases}$$

Pak f je spojitá na $[\alpha - 1, \beta + 1]$. Označme:

$$G(x) = G(\alpha) + (R) \int_\alpha^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Pak G je primitivní k f dle předchozího důsledku na $(\alpha - 1, \beta + 1)$ a za x dosadíme β:

$$G(\beta) - G(\alpha) = (R) \int_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Nechť F je primitiví k f na (α, β). Pak existuje $d \in \mathbb{R}$ tak, že $F = G + d$ na (α, β). Platí:

$$\lim_{x \to \alpha^+} F(x) = \lim_{x \to \alpha^+} G(x) + d = G(\alpha) + d$$
$$\lim_{x \to \beta^-} F(x) = \lim_{x \to \beta^-} G(x) + d = G(\beta) + d.$$

Tedy:

$$\lim_{x \to \beta^-} F(x) - \lim_{x \to \alpha^+} F(x) = G(\beta) + d - (G(\alpha) + d) = G(\beta) - G(\alpha) = (R) \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Důkaz je tímto hotov. $\square$

6.2 Newtonův integrál

Definice 6.14. Řekneme, že funkce f má na intervalu (a, b) Newtonův integrál, jestliže má na (a, b) primitivní funkci F a $\lim_{x \to a^+} F(x)$ a $\lim_{x \to b^-} F(x)$ jsou vlastní. Hodnotou vlastního integrálu značíme:

$$(N) \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x \to b^-} F(x) - \lim_{x \to a^+} F(x).$$

Množinou funkcí mající Newtonův integrál značíme $N((a, b))$.

Poznámka. Uveďme následující poznámky:

1. Je-li f spojitá na $[a, b]$, pak existuje jak Riemannův, tak Newtonův integrál. Tyto integrály se rovnají.
2. Existuje $(N) \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 2$, ale $\frac{1}{\sqrt{x}} \notin \mathcal{R}([0, 1])$, neboť funkce $\frac{1}{\sqrt{x}}$ není omezená.
3. Existuje $(R) \int_{-1}^1 \operatorname{sgn}(x)\,\mathrm{d}x$, ale $\operatorname{sgn}(x) \notin \mathcal{N}(-1, 1)$, protože $\operatorname{sgn}(x)$ nemá primitivní funkci.

4. Pro oba integrály používáme značení $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F]_a^b = F(b^-) - F(a^+)$, pokud existuje primitivní funkce k f a limity mají smysl.

Věta 6.15 (Vlastnosti Newtonova integrálu)**.** Platí následující:

1. Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$ a $a < b$. Nechť $f, g \in \mathcal{N}(a,b)$ a $\alpha \in \mathbb{R}$. Pak $f + g \in \mathcal{N}(a,b)$ a $\alpha f \in \mathcal{N}(a,b)$ a platí:
$$(N)\int_a^b f(x) + g(x)\,\mathrm{d}x = (N)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + (N)\int g(x)\,\mathrm{d}x,$$
$$(N)\int_a^b \alpha f(x)\,\mathrm{d}x = \alpha(N)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

2. Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$ a $a < b$. Nechť $f, g \in \mathcal{N}(a,b)$ a $f \leq g$ na (a,b). Pak:
$$(N)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq (N)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

3. Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$ a $a < b$. Nechť $c \in (a,b)$. Pokud $f \in \mathcal{N}(a,b)$, pak $f \in \mathcal{N}(a,c) \cap f \in \mathcal{N}(c,b)$ a platí:
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Důkaz. Postupně dokážeme jednotlivé body:

1. Nechť F a G jsou primitivní k f a g. Pak dle linearity primitivní funkce je $F + G$ primitivní k $f + g$. Podle aritmetiky limit:
$$[F + G]_a^b = [F]_a^b + [G]_a^b.$$
Tedy:
$$\begin{aligned}(N)\int_a^b f(x) + g(x)\,\mathrm{d}x &= [F + G]_a^b = [F]_a^b + [G]_a^b \\ &= (N)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + (N)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$
Analogicky:
$$(N)\int_a^b \alpha f(x)\,\mathrm{d}x = [\alpha F]_a^b = \alpha[F]_a^b = \alpha(N)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

2. Nechť F a G jsou primitivní k f, respektive g na (a,b). Pak $(G(x) - F(x))' = g(x) - f(x) \geq 0\ \forall x \in (a,b)$. $G - F$ je tedy na (a,b) neklesající. Proto:
$$\int_a^b g(x) - f(x)\,\mathrm{d}x = [G - F]_a^b \geq 0.$$
Tím pádem z první vlastnosti máme:
$$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x) - f(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

3. Nechť F je primitivní k f na (a, b). Pak F je primitivní k f i na intervalech (a, c), (c, b). V bodě c má funkce f navíc vlastní jednostrané limity, protože je v tomto bodě spojitá. Tedy:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F]_a^b = [F]_a^c + [F]_c^b = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Věta je tímto dokázána. □

Věta 6.16 (Per partes pro určitý integrál)**.** Nechť $a, b \in \mathbb{R}$ a $a < b$. Nechť f' a g' jsou definované na $[a, b]$ a f a g jsou k nim primitivní. Potom:

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = [fg]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Důkaz. Označme F jako primtitivní funkci k fg'. Tedy:

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x,$$

kde jsme využili integrace per partes z předchozí kapitoly. Dále všechny integrály existují, neboť se jedná vždy o spojité funkce. Důkaz je tímto hotov. □

Poznámka. Per partes funguje i pro (a, b), kde $a, b \in \mathbb{R}^*$ a $a < b$. V tomto případě se jedná o Newtonův integrál a důkaz je stejný. Věta nahoře platí pro oba integrály současně.

Věta 6.17 (Substituce pro určitý integrál)**.** Uveďme oba druhy substitucí pro určitý integrál:

1. Nechť f spojitá na $[a, b]$ a $\varphi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ je funkce, která má na $[\alpha, \beta]$ spojitou první derivaci. Pak:

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\varphi(\alpha)=a}^{\varphi(\beta)=b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

2. Nechť f je spojitá na $[a, b]$ a $\varphi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ je na a má na $[\alpha, \beta]$ vlastní spojitou nenulovou derivaci. Pak:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [\Phi(\varphi^{-1}(t))]_a^b = [\Phi(t)]_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t,$$

   kde Φ je primitivní k $f \circ \varphi \cdot \varphi'$.

Poznámka. Funkce φ je zároveň prostá. Tím, že má nenulovou derivaci, je funkce všude kladná, nebo záporná. Dále nabývá mezihodnot, a tudíž musí být prostá. Věta opět funguje pro oba integrály. Pro rozšíření pro Newtonův integrál můžeme uvažovat $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$ a máme funkci f na (a, b) a φ na (α, β). Jinak jsou všechny předpoklady věty zachovány.

6.3 Konvergence Newtonova integrálu

Věta 6.18 (Srovnávací kritérium pro konvergenci integrálu)**.** Nechť $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^*$ a $a < b$. Nechť jsou funkce $f, g\colon [a, b) \to \mathbb{R}$ spojité na $[a, b)$ a nechť $0 \leq f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in [a, b)$. Pak pokud $g \in \mathcal{N}(a, b)$, tak i $f \in \mathcal{N}(a, b)$.

Důkaz. Zvolme $c \in [a, b)$ a označme G a F primitivní funkce k g a f. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $G(c) = F(c)$. Pokud se tak nestane, pouze odečteme konstantu. $G - F$ je tedy na $[c, b)$ neklesající, protože zde má nezápornou derivaci $g - f$. Navíc $G(c) = F(c)$, a tedy $G(x) \geq F(x)$ $\forall x \in [c, b)$. Dále F a G jsou neklesající, protože mají nezáporné derivace f a g. Jelikož $g \in \mathcal{N}(a, b)$, tak $\lim_{x\to b^-} G(x) \in \mathbb{R}$. Platí:

$$\lim_{x\to b^-} F(x) \leq \lim_{x\to b^-} G(x) \Rightarrow \lim_{x\to b^-} F(x) \in \mathbb{R}.$$

Tím pádem jistě platí, že $f \in \mathcal{N}(c, b)$. Jelikož je f na $[a, c]$ spojitá, tak je tam Newtonovsky integrovatelná. Platí tedy, že $f \in \mathcal{N}(a, b)$ a důkaz je hotov. □

Poznámka. Platí analogie věty pro $(a, b]$.

Věta 6.19 (Limitní srovnávací kritérium pro konvergenci integrálu)**.** Nechť $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^*$ a $a < b$. Nechť jsou funkce $f, g\colon [a, b) \to \mathbb{R}$ spojité a nezáporné na $[a, b)$. Pak:

1. Jestliže existuje $\lim_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} \in (0, \infty)$, pak $g \in \mathcal{N}(a, b)$ právě tehdy, když $f \in \mathcal{N}(a, b)$.
2. Jestliže existuje $\lim_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, pak pokud $g \in \mathcal{N}(a, b)$, tak i $f \in \mathcal{N}(a, b)$.
3. Jestliže existuje $\lim_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$, pak pokud $f \in \mathcal{N}(a, b)$, tak i $g \in \mathcal{N}(a, b)$.

Důkaz. Postupně dokážeme jednotlivá tvrzení:

1. Označme $A = \lim_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)}$. Z definice limity pro $\varepsilon = \frac{A}{2}$ existuje $\delta > 0$ tak, že $\forall x \in P_-(b, \delta)$ platí:
$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - A\right| < \varepsilon.$$
Neboli existuje takové x_0, že $\forall x \in [x_0, b)$ platí:
$$\frac{3}{2}A \geq \frac{f(x)}{g(x)} \geq \frac{A}{2} \Rightarrow \frac{3}{2}Ag(x) \geq f(x) \geq \frac{1}{2}Af(x).$$
Pokud $g \in \mathcal{N}(a, b)$, tak jistě i $\frac{3}{2}Ag \in \mathcal{N}(a, b)$, a tedy i $\frac{3}{2}Ag \in \mathcal{N}(x_0, b)$. Z toho máme, že $f \in \mathcal{N}(x_0, b)$. Dále je f spojitá na $[a, x_0]$, a tím pádem $f \in \mathcal{N}(a, x_0)$. Celkem pak $f \in \mathcal{N}(a, b)$. Analogicky pokud $f \in \mathcal{N}(a, b)$, tak snadno ukážeme, že i $g \in \mathcal{N}(a, b)$.
2. Nechť $\varepsilon > 0$. Pak existuje $\delta > 0$ tak, že $\forall x \in P_(b, \delta)$ platí:
$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - 0\right| < \varepsilon \Rightarrow f(x) \leq g(x).$$
Ze srovnávacího kritéria dostáváme, že $f \in \mathcal{N}(a, b)$.

3. Nechť $\varepsilon > 0$. Pak existuje $\delta > 0$ tak, že $\forall x \in P(a, \delta)$ platí:

$$\frac{f(x)}{g(x)} > 1 \Rightarrow f(x) > g(x).$$

Ze srovnávacího kritéria vidíme, že $g \in \mathcal{N}(a, b)$.

Tím je důkaz hotov. □

Poznámka. Opět platí analogie věty pro $(a, b]$.

Lemma (Odhad Newtonova integrálu součinu dvou funkcí)**.** Nechť $a, b \in \mathbb{R}$ a $a < b$. Nechť f je spojitá funkce na $[a, b]$ a $g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ je nerostoucí, nezáporná a spojitá. Pak:

$$g(a) \inf_{x\in[a,b]} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \le \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \le g(a) \sup_{x\in[a,b]} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Speciálně platí:

$$\left|\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\right| \le g(a) \sup_{x\in[a,b]} \left|\int_a^x f(x)\,\mathrm{d}t\right|.$$

Důkaz. Dokážeme druhou nerovnost. První by se dokázala analogicky. Nechť $\varepsilon > 0$. Likož f i fg jsou na $[a, b]$ spojité, jsou tam i stejnoměrně spojité. Jinými slovy platí:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x, y \in [a, b] : |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon \wedge |f(x)g(x) - f(y)g(y)| < \varepsilon,$$

kde jsme zvolili $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, kde jsme δ_1 zvolili pro f a δ_2 pro fg. Označme $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t,\ x \in [a, b]$. Pak $F(a) = 0$. Zvolme dělení $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ intervalu $[a, b]$ s normou menší než δ. Připomeňme, že $x_0 = a$ a $x_n = b$. Ze stejnoměrné spojitosti pak $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ a $\forall t \in [x_{i-1}, x_i]$ platí:

$$f(t) \ge f(x_{i-1}) - \varepsilon.$$

Integrací dostaneme:

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)\,\mathrm{d}t \ge f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) - \varepsilon(x_i - x_{i-1}).$$

Analogicky ze stejnoměrné spojitosti a z nerovnosti nahoře dostaneme:

$$\begin{aligned}
\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t &\le f(x_{i-1})g(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) + \varepsilon(x_i - x_{i-1}) \\
&\le g(x_{i-1}) \left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)\,\mathrm{d}t + \varepsilon(x_i - x_{i-1})\right) + \varepsilon(x_i - x_{i-1}) \\
&\le g(x_{i-1}) \left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)\,\mathrm{d}t\right) + g(a)\varepsilon(x_i - x_{i-1}) + \varepsilon(x_i - x_{i-1}).
\end{aligned}$$

Označme $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon(g(a)+1)(b-a)$. Nyní:

$$
\begin{aligned}
\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t &= \sum_{i=1}^n g(x_{i-1}) \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)\,\mathrm{d}t + \sum_{i=1}^n g(a)\varepsilon(x_i - x_{i-1}) + \varepsilon(x_i - x_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^n g(x_{i-1}) \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)\,\mathrm{d}t + \varepsilon(g(a)+1)(b-a) \\
&= \sum_{i=1}^n g(x_{i-1})(F(x_i) - F(x_{i-1})) + \tilde{\varepsilon} = \left| \begin{array}{c} \text{Abelova parciální sumace} \\ a_i = F(x_i) - F(x_{i-1}) \\ b_i = g(x_i - 1) \end{array} \right| \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} F(x_i)(g(x_{i-1}) - g(x_i)) + g(x_{n-1})F(x_n) + \tilde{\varepsilon} \\
&\leq \sup_{t \in [a,b]} F(t) \left(\sum_{i=1}^{n-1} g(x_{i-1}) - g(x_i) \right) + g(x_{n-1}) + \tilde{\varepsilon} \\
&= g(a) \sup_{t \in [a,b]} F(t) + \varepsilon(g(a)+1)(b-a).
\end{aligned}
$$

Tato nerovnost platí $\forall \varepsilon > 0$. Tím je důkaz hotov. □

Věta 6.20 (Abel-Dirichletovo kritérium konvergence integrálu)**.** Nechť $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^*$ a $a < b$. Nechť $f\colon [a,b) \to \mathbb{R}$ je spojitá a F je primitivní funkce k f na (a,b). Dále nechť $g\colon [a,b) \to \mathbb{R}$ je na $[a,b)$ monotónní a spojitá. Pak platí:

1. Je-li $f \in \mathcal{N}(a,b)$ a g je omezená, pak $fg \in \mathcal{N}(a,b)$.
2. Je-li F omezená na (a,b) a $\lim_{x \to b^-} g(x) = 0$, pak $fg \in \mathcal{N}(a,b)$.

Důkaz. Jelikož je fg spojitá na (a,b), tak má primitivní funkci H. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že g je nerostoucí. Pokud by nebyla, tak vezmeme $-g$ a konvergence integrálu se nezmění. Dokážeme jednotlivá tvrzení:

1. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že g je omezená. To znamená, že existuje $K > 0$ tak, že $\forall x \in [a,b)$ platí $|g(x)| \leq K$. Pokud omezená není, pak vezmeme funkci $g + K \geq 0$ a bude platit:

   $$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)(g(x)+K)\,\mathrm{d}x - K \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

   Z konvergence levé strany pak dostaneme konvergenci pravé strany. Jelikož je tedy $g \geq 0$ a omezená, existuje $c > 0$ tak, že $\forall x \in [a,b)$ platí $0 \leq g(x) \leq C$. Dále $f \in \mathcal{N}(a,b)$, takže $\lim_{x \to b^-} F(x) \in \mathbb{R}$. Nechť $\varepsilon > 0$. Z BC podmínky pro limitu funkce existuje $\delta > 0$ tak, že $\forall x, y \in P_-(b,\delta)$ platí:

   $$-\varepsilon < F(x) - F(y) < \varepsilon.$$

Nechť $x, y \in P_-(b, \delta)$. Podle předchozího lemmatu platí:

$$\begin{aligned} H(y) - H(x) &= \int_x^y f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \leq g(x) \sup_{z\in[x,y]} \int_x^z f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= g(x) \sup_{z\in[x,y]} (F(z) - F(x)) \leq g(x)\varepsilon \leq C\varepsilon \end{aligned}$$

Analogicky:

$$\begin{aligned} H(y) - H(x) &= \int_x^y f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \geq g(x) \inf_{y\in[x,y]} \int_x^z f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= g(x) \inf_{z\in[x,y]} (F(z) - F(x)) \geq -g(x)\varepsilon \geq -C\varepsilon. \end{aligned}$$

Tím pádem $\forall \varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že $\forall x, y \in P_-(b, \delta)$ platí:

$$|H(x) - H(y)| < C\varepsilon.$$

Podle BC podmínky pro limitu funkce existuje $\lim_{x\to b^-} H(x) \in \mathbb{R}$. Nechť $c \in (a, b)$. fg je spojitá na $[a, c]$, a tedy $fg \in \mathcal{N}(a, c)$. H je v c spojitá, a tedy existuje $\lim_{x\to c^-} H(x) \in \mathbb{R}$. Takže $fg \in \mathcal{N}(c, b)$. Nakonec $fg \in \mathcal{N}(a, b)$.

2. Víme, že g je nerostoucí a $\lim_{x\to b^-} g(x) = 0$. Z toho snadno plyne, že $g \geq 0$. Jelikož je F dle předpokladu omezená, tak existuje $K > 0$ takové, že $\forall x \in (a, b)$ platí $|F(x)| \leq K$. Nechť $\varepsilon > 0$. Z $\lim_{x\to b^-} g(x) = 0$ plyne, že existuje $\delta > 0$ tak, že $\forall x \in P_-(b, \delta)$ dostaneme $|g(x)| < \varepsilon$. Tedy $\forall x, y \in P_-(b, \delta)$, $x < y$ platí:

$$\begin{aligned} H(y) - H(x) = \int_x^y f(t)g(t)\,\mathrm{d}t &\leq g(x) \sup_{z\in[x,y]} \int_x^z f(t)\,\mathrm{d}t = g(x) \sup_{z\in[x,y]} (F(z) - F(x)) \\ &\leq \varepsilon \sup_{z\in[x,y]} F(z) - F(x) \leq 2K\varepsilon. \end{aligned}$$

Analogicky:

$$H(y) - H(x) = \int_x^y f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \geq g(x) \inf_{z\in[x,y]} (F(z) - F(x)) \geq -2K\varepsilon.$$

Dostáváme, že $\forall \varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že $\forall x, y \in P_-(b, \delta)$ platí:

$$|H(y) - H(x)| \leq 2K\varepsilon.$$

H tedy splňuje BC podmínku pro funkce. Tím pádem existuje $\lim_{x\to b^-} H(x)$, a tedy $fg \in \mathcal{N}(a, b)$.

Tímto jsme větu dokázali. □

Věta 6.21 (Věta o střední hodnotě integrálního počtu)**.** Nechť $a, b \in \mathbb{R}$ a $a < b$. Nechť f je spojitá funkce na $[a, b]$ a nechť g je nezáporná funkce na $[a, b]$. Dále nechť $g \in \mathcal{N}(a, b)$ a $fg \in \mathcal{N}(a, b)$. Potom existuje $c \in [a, b]$ tak, že platí:

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(c) \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Důkaz. Jelikož je f na $[a,b]$ spojitá, tak zde nabývá mezihodnot. Také je na $[a,b]$ omezená. Označme $m = \min_{x\in[a,b]} f(x)$ a $M = \max_{x\in[a,b]} f(x)$. Dále g je nezáporná. Tím pádem:

$$mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x).$$

Je-li $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = 0$, tak $g \equiv 0$. Tedy můžeme c volit libovolně a věta bude platit. Nechť $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x > 0$. Pak z nerovnosti nahoře integrací dostaneme:

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x} \leq M.$$

f nabývá mezihodnot, a proto existuje $c \in [a,b]$ tak, že platí:

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x}.$$

Tím je důkaz hotov. □

6.4 Aplikace určitého integrálu

Definice 6.22. Nechť $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ je nezáporná spojitá funkce. Obsahen plochy pod grafem funkce nazveme:

$$S(f,[a,b]) = (R)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (N)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Definice 6.23. Nechť $f\colon [a.b] \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce a nechť $D = \{x_j\}_{j=0}^n$ je dělení intervalu $[a,b]$. Označme $L(f,D) = \sum_{j=1}^n \sqrt{(x_j - x_{j-1})^2 + (f(x_j) - f(x_{j-1}))^2}$. Délkou křivky f nazveme:

$$L(f,[a,b]) = \sup\{L(f,D)\}.$$

Věta 6.24. Nechť f má na intervalu $[a,b]$ spojitou první derivaci. Pak délkou křivky rozumíme:

$$L(f,[a,b]) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x.$$

Důkaz. Označme $g(x) = \sqrt{1 + (f'(x))^2}$. Mějme dělení $D = \{x_j\}_{j=0}^n$. Pak podle Lagrangeovy věty o střední hodnotě pro $\xi_j \in (x_{j-1}, x_j)$ platí:

$$\begin{aligned} L(f,D) &= \sum_{j=1}^n \sqrt{(x_j - x_{j-1})^2 + (f(x_j) - f(x_{j-1}))^2} \\ &= \sum_{j=1}^n (x_j - x_{j-1})\sqrt{1 + \left(\frac{f(x_j) - f(x_{j-1})}{x_j - x_{j-1}}\right)^2} = \sum_{j=1}^n (x_j - x_{j-1})\sqrt{1 + (f'(\xi_j))^2}. \end{aligned}$$

Odtud snadno odvodíme:

$$s(g,D) \leq L(f,D) \leq S(g,D).$$

Tedy:

$$\sup_D s(g,D) = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \le \sup_D L(f,D) = L(f).$$

Dále postupujeme sporem. Nechť $L(f) > \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$. Pak najdeme dělení D tak, že $L(f,D) > \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$. Zvolme posloupnost dělení $\{D_n\}$ tak, že D_1 zjemňuje D, D_{n+1} zjemňuje D_n a $\lim_{n\to\infty} \nu(D_n) = 0$. Pak:

$$L(f,D) \le L(f,D_1) \le L(f,D_2) \le \cdots \le L(f,D_n).$$

My ale víme, že $L(f,D_n) \le S(g,D_n)$, a tedy platí:

$$\lim_{n\to\infty} S(g,D_n) = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \ge L(f,D).$$

Tím dostáváme spor a důkaz je hotov. □

Věta 6.25 (Délka křivky v $\mathbb{R}^n$)**.** Nechť $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ je spojitá a má spojitou první derivaci. Pak:

$$L(\varphi([a,b])) = \int_a^b \sqrt{(\varphi_1'(x))^2 + (\varphi_2'(x))^2 + \cdots + (\varphi_n'(x))^2}\,\mathrm{d}x.$$

Poznámka. Stejná křivka může mít různé paramterizace. Dálka křivky nezávisí na zvolené parametrizaci.

Věta 6.26 (Objem a povrch rotačního tělesa)**.** Nechť je $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ spojitá a nezáporná. Těleso označme:

$$T = \left\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 \colon x \in [a,b],\ \sqrt{y^2+z^2} \le f(x)\right\}.$$

Pak pro objem tělesa platí:

$$V(T) = \pi \int_a^b (f(x))^2\,\mathrm{d}x.$$

Je-li navíc f' spojitá na $[a,b]$, pak pro povrch tělesa platí:

$$P(T) = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1-(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x.$$

Věta 6.27 (Integrální kritérium konvergence řad)**.** Nechť f je nezáporná, nerostoucí a spojitá na $[n_0,\infty)$ pro nějaké $n_0 \in \mathbb{N}$. Nechť pro posloupnost $\{a_n\}$ platí $a_n = f(n)\ \forall n \ge n_0$. Pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje právě tehdy, když $(N)\int_{n_0}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje.

Důkaz. Nechť $n_1 \ge n_0$ a mějme dělení $D = \{n_0, n_0+1, \dots, n_1\}$ intervalu $[n_0,n_1]$. Funkce f je nerostoucí, a tedy platí:

$$S(f,D) = a_{n_0} + a_{n_0+1} + \cdots + a_{n_1-1} = \sum_{i=n_0}^{n_1-1} a_i,$$

$$s(f,D) = a_{n_0+1} + a_{n_0+2} + \cdots + a_{n_1} = \sum_{i=n_0+1}^{n_1} a_i.$$

Dále f je na $[n_0, n_1]$ spojitá, a tedy můžeme psát:

$$\sum_{i=n_0+1}^{n_1} a_i = s(f,D) \leq (R)\int_{n_0}^{n_1} f(x)\,\mathrm{d}x = (N)\int_{n_0}^{n_1} f(x)\,\mathrm{d}x = (R)\int_{n_0}^{n_1} f(x)\,\mathrm{d}x$$
$$\leq S(f,D) = \sum_{i=n_0}^{n_1-1} a_i.$$

Začneme důkazem levé implikace. Nechť $\int_{n_0}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje. Pak F je primitivní k f, kde:

$$F(x) = \int_{n_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t,\ t \in (n_0, \infty).$$

Tedy $\forall n_1 \geq n_0$ dostaneme:

$$\int_{n_0}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{x\to\infty} F(x) - F(n_0) = \lim_{x\to\infty} F(x) = \lim_{x\to\infty}\int_{n_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$
$$\geq \lim_{n\to\infty}\sum_{i=n_0+1}^{n} a_i = \sum_{i=n_0+1}^{\infty} a_i.$$

Z toho dostáváme, že $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ konverguje. Nyní přejdeme k pravé implikaci. Nechť $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ konverguje. Pak jistě i $\sum_{i=n_0}^{\infty} a_i$ konverguje. Opět dostáváme:

$$\sum_{i=n_0}^{\infty} a_i = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=n_0}^{n-1} \geq \lim_{n\to\infty}\int_{n_0}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty} F(n) = \lim_{x\to\infty} F(x).$$

Jelikož je f nerostoucí, tak F je neklesající a dle právě odvozeného má vlastní limitu. Z toho dostáváme, že $\int_{n_0}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje. $\square$

Věta (Wallisova formule)**.** Platí následující Wallisova formule[2]:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 = \frac{\pi}{2}.$$

Důkaz. Zřejmě platí:

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(x))^n\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)(\sin(x))^{n-1}\,\mathrm{d}x$$
$$= \left[-\cos(x)(\sin(x))^{n-1}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos(x))(n-1)(\sin(x))^{n-2}\cos(x)\,\mathrm{d}x$$
$$= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2(x))(\sin(x))^{n-2}\,\mathrm{d}x = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n.$$

Dostáváme:

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2},\ I_0 = \frac{\pi}{2},\ I_1 = 1.$$

[2] $n!!$ značí dvojitý faktoriál, který funguje jako běžný faktoriál, ale bere pouze sudé, popřípadě liché členy.

Zřejmě:

$$I_{2n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(x))^{2n+1}\,\mathrm{d}x \leq I_{2n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(x))^{2n} \leq I_{2n-1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(x))^{2n-1}.$$

Tedy:

$$\frac{2n}{2n+1}\frac{2n-2}{2n-1}\dots 1 \leq \frac{2n-1}{2n}\frac{2n-3}{2n-2}\dots\frac{\pi}{2} \leq \frac{2n-2}{2n-1}\frac{2n-4}{2n-3}\dots 1.$$

Tuto nerovnost můžeme přepsat:

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \leq \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\pi}{2} \leq \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}.$$

Tedy:

$$\frac{1}{2n+1}\left(\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\right)^2 \leq \frac{\pi}{2} \leq \frac{1}{2n}\left(\frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 \Rightarrow a_n \leq \frac{\pi}{2} \leq \frac{2n+1}{2n}a_n.$$

Dále $\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2n} = 1$, a tedy můžeme psát:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 = \frac{\pi}{2}.$$

Důkaz je tímto hotov. □

Věta (Stirlingova formule)**.** Platí následující Stirlingova formule:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n} = 1.$$

Důkaz. Zvolme posloupnost $\{b_n\}$, pro kterou platí:

$$b_n = \ln\left(\frac{n!}{n^n}\right) = \ln(n!) - \ln(n^n) = \sum_{k=1}^{n}\ln(k) - n\ln(n).$$

Použijeme Abelovu parciální sumaci a dostaneme:

$$\sum_{k=1}^{n}\ln(k) - n\ln(n) = \sum_{k=1}^{n-1}k(\ln(k)-\ln(k-1)) + n\ln(n) - n\ln(n) = \sum_{k=1}^{n-1}(k-1)\ln\left(1-\frac{1}{k}\right).$$

Člen $\ln(1-t)$ rozvineme Taylorovým polynomem, kde $t \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$ a $t = \frac{1}{k}$, $k \geq 2$. Použijeme Lagrangeův tvar zbytku pro $\xi(t) \in (0,t)$ a dostaneme:

$$\ln(1-t) = -t - \frac{t^2}{2} + \frac{1}{3!}\frac{-2t^3}{(1-\xi(t))^3}.$$

Tedy pro $t = \frac{1}{k}$, $k \geq 2$ máme:

$$\ln\left(1-\frac{1}{k}\right) = -\frac{1}{k} - \frac{1}{2k^2} - \frac{1}{3(1-\xi(\frac{1}{k}))^3}\frac{1}{k^3} = -\frac{1}{k} - \frac{1}{2k^2} - \frac{\theta_k}{k^3},$$

kde $0 \leq \theta_k \leq 3$. Dále dostáváme:

$$\begin{aligned} b_n &= \sum_{k=2}^{n} (k-1) \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) = \sum_{k=2}^{n} (k-1) \left(-\frac{1}{k} - \frac{1}{2k^2} - \frac{\theta_k}{k^3}\right) \\ &= \sum_{k=2}^{n} \left(-1 + \frac{1}{2k} + \frac{1}{k^2}\left(\frac{1}{2} + \frac{\theta_k - \theta_k k}{k}\right)\right) = -(n-2) + \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} + \sum_{k=2}^{n}\frac{\psi_k}{k^2}, \end{aligned}$$

kde $\psi_k = \frac{1}{2} + \frac{\theta_k - \theta_k k}{k}$ a $|\psi_k| \leq 4$. Uveďme následující pozorování:

$$\exists \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)\right) \in \mathbb{R}.$$

Dále víme, že $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{n} \frac{\psi_k}{k^2} \in \mathbb{R}$. Pak tedy platí:

$$\exists \lim_{n\to\infty} \left(b_n + n - \frac{1}{2}\ln(n)\right) \in \mathbb{R}.$$

Dále:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\ln\left(\frac{n!}{n^n}\right) + \ln(\mathrm{e}^n) - \ln(\sqrt{n})\right) = \lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{n!}{\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sqrt{n}}\right).$$

Z toho dostaneme:

$$\exists \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sqrt{n}} = a \in \mathbb{R}.$$

Použijeme Wallisovu formuli a dostaneme:

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1}\left(\frac{((2n)!!)^2}{(2n)!}\right)^2 \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1}\left(\frac{(2^n n!)^2}{(2n)!}\right)^2 \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n!}{\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sqrt{n}}\right)^4 \left(\frac{\left(\frac{2n}{\mathrm{e}}\right)^{2n}\sqrt{2n}}{(2n)!}\right)^2 \frac{1}{2n+1}\left(\frac{\left(2^n \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sqrt{n}\right)^2}{\left(\frac{2n}{\mathrm{e}}\right)^{2n}\sqrt{2n}}\right)^2 \\ &= a^2 \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(2n+1)2n} = \frac{a^2}{4} \Rightarrow a = \sqrt{2\pi}. \end{aligned}$$

Stirlingova formule tedy platí. $\square$

7 Obyčejné diferenciální rovnice

Následuje velmi stručný úvod do funkcí více proměnných a do základních vět o diferenciálních rovnicích. Spoustu pojmů nebudeme definovat, k jejich pochopení nám postačí intuice.

7.1 Řešení, existence a jednoznačnost

Definice 7.1. Nechť $\Phi\colon \Omega \subset \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}$. Obyčejnou diferenciální rovnicí (dále také ODR) n-tého řádu nazveme:

$$\Phi(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0.$$

Definice 7.2. Řešení ODR na intervalu $I \subset \mathbb{R}$ je funkce y splňující:

1. existuje $y^{(k)}(x)$ vlastní pro $k = 1, \dots, n$ v I a $\forall x \in I$.
2. $\Phi(x, y(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$ platí $\forall x \in I$.

Řešení je dvojice (y, I).

Definice 7.3. Řekneme, že $(\tilde{y}, \tilde{I})$ je rozšíření (y, I), pokud:

1. $\tilde{y}$ je řešení $\Phi(x, y(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$ na $\tilde{I}$.
2. $I \subseteq \tilde{I}$.
3. $y = \tilde{y}$ na I.

Řekneme, že (y, I) je maximalní řešení, pokud pro něj neexistuje rozšíření.

Definice 7.4. Řekneme, že $I \subset \mathbb{R}^n$ je otevřený interval, pokud existují otevřené intervaly $I_1, I_2, \dots, I_n$ tak, že $I = I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n$.

Definice 7.5. Nechť $c \in \mathbb{R}^n$ a $r > 0$. Definujeme (otevřenou) kouli jako:

$$B(c, r) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \colon \|x - c\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} (x_i - c_i)^2} < r \right\}.$$

Definice 7.6. Nechť $I \subset \mathbb{R}^n$ je otevřený interval a $f\colon I \to \mathbb{R}$ je funkce. Řekneme, že f je spojitá v bodě $x_0 \in I$, pokud platí:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in B(x_0, \delta) \cap I \colon |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Řekneme, že f je spojitá na I, pokud je spojitá ve všech bodech I.

Poznámka. Pokud jsou funkce $f_1, f_2 \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ spojité, pak i funkce fg a $f + g$ jsou spojité.

Věta 7.7 (Peanova věta s $y^{(n)}$ - *důkaz později*)**.** Nechť $I \subset \mathbb{R}^{n+1}$ je otevřený interval, $f\colon I \to \mathbb{R}$ je spojitá a $[x_0, y_0, \ldots, y_{n-1}] \in I$. Pak existuje $\delta > 0$, $B(x_0, \delta)$ a funkce y definovaná na $B(x_0, \delta)$ tak, že $\forall x \in B(x_0, \delta)$ splňuje následující ODR:

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x))$$

s počáteční podmínkou:

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}.$$

Poznámka. Uveďme několik důležitých poznámek k této větě:

- δ může být velice malé, a tedy je možné, že dostaneme řešení na velmi malém intervalu.
- Tato věta neudává jednoznačnost řešení.
- Každé řešení lze rozšířit do maximálního řešení.

Definice 7.8. Nechť $I \subset \mathbb{R}^2$ je otevřený interval. Řekneme, že funkce $f\colon I \to \mathbb{R}$ je lokálně lipschitzovská vůči y, pokud $\forall U \subset I$ omezené existuje $K \in \mathbb{R}$ tak, že $\forall [x, y] \in U$ a $\forall [x, \tilde{y}] \in U$ platí:

$$|f(x, y) - f(x, \tilde{y})| \leq K(y - \tilde{y}).$$

Věta 7.9 (Picardova věta - *důkaz později*)**.** Nechť $I \subset \mathbb{R}^2$ je otevřený interval a $[x_0, y_0] \in I$. Nechť $f\colon I \to \mathbb{R}$ je spojitá a lokálně lipschitzovská vůči y. Pak existuje $B(x_0, \delta)$ a funkce y definovaná na $B(x_0, \delta)$ tak, že $\forall x \in B(x_0, \delta)$ máme $y'(x) = f(x, y(x))$ s počáteční podmínkou $y(x_0) = y_0$. Navíc y je jediné řešení na $B(x_0, \delta)$.

7.2 Rovnice prvního řádu

V této kapitole se budeme zabývat rovnicemi typu $y' = f(x, y)$. Rozlišujeme základní typy rovnic:

$$\begin{aligned}
&y' = f(x) && \\
&y' = g(y)h(x) && \text{(Rovnice se separovanými proměnnými)}\\
&y' = h\left(\frac{y}{x}\right) && \text{(Homogenní rovnice)}\\
&y' = a(x)y + b(x) && \text{(Lineární rovnice prvního řádu)}\\
&y' = a(x)y + b(x)y^{\alpha}. && \text{(Bernoulliho rovnice)}
\end{aligned}$$

Všimneme si, že první rovnici lze vyřešit přímou integrací. Homogenní rovnici lze pomocí substituce $z(x) = \frac{y(x)}{x}$ převést na rovnici se separovannými proměnnými. Bernoulliho rovnici pomocí substituce $z(x) = (y(x))^{1-\alpha}$ můžeme převést na rovnici lineární. To znamená, že se budeme zabývat především rovnicemi se separovanými proměnnými a rovnicemi lineárními.

Věta 7.10 (O existenci řešení rovnice se separovannými proměnnými)**.** Nechť $h\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ je spojitá. Nechť $g\colon (c,d) \to \mathbb{R}$ je spojitá a nenulová. Potom každým bodem $[x_0, y_0] \in (a,b) \times (c,d)$ prochází právě jedno řešení $y' = g(y)h(x)$ s počáteční podmínkou $y(x_0) = y_0$.

Důkaz. Dokážeme nejprve existenci řešení a potom jeho jednoznačnost. Jelikož je g spojitá a nenulová, tak nemění znaménko. Můžeme definovat:

$$H(x) = \int_{x_0}^{x} h(t)\,\mathrm{d}t,\ \ G(y) = \int_{y_0}^{y} \frac{1}{g(s)}\,\mathrm{d}s.$$

Jelikož g nemění znaménko, tak je G monotónní a existuje G^{-1}. Chceme ukázat, že $y(x) = G^{-1}(H(x))$ je řešení. h a g jsou spojité, a tedy i H', G' a $(G^{-1})'$ jsou spojité. Podle derivace složené funkce a derivace inverzní funkce platí:

$$y'(x) = (G^{-1}(H(x)))' = \frac{1}{G'(G^{-1}(H(x)))} h(x) = \frac{1}{\frac{1}{g(y(x))}} h(x) = g(y(x))h(x).$$

Ověříme, že splňuje počáteční podmínku, přičemž zřejmě $H(x_0) = 0$, $G(y_0) = 0$:

$$y(x_0) = G^{-1}(H(x_0)) = G^{-1}(0) = y_0.$$

Tím jsme dokázali existenci. Zbývá jednoznačnost, kterou dokážeme sporem. Nechť máme funkce y a a, které splňují:

$$y'(x) = g(y(x))h(x),\ \ a'(x) = g(a(x))h(x),$$

kde $y(x_0) = y_0 = a(x_0)$. Jelikož g je nenulová, tak můžeme psát:

$$\frac{y'(x)}{g(y(x))} = h(x) = \frac{a'(x)}{g(a(x))}.$$

Zintegrujeme a dostaneme:

$$G(y(x)) - G(y(x_0)) = \int_{x_0}^{x} \frac{y'(x)}{g(y(x))}\,\mathrm{d}x = \int_{x_0}^{x} \frac{a'(x)}{g(a(x))}\,\mathrm{d}x = G(a(x)) - G(a(x_0)),$$

kde $G(y(x_0)) = G(a(x_0)) = y_0$. Tím pádem platí, že $G(y(x)) = G(a(x))$, a jelikož G je monotónní, tak $y(x) = a(x)$ a důkaz je hotov. □

Uveďme ještě postup při řešení rovnice se separovannými proměnnými:

1. Určíme maximální inetrvaly I v $\mathcal{D}_h$, tedy kde všude je h definovaná.

2. Najdeme body, kde $g(d) = 0$. Pak $y(x) \equiv d$ je řešení. Určíme maximalní intervaly J, kde g je nenulová a touto funkcí rovnici podělíme.

3. Pro $x \in I$ hledáme řešení s hodnotami v J rovnice:

   $$\frac{y'(x)}{g(y(x))} = h(x) \Rightarrow G(y(x)) = H(x) + c,$$

   kde H je primitivní k h a G je primitivní k $\frac{1}{g}$.

4. Zafixujeme c a hledáme řešení $y(x) = G^{-1}(H(x) + c)$. Toto řešení je na $\{x \in I\colon H(x) + c \in G(J)\}$.

5. Řešení ve čtvrtém bodě slepíme s konstantním řešení v druhém bodě a dostaneme všechna maximální řešení.

Věta 7.11 (O řešení lineární diferenciální rovnice prvního řádu)**.** Nechť $(c, d) \subset \mathbb{R}$ je interval, $x_0 \in (c, d)$ a $a, b\colon (c, d) \to \mathbb{R}$ jsou spojité funkce. Maximální řešení rovnice $y' = a(x)y + b(x)$ s počáteční podmínkou $y(x_0) = y_0$ má $\forall x \in (c, d)$ tvar:

$$y(x) = \left(\int_{x_0}^{x} b(t)\mathrm{e}^{-A(t)}\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{e}^{A(x)} + y_0\mathrm{e}^{A(x)},$$

kde A je primitivní k a a $A(x_0) = 0$.

Důkaz. Dosazením se přesvědčíme, že $y(x_0) = y_0$. Nejprve dokážeme existenci. Zřejmě:

$$\left(\int_{x_0}^{x} b(t)\mathrm{e}^{-A(t)}\,\mathrm{d}t\right)' = b(x)\mathrm{e}^{-A(x)}.$$

Tedy:

$$y'(x) = b(x) + \left(\int_{x_0}^{x} b(t)\mathrm{e}^{-A(t)}\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{e}^{A(x)}a(x) + y_0\mathrm{e}^{A(x)}a(x)$$

Nyní:

$$a(x)y(x) + b(x) = a(x)\left(\int_{x_0}^{x} b(t)\mathrm{e}^{-A(t)}\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{e}^{A(x)} + y_0\mathrm{e}^{a(x)}a(x) + b(x) = y'(x).$$

$y(x)$ tedy skutečně řeší naši rovnici $\forall x \in (c, d)$ s počáteční podmínkou $y(x_0) = y_0$. Zbývá dokázat jednoznačnost. Dokážeme ji opět sporem. Nechť y a z jsou funkce splňující:

$$y'(x) = a(x)y(x) + b(x),\ z'(x) = a(x)z(x) + b(x),$$

kde $y(x_0) = z(x_0) = y_0$. Zvolme novou funkci u tak, že $u = y - z$. Pak:

$$u'(x) = a(x)u(x),\ u(x_0) = 0.$$

$u \equiv 0$ řeší tuto rovnici. Dále:

$$\frac{u'(x)}{u(x)} = A(x) \Rightarrow \ln|u(x)| = A(x) + c \Rightarrow u(x) = \mathrm{e}^{A(x)+c},\ c \in \mathbb{R}.$$

Nyní řešení zapíšeme tak, že bude fungovat i pro $u \equiv 0$. Máme:

$$u(x) = \tilde{c}\mathrm{e}^{A(x)},\ \tilde{c} \in \mathbb{R}.$$

Z $u(x_0) = 0$ snadno dostaneme, že $\tilde{c} = 0$, a tedy $u \equiv 0 \equiv y - z$. Z toho plyne, že y a z jsou stejné funkce a řešení je tedy jednoznačné. Tím je věta dokázána. $\square$

7.3 Systémy lineárních ODR a lineární rovnice n-tého řádu

Definice 7.12. Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval a mějme funkce $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, b\colon I \to \mathbb{R}$. Lineární ODR řádu n nazveme rovnici:

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x),\ x \in I.$$

Jestliže $b \equiv 0$ na I, pak se rovnice nazývá homogenní.

Definice 7.13. Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval a mějme funkce $b, y\colon I \to \mathbb{R}^n$. Nechť $A\colon I \to \mathbb{R}^{n^2}$ je maticová funkce, kde $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ pro $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Systémem ODR prvního řádu nazveme systém rovnic:

$$\begin{aligned}
y_1' &= a_{11}(x)y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}(x)y_n + b_1(x),\\
y_2' &= a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \cdots + a_{2n}(x)y_n + b_2(x),\\
&\vdots\\
y_n' &= a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \cdots + a_{nn}(x)y_n + b_n(x).
\end{aligned}$$

Maticovým zápisem rozumíme $y' = Ay + b$. Jestliže $b \equiv 0$, pak se soustava rovnic nazývá homogenní.

Poznámka. Řešení jedné diferenciální rovnice řádu n lze převést na řešení systému n rovnic prvního řádu. Tento postup zde uvedeme a věty o systémech rovnic tak můžeme aplikovat i na rovnici jednu. Nechť y řeší následující rovnici

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)$$

s počáteční podmínkou $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$. Pak funkce $u_1 = y, u_2 = y', \dots, u_n = y^{(n-1)}$ řeší soustavu:

$$\begin{aligned}
u_1' &= u_2,\\
u_2' &= u_3,\\
&\vdots\\
u_n' &= b(x) - a_{n-1}(x)u_n - \ldots - a_0(x)u_1,
\end{aligned}$$

která má počáteční podmínku $u_1(x_0) = y_0, u_2(x_0) = y_1, \dots, u_n(x_0) = y_{n-1}$. Nyní si tedy vyslovíme věty pro soustavy rovnic prvního řádu, které mají okamžité analogické důsledky pro jednu rovnici řádu n.

Věta 7.14 (O existenci řešení systému ODR prvního řádu - *důkaz později*)**.** Nechť $I \subset \mathbb{R}$ a mějme spojité funkce $b_j, a_{ij}\colon I \to \mathbb{R}$ pro $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Nechť $x_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{R}^n$ a $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ je spojitá maticová funkce. Pak existuje právě jedno řešení rovnice $y' = Ay + b$ s počáteční podmínkou $y(x_0) = y_0$ definované na celém I.

Věta 7.15 (Prostor řešení ODR prvního řádu)**.** Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval a mějme spojité funkce $b_j, a_{ij}\colon I \to \mathbb{R}$ pro $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Nechť $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ je spojitá maticová funkce. Označme:

$$L(y) = y' - Ay,\ H = \operatorname{Ker} L = \{y \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n)\colon L(y) = 0 \text{ na } I\},$$

kde $\mathcal{C}^1$ je prostor jednou spojitě diferencovatelných funkcí. Pak H je vektorový prostor dimenze n. Označme M množinu všech řešení nehomogenního systému rovnic $Ly = y' - Ay = b$ a nechť y_0 je jedno pevné řešení $L(y_0) = b$. Pak:

$$M = y_0 + \operatorname{Ker} L.$$

Důkaz. Nechť $x_0 \in I$. Podle předchozí věty existuje řešení $y_1, \dots, y_n$ rovnice $y' = Ay$ takové, že:

$$\begin{aligned} y_1(x_0) &= [1, 0, \dots, 0] = \mathbf{e}_1, \\ y_2(x_0) &= [0, 1, \dots, 0] = \mathbf{e}_2, \\ &\vdots \\ y_n(x_0) &= [0, 0, \dots, 1] = \mathbf{e}_n. \end{aligned}$$

Dokážeme, že $y_1, \dots, y_n$ tvoří bázi H. Nejprve dokážeme lineární nezávislost. Nechť existuje $C_1, \dots, C_n \in \mathbb{R}$ tak, že v $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$ platí:

$$C_1 y_1(x) + \dots + C_n y_n(x) = 0.$$

Speciálně pro $x = x_0$ dostaneme:

$$C_1 \mathbf{e}_1 + \dots + C_n \mathbf{e}_n = 0.$$

Tedy jsme dokázali lineární nezávislost, protože $C_1 = \dots = C_n = 0$. Zbývá dokázat, že každé řešení lze zapsat jako lineární kombinace $y_1, \dots, y_n$. Dále nechť $y \in M$. Nechť $y(x_0) = [\alpha_1, \dots, \alpha_n]$. Z toho:

$$y(x_0) = \alpha_1 y_1(x_0) + \dots + \alpha_n y_n(x_0).$$

Podle předchozí věty existuje právě jedno řešení $y' = Ay$ s počáteční podmínkou $y(x_0) = [\alpha_1, \dots, \alpha_n]$. Ale také

$$y(x_0) = \alpha_1 y_1(x_0) + \dots + \alpha_n y_n(x_0)$$

řeší $y' = Ay$ s počáteční podmínkou $y(x_0) = \alpha$. Z jednoznačnosti řešení plyne, že řešení je tvaru:

$$y(x) = \alpha_1 y_1(x) + \dots + \alpha_n y_n(x).$$

Což je lineární kombinace $y_1, \dots, y_n$, a tedy $y_1, \dots, y_n$ tvoří bázi H. Ještě musíme dokázat, že $M = y_0 + \operatorname{Ker} L$. Začneme inkluzí $y_0 + \operatorname{Ker} L \subset M$. Nechť $y \in H$. Pak:

$$(y_0 + y)' = Ay_0 + b + Ay = A(y_0 + y) + b \Rightarrow y_0 + y \in M.$$

Zbývá opačná inkluze. Nechť $y_1 \in M$. y_1 řeší $y_1' = Ay_1 + b$. Označme $y = y_1 - y_0$. Pak platí:

$$y' = y_1' - y_0' = Ay_1 + b - (Ay_0 + b) = A(y_1 - y_0) = Ay \Rightarrow y \in H.$$

Tím je důkaz hotov. □

Definice 7.16. Libovolnou bázi $\{y_1, \dots, y_n\}$ prostoru $H = \operatorname{Ker}(y' - Ay)$ nazýváme fundamentálním systémem řešení (dále také FSŘ) homogenní rovnice $y' = Ay$.

7.4 Rovnice n-tého řádu s konstantními koeficienty

Definice 7.17. Nechť $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$. Pak

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

nazveme charakteristickým polynomem rovnice:

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0 = 0.$$

Věta 7.18 (FSŘ pro rovnici n-tého řádu s konstantními koeficienty)**.** Nechť $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ a nechť $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ jsou kořeny charakteristického polynomu s násobností $s_1, \dots, s_k$, kde $s_1 + \dots + s_k = n$. Pak následující funkce

$$\mathrm{e}^{\lambda_1 x}, x\mathrm{e}^{\lambda_1 x}, \dots, x^{s_1-1}\mathrm{e}^{\lambda_1 x}, \dots, \mathrm{e}^{\lambda_k x}, \dots, x^{s_k-1}\mathrm{e}^{\lambda_k x}$$

tvoří fundamentální systém řešení na $\mathbb{R}$ rovnice

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{n-1} + \dots + a_1y' + a_0y = 0.$$

Důkaz. Tento důkaz rozdělíme do čtyř kroků:

1. Dokážeme, že $\mathrm{e}^{\lambda x}$ je řešením rovnice. Označme $L(y) = y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y$. Nechť Q je charakteristický polynom této rovnice. Jistě platí:

$$L(\mathrm{e}^{\lambda x}) = \lambda^n\mathrm{e}^{\lambda x} + \dots + a_1\lambda\mathrm{e}^{\lambda x} + a_0\mathrm{e}^{\lambda x} = \mathrm{e}^{\lambda x}Q(\lambda) = 0,$$

   neboť $Q(\lambda) = 0$, protože λ je kořen charakteristického polynomu. $\mathrm{e}^{\lambda x}$ je tedy skutečně řešení.

2. Nechť $\lambda = 0$ je s-násobný kořen charakteristického polynomu Q. Chceme ukázat, že $1, x, \dots, x^{s-1}$ patří do FSŘ. Platí:

$$Q(\lambda) = \lambda^s P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_s\lambda^s.$$

   Jelikož derivace $1, \dots, x^{s-1}$ řádu s a vyšší jsou 0, tak jsou tyto funkce řešením rovnice.

3. Nechť λ_0 je s-násobný kořen charakteristického polynomu Q. Chceme dokázat, že $\mathrm{e}^{\lambda_0 x}, x\mathrm{e}^{\lambda_0 x}, \dots, x^{s-1}\mathrm{e}^{\lambda_0 x}$ patří do FSŘ. Budeme hledat řešení ve tvaru $y(x) = c(x)\mathrm{e}^{\lambda_0 x}$. Pak jistě:

$$\begin{aligned} y'(x) &= c'(x)\mathrm{e}^{\lambda_0 x} + c(x)\lambda_0\mathrm{e}^{\lambda_0 x} \\ y''(x) &= c''(x)\mathrm{e}^{\lambda_0 x} + c'(x)\lambda_0\mathrm{e}^{\lambda_0 x} + c'(x)\lambda_0\mathrm{e}^{\lambda_0 x} + c(x)\lambda_0^2\mathrm{e}^{\lambda_0 x}. \end{aligned}$$

   Obecně platí:

$$L(y) = L(c\mathrm{e}^{\lambda_0 x}) = \mathrm{e}^{\lambda_0 x}M(c),$$

   kde M je lineární diferenciální operátor řádu n s konstantními koeficienty. M je následujícího tvaru:

$$M(c) = b_nc^{(n)} + b_{n-1}c^{(n-1)} + \dots + b_1c' + b_0c,$$

kde $b_j \in \mathbb{R}$ a $j \in \{1, \dots, n\}$. Označme Q_1 charakteristický polynom M. Z prvního kroku víme, že $L(\mathrm{e}^{\lambda x}) = \mathrm{e}^{\lambda x} Q(\lambda)$ a analogicky dle toho platí $M(\mathrm{e}^{\lambda x}) = \mathrm{e}^{\lambda x} Q_1(\lambda)$. Toto upravíme následovně:

$$Q_1(\lambda) = \frac{M(\mathrm{e}^{\lambda x})}{\mathrm{e}^{\lambda x}} = \frac{L(\mathrm{e}^{\lambda x}\mathrm{e}^{\lambda_0 x})}{\mathrm{e}^{\lambda x}\mathrm{e}^{\lambda_0 x}} = \frac{L(\mathrm{e}^{(\lambda+\lambda_0)x})}{\mathrm{e}^{(\lambda+\lambda_0)x}} = Q(\lambda + \lambda_0).$$

Víme, že λ_0 je s-násobný kořen Q. Z toho pak snadno nahlédneme, že Q_1 má 0 jako s-násobný kořen. Podle druhého kroku pak $1, x, \dots, x^{s-1}$ patří do FSŘ $M(c) = 0$. Z $y = c\mathrm{e}^{\lambda_0 x}$ plyne, že funkce

$$\mathrm{e}^{\lambda_0 x}, x\mathrm{e}^{\lambda_0 x}, \dots, x^{s-1}\mathrm{e}^{\lambda_0 x}$$

patří do FSŘ $L(y) = 0$.

4. Dokážeme nakonec, že funkce $\mathrm{e}^{\lambda_j x}, \dots, x^{s-1}\mathrm{e}^{\lambda_j x}$, $j \in \{1, \dots, k\}$ jsou lineárně nezávislé. Důkaz provedeme sporem. Nechť existují polynomy $P_1, \dots, P_k$, kde $\deg P \leq s_{j-1}$, tak, že platí:

$$\sum_{j=1}^{k} P_j(x)\mathrm{e}^{\lambda_j x} = 0 = P_1(x)\mathrm{e}^{\lambda_1(x)} + \dots + P_k(x)\mathrm{e}^{\lambda_k x}.$$

Navíc dále $P_j \not\equiv 0$. Rovnost vynásobíme $\mathrm{e}^{-\lambda_k x}$. Pak:

$$0 = P_1(x)\mathrm{e}^{(\lambda_1-\lambda_k)x} + P_2(x)\mathrm{e}^{(\lambda_2-\lambda_k)x} + \dots + P_k(x).$$

Tuto rovnost s_k-krát zderivujeme a dostaneme:

$$0 = R_1(x)\mathrm{e}^{(\lambda_1-\lambda_k)x} + \dots + R_{k-1}(x)\mathrm{e}^{(\lambda_{k-1}-\lambda_k)x},$$

kde $\deg R_i = \deg P_i$. Tuto rovnost bychom opět vynásobili $\mathrm{e}^{-(\lambda_{k-1}-\lambda_k)x}$ a s_{k-1}-krát ji zderivovali. Tento analogický postup provedeme $(k-1)$-krát. Zbyde:

$$S(x)\mathrm{e}^{\tilde{\lambda}x} = 0,$$

kde $\deg S = \deg P_1$. Z této rovnosti dostáváme, že $S \equiv 0$. Dostáváme spor s $P_1 \not\equiv 0$. Posloupnost funkcí je tedy lineárně nezávislá.

Tím jsme dokázali vše nutné, aby věta platila. □

Věta 7.19 (O speciální pravé straně pro rovnici n-tého řádu)**.** Nechť $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$. Nechť $P_m(x)$ je polynom m-tého řádu a $(\alpha + i\beta)$ je k-nádobný kořen charakteristického polynomu. Pak rovnice

$$y^{(n)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = P_m(x)\mathrm{e}^{\alpha x}\cos(\beta x),$$

popřípadě také rovnice

$$y^{(n)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = P_m(x)\mathrm{e}^{\alpha x}\sin(\beta x),$$

má na $\mathbb{R}$ řešení ve tvaru:

$$y(x) = x^k Q_m(x)\mathrm{e}^{\alpha x}\cos(\beta x) + x^k R_m(x)\mathrm{e}^{\alpha x}\sin(\beta x),$$

kde Q_m a R_m jsou polynomy stupně m.

Poznámka. Není-li pravá strana ve tvaru kvazipolynomu, pak lze řešení nehomogenní rovnice najít metodou variace konstant ve tvaru:

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i(x) y_i(x),$$

kde $\{y_1, \dots, y_n\}$ tvoří FSŘ rovnice

$$y^{(n)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0.$$

7.5 Systémy rovnic s konstantními koeficienty

Věta 7.20 (FSŘ pro soustavu rovnic s konstantními koeficienty)**.** Nechť má matice A řádu n všechna vlastní čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ po dvou navzájem různá a nechť $v_1, \dots, v_n$ jsou příslušné vlastní vektory. Pak vektorové funkce $v_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 x}, \dots, v_n \mathrm{e}^{\lambda_n x}$ tvoří fundamentální systém řešení rovnice $y' = Ay$ na $\mathbb{R}$.

Důkaz. Nechť $y(x) = v_j \mathrm{e}^{\lambda_j x}$, kde $j \in \{1, \dots, n\}$. Pak $y'(x) = v_j \lambda_j \mathrm{e}^{\lambda_j x}$. Dále:

$$y'(x) = v_j \lambda_j \mathrm{e}^{\lambda_j x} = A v_j \mathrm{e}^{\lambda_j x} = Ay(x),$$

protože $Av_j = \lambda_j v_j$, protože λ_j je vlastní číslo a v_j vlastní vektor. Máme tedy n řešení a chceme dokázat, že tyto řešení jsou lineárně nezávislá. Nechť pro spor existuje $C_i \in \mathbb{R}$, kde $i \in \{1, \dots, n\}$, tak, že $\forall x \in \mathbb{R}$ platí:

$$C_1 v_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 x} + C_2 v_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 x} + \dots + C_n v_n \mathrm{e}^{\lambda_n x} = 0.$$

Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $C_1 \neq 0$. Rovnost výše vynásobíme $\mathrm{e}^{-\lambda_n x}$ a zderivujeme:

$$C_1(\lambda_1 - \lambda_n) v_1 \mathrm{e}^{(\lambda_1 - \lambda_n)x} + \dots + C_{n-1}(\lambda_1 - \lambda_n) v_{n-1} \mathrm{e}^{(\lambda_{n-1} - \lambda_n)x} = 0.$$

Obdobný postup zopakujeme $(n-1)$-krát a dostaneme:

$$C_1 \tilde{\lambda} v_1 \mathrm{e}^{\tilde{\lambda} x} = 0 \Rightarrow C_1 = 0.$$

Z toho dostáváme spor a můžeme tedy říct, že posloupnost je lineárně nezávislá. Je tedy báze a tvoří FSŘ. □

Poznámka. Nemá-li matice A všechna vlastní čísla různá, pak lze FSŘ také algoritmicky sestrojit. Uvedeme zde bez důkazu obecný postup. Nechť λ je k-násobné vlastní číslo.

1. Pokud existuje k lineárně nezávislých vlastních vektorů $v_1, \dots, v_k$, tak do FSŘ dáme funkce:
$$v_1 \mathrm{e}^{\lambda x}, v_2 \mathrm{e}^{\lambda x}, \dots, v_k \mathrm{e}^{\lambda x}.$$

2. Pokud existuje pouze jeden vlastní vektor v_1, nalezeme Jordanův řetízek vektorů $v_2, \ldots, v_k$, aby platilo:

   $$(A - \lambda I)v_1 = 0, (A - \lambda I)v_2 = v_1, \ldots, (A - \lambda I)v_k = v_{k-1}.$$

   Do FSŘ pak dáme funkce:

   $$v_1 \mathrm{e}^{\lambda x}, v_1 x \mathrm{e}^{\lambda x} + v_2 \mathrm{e}^{\lambda x}, v_1 \frac{x^2}{2} \mathrm{e}^{\lambda x} + v_2 x \mathrm{e}^{\lambda x} + v_3 \mathrm{e}^{\lambda x}, \ldots, \frac{x^k}{k!} v_1 \mathrm{e}^{\lambda x} + \cdots + v_k \mathrm{e}^{\lambda x}.$$

3. Pokud existuje více vlastních vektorů, ale není jich k, pak musíme najít Jordanovy řetízky různých délek tak, abychom nakonec měli bázi složenou z Jordanových řetízků.

Definice 7.21. Nechť $y^1, y^2, \ldots, y^n$ tvoří FSŘ rovnice $y' = Ay$. Pak matici

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} y_1^1(x) & \ldots & y_1^n(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_n^1(x) & \ldots & y_n^n(x) \end{pmatrix}$$

nazýváme fundamentální maticí soustavy $y' = Ay$ a platí $\varphi'(x) = A\varphi(x)$.

Lemma. Nechť φ je fundamentální matice soustavy $y' = Ay$ na intervalu I. Pak $\varphi(x)$ je regulární $\forall x \in I$.

Důkaz. Dokážeme sporem. Nechť existuje $x_0 \in I$ a $C_i \in \mathbb{R}$ tak, že:

$$C_1 y^1(x_0) + \cdots + C_n y^n(x_0) = 0.$$

Podle věty o existenci řešení soustavy ODR prvního řádu existuje právě jedno řešení splňující $y(x_0) = 0$. Toto řešení je $y \equiv 0$. Ale také funkce

$$y(x) = C_1 y^1(x_0) + \cdots + C_n y^n(x_0)$$

je řešení splňující $y(x_0) = 0$. Z jednoznačnosti dostáváme, že $C_1 = \cdots = C_n = 0$. Funkce jsou tedy lineárně nezávislé, a tedy je matice φ regulární. □

Stejně tak je regulární i matice φ^{-1}. Z Cramerova pravidla totiž máme:

$$a_{ij} = \frac{(-1)^{i+j} \det(\varphi(x)_{ij})}{\det(\varphi(x))},$$

kde a_{ij} je prvek matice φ^{-1} na i-tém řádku a j-tém sloupci a φ_{ij} je matice, která vznikne z φ vynecháním i-tého řádku a j-tého sloupce. Jelikož je $\forall x \in I$ matice $\varphi(x)$ spojitá, je spojitá i $\varphi(x)_{ij}$. Podílem spojitých funkcí opět vznikne spojitá funkce, a tedy i $\varphi^{-1}(x)$ je spojitá $\forall x \in I$.

Věta 7.22 (Tvar řešení pro soustavu ODR)**.** Nechť I je interval, $A\colon I \to \mathbb{R}^{n\times n}$ a $b\colon I \to \mathbb{R}^n$ jsou spojité funkce, $x_0 \in I$ a $y^0 \in \mathbb{R}^n$. Pak maximální řešení rovnice $y' = Ay + b$ s počáteční podmínkou $y(x_0) = y^0$ má tvar:

$$y(x) = \varphi(x)\varphi^{-1}(x_0)y^0 + \varphi(x)\int_{x_0}^{x} \varphi^{-1}(t)b(t)\,\mathrm{d}t,$$

kde φ je fundamentální matice soustavy.

Důkaz. Z lemmatu víme, že $\forall x \in I$ je $\varphi(x)$ spojitá. To samé pak platí pro její invers, jak jsme odvodili před větou, a tedy má integrál na pravé straně smysl. Označme:

$$y(x) = \varphi(x)\varphi^{-1}(x_0)y^0 + \varphi(x)\int_{x_0}^{x} \varphi^{-1}(t)b(t)\,\mathrm{d}t.$$

Podle věty o derivaci podle horní meze platí:

$$\begin{aligned} y'(x) &= \varphi'(x)\varphi^{-1}(x_0)y^0 + \varphi'(x)\int_{x_0}^{x} \varphi^{-1}(t)b(t)\,\mathrm{d}t + \varphi(x)\varphi^{-1}(x)b(x) \\ &= A\left(\varphi(x)\varphi^{-1}(x_0)y^0 + \varphi(x)\int_{x_0}^{x} \varphi^{-1}(t)b(t)\,\mathrm{d}t\right) + b(x) = Ay(x) + b(x), \end{aligned}$$

Dále snadno ověříme:

$$y(x_0) = \varphi(x_0)\varphi^{-1}(x_0)y^0 + \varphi(x_0)\int_{x_0}^{x_0} \varphi^{-1}(t)b(t)\,\mathrm{d}t = y^0.$$

Tím je důkaz dokončen. □

Důsledkem této věty je věta o speciální pravé straně pro rovnici n-tého řádu, kterou ale nebudeme dokazovat. Dalším důsledkem je i následující věta, kterou opět ponecháme bez důkazu.

Věta 7.23 (O speciální pravé straně pro soustavu n-tého řádu)**.** Nechť $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je matice a p, q jsou vektory polynomů tvaru $n \times 1$. Pak soustava

$$y' = Ay + p(x)\mathrm{e}^{ax}\cos(bx) + q(x)\mathrm{e}^{ax}\sin(bx)$$

má na $\mathbb{R}$ řešení tvaru:

$$y(x) = \tilde{p}(x)\mathrm{e}^{ax}\cos(bx) + \tilde{q}(x)\mathrm{e}^{ax}\sin(bx),$$

kde $\tilde{p}$ a $\tilde{q}$ jsou vektory polynomů a platí:

$$\max\{\deg\tilde{p}, \deg\tilde{q}\} = \max\{\deg p, \deg q\} + l,$$

kde l je násobnost $(a + ib)$ jako vlastního čísla A.

Poznámka. Není-li pravá strana ve tvaru kvazipolynomu, pak lze řešení nehomogenní rovnice najít metodou variace konstant ve tvaru:

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i(x)y_i(x),$$

kde $\{y_1, \ldots, y_n\}$ tvoří FSŘ rovnice $y' = Ay$.

8 Metrické prostory

8.1 Základní pojmy

Definice 8.1. Metrickým prostorem budeme rozumět dvojici (P, ϱ), kde P je množina bodů a $\varrho \colon P \times P \to \mathbb{R}$ splňuje následující podmínky. $\forall x, y, z \in P$ platí:

$$\varrho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y, \tag{1}$$
$$\varrho(x,y) = \varrho(y,x), \tag{2, symetrie}$$
$$\varrho(x,z) \leq \varrho(x,y) + \varrho(y,z). \tag{3, trojúhelníková nerovnost}$$

Funkce ϱ se nazývá metrika.

Poznámka. Z definice okamžitě plyne, že $P \times P \to [0, \infty)$ a $\varrho(x,y) \geq 0$.

Nyní se s důkazy podíváme na několik příkladů metrických prostorů.

Věta (Součtová metrika)**.** Nechť ϱ_1 na $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ splňuje:

$$\varrho_1(x.y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|,$$

kde $x = [x_1, \ldots, x_n]$ a $y = [y_1, \ldots, y_n]$. Pak dvojice $(\mathbb{R}^n, \varrho_1)$ tvoří metrický prostor.

Důkaz. Jistě $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ je $\varrho_1(x,y) \in [0, \infty)$. První dvě podmínky jsou jistě splněny. První podmínkuokamžitě vidíme z dosazení. Druhá podmínka platí, protože máme absolutní hodnotu. Zbývá ověřit třetí podmínku. Nechť $x, y, z \in \mathbb{R}^n$. Pak:

$$\varrho_1(x,z) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - z_i| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| + |y_i - z_i| = \varrho_1(x,y) + \varrho_1(y,z).$$

Tím jsme ověřili všechny podmínky. Dvojice $(\mathbb{R}^n, \varrho_1)$ tedy tvoří metrický prostor. □

Věta (Maximová metrika)**.** Nechť ϱ_∞ na $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ splňuje:

$$\varrho_\infty = \max_{i=\{1,\ldots,n\}} |x_i - y_i|,$$

kde $x = [x_1, \ldots, x_n]$ a $y = [y_1, \ldots, y_n]$. Pak $(\mathbb{R}^n, \varrho_\infty)$ tvoří metrický prostor.

Důkaz. Zřejmě $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ je $\varrho_\infty \in [0, \infty)$. První dvě podmínky opět vidíme okamžitě. Nechť $x, y, z \in \mathbb{R}^n$. Jistě existuje $j \in \{1, \ldots, n\}$ tak, že platí:

$$\varrho_\infty(x,z) = \max_{i=\{1,\ldots,n\}} \{|x_i - z_i|\} = |x_j - z_j|.$$

Pak:

$$|x_j - z_j| \leq |x_j - y_j| + |y_j - z_j|.$$

Zřejmě platí:

$$|x_j - y_j| \le \max_{i=\{1,\dots,n\}} \{|x_i - y_i|\} = \varrho_\infty(x,y),$$
$$|y_j - z_j| \le \max_{i=\{1,\dots,n\}} \{|y_i - z_i|\} = \varrho_\infty(y,z).$$

Nakonec tedy:

$$\varrho_\infty(x,z) \le \varrho_\infty(x,y) + \varrho_\infty(y,z).$$

Dvojice $(\mathbb{R}^n, \varrho_\infty)$ tedy tvoří metrický prostor. □

Věta (Supremová metrika)**.** Nechť $[a,b]$ je interval a funkce $\varrho_{\sup}(f,g)$ definovaná na $\mathcal{C}([a,b]) \times \mathcal{C}([a,b])$, kde $\mathcal{C}([a,b])$ označuje množinu všech spojitých funkcí na $[a,b]$, splňuje následující:

$$\varrho_{\sup}(f,g) = \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|.$$

Dvojice $(\mathcal{C}([a,b]), \varrho_{\sup})$ pak tvoří metrický prostor.

Důkaz. Nechť f, g jsou spojité na $[a,b]$. Dále $|f-g|$ je spojitá a na $[a,b]$ nabývá svého maxima, a tedy má funkce $\varrho_{\sup}$ smysl a je $\varrho_{\sup} \in [0,\infty)$. První dvě podmínky jsou opět triviální, a tedy stačí dokázat podmínku třetí. Nechť h je také spojitá na $[a,b]$. Zřejmě $\forall x \in [a,b]$ platí:

$$\begin{aligned} |f(x) - h(x)| &\le |f(x) - g(x)| + |g(x) - h(x)| \le \sup_{y\in[a,b]} |f(y) - g(y)| + \sup_{y\in[a,b]} |g(y) - h(y)| \\ &= \varrho_{\sup}(f,g) + \varrho_{\sup}(g,h). \end{aligned}$$

Vidíme, že $\varrho_{\sup}(f,g) + \varrho_{\sup}(g,h)$ je horní závora množiny $\{|f(x) - h(x)|, x \in [a,b]\}$. Tedy jistě:

$$\varrho_{\sup}(f,h) \le \varrho_{\sup}(f,g) + \varrho_{\sup}(g,h).$$

Dvojice $(\mathcal{C}([a,b]), \varrho_{\sup})$ tvoří metrický prostor. □

Věta (L^1 metrika (integrální metrika))**.** Nechť $[a,b]$ je interval a nechť funkce ϱ_{int} definovaná na $\mathcal{C}([a,b]) \times \mathcal{C}([a,b])$ splňuje:

$$\varrho_{\text{int}}(f,g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| \,\mathrm{d}x.$$

Pak dvojice $(\mathcal{C}([a,b]), \varrho_{\text{int}})$ tvoří metrický prostor.

Důkaz. Funkce ϱ_{int} je jistě dobře definovaná a pro každé $f, g \in \mathcal{C}([a,b])$ splňuje $\varrho_{\text{int}} \in [0,\infty)$. Pokud $f = g$, pak $\varrho_{\text{int}}(f,g) = 0$. Dále pokud $\varrho_{\text{int}}(f,g) = 0$, tak $f(x) - g(x) = 0$[3] pro všechna $x \in [a,b]$, takže $f = g$. Tím pádem první podmínka platí. Druhá zřejmě také. Ověříme poslední podmínku. Nechť $f, g, h \in \mathcal{C}([a,b])$. Pak:

$$\begin{aligned} \varrho_{\text{int}}(f,h) &= \int_a^b |f(x) - h(x)| \,\mathrm{d}x \le \int_a^b (|f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)|) \,\mathrm{d}x \\ &= \varrho_{\text{int}}(f,h) + \varrho_{\text{int}}(h,g). \end{aligned}$$

Dvojice $(\mathcal{C}([a,b]), \varrho_{\text{int}})$ tedy tvoří metrický prostor. □

[3] Toto tvrzení není triviální a je třeba jej zvlášť dokázat.

Věta (Diskrétní metrika)**.** Nechť P je libovolná množina. Nechť funkce $\varrho_d \colon P \times P \to [0, \infty)$ splňuje:

$$\varrho_d(x,y) = \begin{cases} 1, & x \neq y, \\ 0, & x = y. \end{cases}$$

Pak dvojice $(P, \varrho_d(x,y))$ tvoří metrický prostor.

Důkaz. První dvě podmínky jsou jistě splněny. Nechť $x, y, z \in P$. Pokud $x = z$, pak je $\varrho(x,z) = 0$. Pokud naopak $x \neq z$, pak buď $x \neq y$ nebo $z \neq y$. Pak tedy platí:

$$\varrho_d(x,y) + \varrho_d(y,z) \geq 1 = \varrho_d(x,z).$$

Třetí podmínka je také splněna a dvojice $(P, \varrho_d(x,y))$ tvoří metrický prostor. □

Ukážeme nyní, co je to Euklidovská metrika na $\mathbb{R}^n$, se kterou budeme často pracovat. Nejprve ale dokážeme Cauchyovu a trojúhelníkovou nerovnost.

Věta (Cauchyova nerovnost)**.** Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $a_1, \dots, a_n$, $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$. Pak platí:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right).$$

Důkaz. Pokud $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ platí, že $a_i = 0$ nebo $b_i = 0$, tak je tvrzení zřejmé. Předpokládejme tedy, že $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 > 0$. Dokážeme následujícím trikem. Jistě platí:

$$0 \leq \sum_{i=1}^{n} (a_i x + b_i)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) x^2 + 2\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right) x + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right).$$

To je kvadratická funkce, která je $\forall x \in \mathbb{R}$ nezáporná a $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 > 0$. Tato kvadratická rovnice má tedy nejvýše jeden kořen. Spočítáme determinant této rovnice:

$$0 \geq D = 4\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 - 4\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right).$$

Z toho pak dostaneme:

$$4\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq 4\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right).$$

Z toho pak snadno dostaneme Cauchyovu nerovnost. □

Věta (Trojúhelníková nerovnost)**.** Nechť $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ a $\varrho(x,z) \leq \varrho(x,y) + \varrho(y,z)$. Pak platí:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - z_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - z_i)^2}.$$

Důkaz. Označme $a_i = x_i - y_i$ a $b_i = y_i - z_i$, a to $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$. Pak:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}.$$

Rovnost upravíme:

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} a_i b_i + \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \leq \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2} + \sum_{i=1}^{n} b_i^2,$$

Z toho pak snadno dostaneme:

$$2\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq 2\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2},$$

což je Cauchyova nerovnost. Trojúhelníková nerovnost tedy platí. □

Nyní se konečně můžeme podívat na Euklidovskou metriku.

Věta (Euklidovská metrika)**.** Nechť $x, y \in \mathbb{R}^n$. Definujeme:

$$\varrho_e = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}.$$

Dvojice $(\mathbb{R}^n, \varrho_e)$ tvoří metrický prostor.

Důkaz. První dvě podmínky jsou zřejmé. Třetí pak okamžitě plyne z trojúhleníkové nerovnosti. □

Definice 8.2. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor, $x \in P$ a $r > 0$. Otevřenou koulí se středem x a poloměrem r rozumíme:

$$B(x, r) = \{y \in P \colon \varrho(x, y) < r\}.$$

Definice 8.3. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor. Řekneme, že množina $G \subset P$ je otevřená v (P, ϱ), jestliže pro každý bod $x \in G$ existuje $r > 0$ tak, že $B(x, r) \subset G$. Řekneme, že množina $F \subset P$ je uzavřená v (P, ϱ), pokud $P \setminus F$ je otevřená.

Poznámka. Platí následující:

1. Otevřená koule je otevřená množina. Dokážeme. Nechť $x_0 \in P$ a $r_0 > 0$. Chceme dokázat, že $B(x_0, r_0)$ je otevřená. Nechť $x \in B(x_0, r_0)$. Položme $r = r_0 - \varrho(x, x_0)$. Dokážeme, že $B(x, r) \subset B(x_0, r_0)$. Jistě $\forall z \in B(x, r)$ platí:

   $$\varrho(x_0, z) \leq \varrho(x_0, x) + \varrho(x, z) < \varrho(x_0, x) + r = \varrho(x_0, x) + r_0 - \varrho(x, x_0) = r_0.$$

   Otevřená koule je tedy skutečně otevřená.

2. Uzavřená koule je uzavřená množina. Opět dokážeme. Stačí ukázat, že $P \setminus \overline{B(x_0, r_0)}$ je otevřená. Nechť $x \in P \setminus \overline{B(x_0, r_0)}$. Položme $r = \varrho(x_0, x) - r_0 > 0$. Dokážeme, že $B(x, r) \subset P \setminus \overline{B(x_0, r_0)}$. Jistě $\forall z \in B(x, r)$ platí:

$$\varrho(x_0, z) \geq \varrho(x_0, x) - \varrho(x, z) > \varrho(x_0, x) - r = \varrho(x_0, x) - \varrho(x_0, x) + r_0 = r_0.$$

   Uzavřená koule je tedy uzavřená.

Věta 8.4 (Vlastnosti otevřených množin)**.** Nechť (P, ϱ) je metrický prostor. Pak platí následující:

1. $\varnothing$ a P jsou otevřené.
2. Jsou-li $G_1, \ldots, G_n$ otevřené, pak $\bigcap_{i=1}^n G_i$ je otevřená.
3. Nechť A je libovolná (i nekonečná) indexová množina. Jsou-li G_α, $\alpha \in A$ otevřené, pak $\bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$ je otevřená.

Důkaz. Postupně dokážeme jednotlivá tvrzení:

1. Toto tvrzení je zřejmé.
2. Nechť $x \in \bigcap_{i=1}^n G_i$. Pak $x \in G_i$ a také víme, že G_i je otevřená $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$. Jelikož je otevřená, tak $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$ existuje r_i tak, že $B(x, r_i) \subset G_i$. Zvolme $r = \min_{i=\{1,\ldots,n\}} r_i$. Pak platí:

$$B(x, r) \subset B(x, r_i) \subset G_i \Rightarrow B(x, r) \subset \bigcap_{i=1}^n G_i.$$

3. Nechť $x \in \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$. Pak existuje $\alpha_0 \in A$ tak, že $x \in G_{\alpha_0}$ a G_{α_0} je otevřená. Pak existuje $r > 0$ tak, že platí:

$$B(x, r) \subset G_{\alpha_0} \subset \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha.$$

   Z toho dostáváme, že $\bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$ je otevřená.

Tím jsme důkaz dokončili. □

Věta 8.5 (Vlastnosti uzavřených množin)**.** Nechť (P, ϱ) je metrický prostor. Pak platí:

1. $\varnothing$ a P jsou uzavřené.
2. Jestliže jsou $F_1, \ldots, F_n$ uzavřené, tak $\bigcup_{i=1}^n F_i$ je uzavřená.
3. Nechť A je libovolná (i nekonečná) indexová množina. Jsou-li F_α, $\alpha \in A$ uzavřené, pak jsou $\bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha$ uzavřené.

Důkaz. Dokážeme postupně jednotlivá tvrzení:

1. Platí, že $P \setminus \varnothing = P$ a $P \setminus P = \varnothing$. P a $\varnothing$ jsou otevřené, a tedy $\varnothing$ a P jsou také uzavřené.
2. Nechť $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ je F_i uzavřená. Pak $P \setminus F_i$ je otevřená. Pak ale $P \setminus \bigcup_{i=1}^n F_i = \bigcap_{i=1}^n (P \setminus F_i)$ je otevřená podle předchozí věty. $\bigcup_{i=1}^n F_i$ je tedy uzavřená.
3. Nechť $P \setminus F_\alpha$ je uzavřená. Pak $P \setminus \bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha = \bigcup_{\alpha \in A} (P \setminus F_\alpha)$ je otevřená dle předchozí věty. $\bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha$ je tedy uzavřená.

Věta je tedy dokázána. $\square$

Definice 8.6. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor, $A \subset P$ a $x \in P$. Řekneme, že x je vnitřním bodem A, jestliže existuje $r > 0$ tak, že $B(x, r) \subset A$. Množinu všech vnitřních bodů A nazýváme vnitřkem A a značíme $\operatorname{int} A$.

Věta 8.7 (Charakterizace vnitřku)**.** Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $A \subset P$. Potom $\operatorname{int} A$ je největší (vzhledem k množinové inkluzi) otevřená množina obsažená v A.

Důkaz. Nejprve dokážeme, že $\operatorname{int} A$ je otevřená množina. Podle definice $\forall x \in \operatorname{int} A$ existuje $r > 0$ tak, že $B(x, r) \subset A$. Dokážeme, že $B(x, r) \subset \operatorname{int} A$. $\forall y \in B(x, r)$ zvolme $\tilde{r} = r - \varrho(x, y)$. Pak platí:

$$B(y, \tilde{r}) \subset B(x, r) \subset A,$$

protože $\forall z \in B(y, \tilde{r})$ platí:

$$\varrho(x, z) \leq \varrho(z, y) + \varrho(y, x) < \tilde{r} + \varrho(y, x) = r.$$

Tedy dostáváme, že $y \in \operatorname{int} A$. Dále $\forall x \in \operatorname{int} A$ existuje $r > 0$ tak, že $B(x, r) \subset \operatorname{int} A$. $\operatorname{int} A$ je tedy otevřená. Dále ukážeme, že $\operatorname{int} A \subset A$. To je zřejmé. Zvolíme $x \in \operatorname{int} A$. Pak $\{x\} \in B(x, r) \subset A$, a tedy $x \in A$. Nakonec stačí ukázat, že $\operatorname{int} A$ je největší otevřená podmnožina obsažená v A. Dokážeme to sporem. Nechť existuje G otevřená tak, že $\operatorname{int} A \subsetneq G \subset A$. Pak existuje $x \in G \setminus \operatorname{int} A$. G je ale otevřená množina, a tedy existuje $r > 0$ tak, že $B(x, r) \subset G \subset A$. Z toho dostáváme, že $x \in \operatorname{int} A$, což je spor. Věta tedy platí. $\square$

Důsledek. Jestliže je A otevřená, pak $\operatorname{int} A = A$.

Definice 8.8. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor, $M \subset P$ a $x \in P$. Řekneme, že x je hraničním bodem M, jestliže $\forall r > 0$ platí $M \cap B(x, r) \neq \varnothing$ a $(P \setminus M) \cap B(x, r) \neq \varnothing$. Množinu všech hraničních bodů M nazýváme hranicí M a značíme ji ∂M. Uzávěr množiny M je definován jako $\overline{M} = M \cup \partial M$.

Věta 8.9 (Uzávěr a uzavřené množiny)**.** Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $A \subset P$. Pak A je uzavřená v P právě tehdy, když $\overline{A} = A$.

Důkaz. Dokážeme jendotlivé implikace.

1. <u>Pravá implikace</u>: Jestliže je A uzavřená, tak $P \setminus A$ je otevřená. Tedy $\forall x \in P \setminus A$ existuje $r > 0$ tak, že $B(x, r) \subset P \setminus A$. Tím pádem $x \notin \partial A$. Z toho dostáváme, že $\partial A \subset A$, a tedy $\overline{A} = A \cup \partial A = A$.

2. Levá implikace: Předpokládáme, že $A = \overline{A} = A \cup \partial A$. Z toho plyne, že $\partial A \subset A$. Neboli $\forall x \in P \setminus A$ platí $x \notin \partial A$. Tedy existuje $r > 0$ tak, že $B(x,r) \cap A = \varnothing$ nebo $B(x,r) \cap (P \setminus A) = \varnothing$. Jenže druhá možnost nemůže nastat. Tím pádem $B(x,r) \cap A = \varnothing$. Z toho $B(x,r) \subset P \setminus A$. Tedy $P \setminus A$ je otevřená, z čehož hned plyne, že A je uzavřená.

Tím jsme větu dokázali. □

Definice 8.10. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor. Nechť $A \subset P$ a $x \in P$. Potom vzdálenost bodu x od množiny A definujeme následovně:

$$\operatorname{dist}(x, A) = \inf\{\varrho(x,y), y \in A\}.$$

Věta 8.11 (Vlastnosti uzávěru)**.** Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $A \subset P$. Potom platí:

1. Jestliže $A \subset B$, tak $\overline{A} \subset \overline{B}$.
2. Nechť $A \neq \varnothing$. Pak $\overline{A} = \{x \in \varrho \colon \varrho(x, A) = 0\}$.
3. Platí $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$. Jinými slovy platí, že $\overline{A}$ je uzavřená množina.

Důkaz. Postupně dokážeme jednotlivá tvrzení:

1. Nechť $x \in \overline{A} = A \cup \partial A$ $(\subset B \cup \partial A)$. Je-li $x \in B$, pak $x \in \overline{B} = B \cup \partial B$. Je-li naopak $x \in \partial A$ a $x \notin B$, pak $\forall r > 0$ platí $B(x,r) \cap A \neq \varnothing$. Pak jelikož $A \subset B$ platí $B(x,r) \cap B \neq \varnothing$ a zároveň $\{x\} \in B(x,r) \cap (P \setminus B) \neq \varnothing$. Z toho dostaneme, že $x \in \partial B$, a tedy $x \in \overline{B}$.

2. Označme $M = \{x \in P \colon \operatorname{dist}(x, A) = 0\}$. Dokážeme, že M je uzavřená. Nechť $y \in P \setminus M$. Pak $\operatorname{dist}(y, A) > 0$. Tedy existuje $r > 0$ tak, že $B(y,r) \cap A = \varnothing$. Dokážeme, že $B(y,r) \subset P \setminus M$. Pak $\forall a \in A$ a $\forall z \in B\left(y, \frac{r}{2}\right)$ platí:

$$\varrho(z,a) \geq \varrho(y,a) - \varrho(z,y) > r - \frac{r}{2} = \frac{r}{2}.$$

   Z toho dostáváme, že $z \in P \setminus M$, a tedy $B\left(y, \frac{r}{2}\right) \subset P \setminus M$. Jinými slovy $\forall y \in P \setminus M$ existuje $r > 0$ tak, že $B\left(y, \frac{r}{2}\right) \subset P \setminus M$. Z toho plyne, že $P \setminus M$ je otevřená, a tedy M je uzavřená. Podle prvního bodu této věty je $A \subset M$. Tedy $\overline{A} \subset \overline{M} = M$, protože M je uzavřená. Dokážeme nyní, že i $M \subset \overline{A}$. Nechť $x \in P \setminus \overline{A}$. Pak $x \notin \partial A$. Takže existuje $r > 0$ tak, že $B(x,r) \cap A = \varnothing$ nebo $B(x,r) \cap P \setminus A = \varnothing$. Vzhledem k tomu, že $x \in P \setminus \overline{A} \subset P \setminus A$, tak druhá možnost nenastane. Tím pádem existuje $r > 0$ tak, že $B(x,r) \cap A = \varnothing$. Pak $\operatorname{dist}(x, A) \geq r$, a tedy $x \notin M$. Z $P \setminus \overline{A} \subset P \setminus M$ dostáváme, že $M \subset \overline{A}$.

3. Pro $A = \varnothing$ je $\overline{A} = \varnothing$ a tvrzení j zřejmé. Podle důkazu druhé části věty víme, že $\overline{A} = M$ a M je uzavřená. Dle předchozí věty je tedy $\overline{M} = M$. Jelikož $\overline{A} = M$, tak $\overline{\overline{A}} = \overline{M} = M = \overline{A}$.

Větu jsme tímto dokázali. □

8.2 Konvergence a spojitá zobrazení v metrických prostorech

Definice 8.12. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost prvků z P a $x \in P$. Řekneme, že $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k x v (P, ϱ), jestliže $\lim_{n\to\infty} \varrho(x_n, x) = 0$. Značíme $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, nebo $x_n \xrightarrow{\varrho} x$.

Poznámka. Pro metrický prostor $(\mathbb{R}, \varrho_e)$ je tento pojem konvergence shodný s dříve zavedeným.

Věta 8.13 (Vlastnosti konvergence)**.** Nechť (P, ϱ) je metrický prostor. Pak platí:

1. Nechť pro posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ z P existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ a $x \in P$ tak, že $\forall n \geq n_0$ platí $x_n = x$. Pak $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.
2. Nechť $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ a $\lim_{n\to\infty} x_n = y$. Pak $x = y$.
3. Nechť $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ je vybraná posloupnost z $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ a nechť $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Pak $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$.

Důkaz. Postupně dokážeme:

1. Je dáno, že $\forall n \geq n_0$ platí $\varrho(x_n, x) = 0$. Tedy $\lim_{n\to\infty} \varrho(x_n, x) = 0$. Jinými slovy $x_n \xrightarrow{\varrho} x$.
2. Zřejmě platí:
$$\varrho(x, y) \leq \varrho(x, x_n) + \varrho(x_n, y) \xrightarrow{n\to\infty} 0 \Rightarrow x = y.$$
3. $\varrho(x_{n_k}, x)$ je vybraná posloupnost z $\varrho(x_n, x)$. Dle věty o limitě vybrané posloupnosti platí, že $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$.

Tím jsme větu dokázali. □

Definice 8.14. Nechť (P, ϱ) a (Q, σ) jsou metrické prostory. Nechť $M \subset P$, $f : M \to Q$ a $x_0 \in M$. Řekneme, že f je spojitá v x_0 vzhledem k M, jestliže platí:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in B_\varrho(x_0, \delta) \cap M : f(x) \in B_\sigma(f(x_0), \varepsilon).$$

Řekneme, že f je spojitá na M vzhledem k M, jestliže je spojitá v každém bodě M vzhledem k M. Nechť $\forall \delta > 0$ platí $B_\varrho(x_0, \delta) \cap M \neq \varnothing$. Řekneme, že f má v x_0 limitu vzhledem k M rovnou $y \in Q$, pokud platí:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in (B_\varrho(x_0, \delta) \cap M) \setminus \{x_0\} : f(x) \in B_\sigma(y, \varepsilon).$$

Poznámka. Uveďme následující poznámky:

1. Pojem spojitosti v $(\mathbb{R}, \varrho_e)$ je shodný s dříve zavedeným.
2. Definici spojitosti v bodě lze formulovat i takto:
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : f\left(B_\varrho(x_0, \delta) \cap M\right) \subset B_\sigma(f(x_0), \varepsilon).$$
Později také budeme využívat následující definici spojitosti f na M:
$$\forall x \in M\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall y \in M : \varrho(x, y) < \delta \Rightarrow \sigma(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Věta 8.15 (Charakterizace spojitosti)**.** Nechť (P, ϱ) a (Q, σ) jsou metrické prostory a $f\colon P \to Q$. Pak následující podmínky jsou ekvivalentní:

1. f je spojitá na P.
2. $\forall G \subset Q$, které jsou otevřené, je $f^{-1}(G)$ otevřená.
3. $\forall F \subset Q$, které jsou uzavřené, je $f^{-1}(F)$ uzavřená.

Důkaz. Dokážeme postupně jednotlivé implikace:

- $\underline{1 \Rightarrow 2}$: Nechť G je otevřená. Nechť $x_0 \in f^{-1}(G)$. G je otevřená, a tedy existuje $\varepsilon > 0$ tak, že $B_\sigma(f(x_0), \varepsilon) \subset G$. Z definice spojitosti existuje $\delta > 0$ tak, že platí:
$$f\left(B_\varrho(x_0, \delta)\right) \subset B_\sigma(f(x_0), \varepsilon) \subset G.$$
Z toho dostaneme, že $B_\varrho(x_0, \delta) \subset f^{-1}(G)$, a tedy $f^{-1}(G)$ je otevřená.

- $\underline{2 \Rightarrow 1}$: Nechť $x_0 \in P$. Nechť $\varepsilon > 0$ a $B_\sigma(f(x_0), \varepsilon)$ je otevřená množina. Pak $f^{-1}(B_\sigma(f(x_0), \varepsilon))$ je otevřená. Dále x_0 je prvkem této otevřené množiny, a tedy existuje $\delta > 0$ tak, že $B_\varrho(x_0, \delta) \subset f^{-1}(B_\sigma(f(x_0), \varepsilon))$. Z toho plyne, že f je spojitá.

- $\underline{2 \Rightarrow 3}$: Nechť F je uzavřená. Zřejmě:
$$f^{-1}(F) = f^{-1}(Q \setminus (Q \setminus F)) = f^{-1}(Q) \setminus f^{-1}(Q \setminus F) = P \setminus f^{-1}(Q \setminus F).$$
Víme, že $f^{-1}(Q \setminus F)$ je otevřená, a tedy $P \setminus f^{-1}(Q \setminus F)$ je uzavřená.

- $\underline{3 \Rightarrow 2}$: Nechť G je otevřená. Platí:
$$f^{-1}(G) = f^{-1}(Q \setminus (Q \setminus G)) = f^{-1}(Q) \setminus f^{-1}(Q \setminus G) = P \setminus f^{-1}(Q \setminus G).$$
$f^{-1}(Q \setminus G)$ je uzavřená, a tedy $P \setminus f^{-1}(Q \setminus G)$ je otevřená.

Tím jsme větu dokázali. □

Věta 8.16 (Spojitost složeného zobrazení)**.** Nechť (P, ϱ), (Q, σ) a (Z, τ) jsou metrické prostory. Nechť $f\colon P \to Q$ a $g\colon Q \to Z$ jsou spojitá zobrazení. Pak $g \circ f\colon P \to Z$ je spojité zobrazení.

Důkaz. Nechť $G \subset Z$ je otevřená množina. Pak $g^{-1}(G)$ je otevřená v Q. Z toho snadno dostaneme, že $f^{-1}(g^{-1}(G))$ je otevřená v P. Tedy platí, že $g \circ f$ je spojitá. □

Věta 8.17 (Heineho věta)**.** Nechť (P, ϱ) a (Q, σ) jsou metrické prostory. Nechť $M \subset P$, $x_0 \in M$ a $f\colon M \to Q$. Pak následující je ekvivalentní:

1. $\lim_{x \to x_0, x \in M} f(x) = f(x_0)$, tedy f je v x_0 spojitá vzhledem k M.
2. Pro každou posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ splňující $x_n \in M$ $\forall n \in \mathbb{N}$ a $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ platí:
$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0).$$

Důkaz. Dokážeme obě implikace:

- 1 ⇒ 2: Mějme $x_n \in M$ tak, že $x_n \xrightarrow{\varrho} x_0$. Nechť $\varepsilon > 0$. Pak existuje $\delta > 0$ tak, že platí:
$$f(B_\varrho(x_0, \delta) \cap M) \subset B_\sigma(f(x_0), \varepsilon).$$
K tomuto $\delta > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $\forall n \geq n_0$ platí $x_n \in B_\varrho(x_n, \delta)$, protože $x_n \xrightarrow{\varrho} x_0$. Tedy $\forall n \geq n_0$ platí:
$$f(x_n) \in B_\sigma(f(x_0), \varepsilon).$$

- 2 ⇒ 1: Dokážeme sporem. Tedy:
$$\exists \varepsilon > 0 \; \forall n \in \mathbb{N} \; \forall \delta > 0, \delta = \frac{1}{n}, \; \exists x_n \in B_\varrho\left(x_0, \frac{1}{n}\right) \cap M \colon f(x_n) \notin B_\sigma(f(x_0), \varepsilon).$$
Víme, že $x_n \in B_\varrho\left(x_0, \frac{1}{n}\right)$. Z toho plyne, že $x_n \xrightarrow{\varrho} x_0$, ale $f(x_n)$ nekonverguje k $f(x_0)$. Tím dostáváme spor.

Tím je věta dokázána. □

8.3 Kompaktní množiny

Věta 8.18 (Charakterizace uzavřených množin)**.** Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $F \subset P$. Pak platí:
$$F \text{ je uzavřená} \Leftrightarrow (x_n \xrightarrow{\varrho} x, x_n \in F \Rightarrow x \in F).$$

Důkaz. Postupně dokážeme jednotlivé implikace:

1. Pravá implikace: Dokážeme sporem. Nechť existuje $x_n \in F$, $x_n \xrightarrow{\varrho} x$ a $x \notin F$. Pak $x \in P \setminus F$. Množina $P \setminus F$ je otevřená, a tedy existuje $r > 0$ tak, že $B(x, r) \subset P \setminus F$. Z toho plyne, že $\forall n$ platí $x_n \notin B(x, r)$, protože $x_n \in F$. Pak ale x_n nekonverguje k x a dostáváme spor.

2. Levá implikace: Opět postupujeme sporem. Nechť F není uzavřená. Pak $P \setminus F$ není otevřená, a tedy existuje $x \in P \setminus F$ tak, že $\forall r > 0$ platí, že $B(x, r)$ není podmnožinou $P \setminus F$. Této vlastnosti využijeme pro $r = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Tedy:
$$\forall n \in \mathbb{N} \; \exists x_n \in B\left(x, \frac{1}{n}\right) : x_n \notin P \setminus F \Leftrightarrow x_n \in F.$$
Celkem $x_n \xrightarrow{\varrho} x$, $x_n \in F$, ale $x \notin F$, protože $x \in P \setminus F$. Dostáváme spor.

Tím je důkaz hotov. □

Definice 8.19. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $K \subset P$. Řekneme, že K je kompaktní, jestliže z každé posloupnosti prvků z K lze vybrat konvergentní podposloupnost s limitou v K.

Poznámka. Z definice lze nahlédnout, že prázdná množina je kompaktní. Dalším příkladem kompaktní množiny je například $[0,1]$ nebo množina $K \subset P$, kde K je konečná. Kompaktní naopak není třeba množina $[0,1)$.

Definice 8.20. Množina M je omezená, jestliže existují $x \in P$ a $r > 0$ tak, že $K \subset B(x,r)$.

Věta 8.21 (Vlastnosti kompaktních množin)**.** Nechť (P,ϱ) je metrický prostor a $K \subset P$ je kompaktní. Pak platí:

1. K je uzavřená.
2. Je-li $F \subset K$ uzavřená, pak F je kompaktní.
3. K je omezená.

Důkaz. Postupně dokážeme:

1. Využijeme předchozí věty. Nechť $x_n \in K$ a $x_n \xrightarrow{\varrho} x$. Z definice kompaktnosti existuje podposloupnost $x_{n_k} \xrightarrow{\varrho} y \in K$. Podposloupnost x_{n_k} konverguje k tomu samému jako posloupnost x_n. Z toho dostáváme, že $x = y$ a $x \in K$, neboť $y \in K$. K je tedy uzavřená.

2. Nechť $x_n \in F$. K je kompaktní, a tedy existuje podposloupnost x_{n_k} tak, že $x_{n_k} \xrightarrow{\varrho} x \in K$. Dále jistě $x_{n_k} \in F$ a navíc je F uzavřená. To znamená, že $x \in F$. F je tím pádem kompaktní.

3. Dokážeme sporem. Zvolme $x_0 \in K$ libovolně. K není omezená. Z toho plyne, že $\forall n \in \mathbb{N}$ existuje $x_n \in K$ tak, že $x_n \notin B(x_0,n)$. K je ale kompaktní, a tedy existuje $x_{n_k} \xrightarrow{\varrho} y \in K$. Tedy:

$$n_k \leq \varrho(x_0, x_{n_k}) \leq \varrho(x_0, y) + \varrho(y, x_{n_k}).$$

Dále $\varrho(y, x_{n_k}) \xrightarrow{k\to\infty} 0$, $\varrho(x_0, y) \xrightarrow{k\to\infty} \varrho(x_0,y)$ a $n_k \xrightarrow{k\to\infty} +\infty$. Tedy by muselo platit, že $+\infty \leq \varrho(x_0,y)$, což je spor.

Věta je dokázána. □

Věta 8.22 (Charakterizace kompaktních množin v $\mathbb{R}^n$)**.** Nechť $(\mathbb{R}^n, \varrho_e)$ je metrický prostor. Množina $K \subset \mathbb{R}^n$ je kompaktní právě tehdy, když je omezená a uzavřená.

Důkaz. Pravá implikace plyne z předešlé věty. □

Věta 8.23 (Nabývání extrémů na kompaktu)**.** Nechť (P,ϱ) je metrický prostor a $K \subset P$ je kompaktní. Nechť $f\colon K \to \mathbb{R}$ je spojitá. Pak f nabývá na K svého maxima a minima. Speciálně platí, že f je na K omezená.

Důkaz. Dokážeme pro maximum. Jistě existuje $x_n \in K$ tak, že $f(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} \sup\{f(x), x \in K\}$. Dále $x_n \in K$ a K je kompaktní. Z toho plyne, že existuje $x_{n_k} \to x_0$. f je spojitá v x_0, a tedy dle Heineho věty platí, že $\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x_0)$. Z toho dostáváme, že $f(x_0) = \sup\{f(x), x \in K\}$. □

Věta 8.24 (Spojitý obraz kompaktu)**.** Nechť (P, ϱ) a (Q, σ) jsou metrické prostory a nechť $f\colon P \to Q$ je spojité zobrazení. Nechť $K \subset P$ je kompaktní množina. Pak $f(K) \subset Q$ je kompaktní množina.

Důkaz. Nechť $y_n \in f(K)$. Pak existuje $x_n \in K$ tak, že $f(x_n) = y_n$. Dle definice kompaktnosti existuje $x_{n_k} \to x \in K$. Podle Heineho věty dostáváme, že $f(x_{n_k}) \to f(x) \in f(K)$. Označíme-li $y = f(x)$, pak $y \in f(K)$ a $y_{n_k} \to y$. $f(K)$ je tedy kompaktní v Q. □

Definice 8.25. Nechť (P, ϱ) a (Q, σ) jsou metrické prostory, $K \subset P$ a $f\colon K \to Q$. Řekneme, že f je na K stejnoměrně spojitá, jestliže platí:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x, y \in K\colon \varrho(x, y) < \delta \Rightarrow \sigma(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Věta 8.26 (O vztahu spojitosti a stejnoměrné spojitosti)**.** Nechť (P, ϱ) a (Q, σ) jsou metrické prostory, $K \subset P$ je kompaktní a $f\colon K \to Q$ je spojitá. Pak f je stejnoměrně spojitá na K.

Důkaz. Dokážeme sporem. Nechť f je spojitá, ale ne stejnoměrně. Tedy:

$$\exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x_n, y_n \in K\colon \varrho(x_n, y_n) < \delta \wedge \sigma(x_n, y_n) \geq \varepsilon.$$

Toto použijeme pro $\delta = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. K je kompaktní, a tedy existuje $x_{n_k} \to x_0 \in K$. Dále platí:

$$\varrho(y_{n_k}, x_0) \leq \varrho(x_{n_k}, y_{n_k}) + \varrho(x_{n_k}, x_0) \leq \frac{1}{n_k} + \varrho(x_{n_k}, x_0) \xrightarrow{k \to \infty} 0 \Rightarrow y_{n_k} \to x_0.$$

f je spojitá v x_0, a tedy dle Heineho věty máme $f(x_{n_k}) \to f(x_0)$ a $f(y_{n_k}) \to f(x_0)$. Nalezneme $k \in \mathbb{N}$ tak, aby $\sigma(f(x_{n_k}), f(x_0)) < \frac{\varepsilon}{2}$ a $\sigma(f(y_{n_k}), f(x_0)) < \frac{\varepsilon}{2}$. Pak:

$$\varepsilon \leq \sigma(f(x_{n_k}), f(y_{n_k})) \leq \sigma(f(x_{n_k}), f(x_0)) + \sigma(f(y_{n_k}), f(x_0)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

a tedy dostáváme spor. □

8.4 Úplné metrické prostory

Definice 8.27. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost bodů z P. Řekneme, že x_n splňuje Bolzano-Cauchyovu podmínku (říkáme také, že je cauchyovská), jestliže platí:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall m, n \geq n_0\colon \varrho(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Poznámka. Každá konvergentní posloupnost je cauchyovská.

Definice 8.28. Řekneme, že metrický prostor (P, ϱ) je úplný, jestliže každá cauchyovská posloupnost bodů z P je konvergentní.

Věta 8.29 (Vztah kompaktnosti a úplnosti)**.** Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a P je kompaktní. Pak P je úplný metrický prostor.

Důkaz. Nechť $\{x_n\}$ je cauchyovská posoupnost. P je kompaktní, a tedy existuje $x_{n_k} \to x \in P$. Nechť $\varepsilon > 0$. Z BC podmínky existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $\forall m, n \geq n_0$ platí $\varrho(x_n, x_m) < \varepsilon$. Z $x_{n_k} \to x$ plyne, že existuje $k_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $\forall k \geq k_0$ platí $\varrho(x_{n_k}, x) < \varepsilon$. Nalezneme n_k tak, aby $k \geq k_0$ a $n_k \geq n_0$. Pak $\forall n \geq n_0$ platí:

$$\varrho(x_n, x) \leq \varrho(x_n, x_{n_k}) + \varrho(x_{n_k}, x) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon,$$

tím pádem $x_n \to x$ a věta platí. □

Věta 8.30 (Úplnost a prostor spojitých funkcí)**.** Metrický prostor $\mathcal{C}([0,1])$ se supremovou metrikou je úplný.

Důkaz. Nechť $\{f_n\}$ je cauchyovská posloupnost. Tedy $\forall \varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $\forall m, n \geq n_0$ platí $\varrho(f_n, f_m) = \sup_{x \in [0,1]} |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ $(*)$. $\forall x \in [0,1]$ pevné platí:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall m, n \geq n_0 \colon |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

Z BC podmínky pro posloupnosti plyne, že existuje $\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x) \in \mathbb{R}$. Takto máme zadefinovanou novou funkci f. Nyní dokážeme, že $f_n \to f$. Provedeme limitní proces $(n \to \infty)$ na $(*)$ a dostaneme:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 \colon \sup_{x \in [0,1]} |f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon.$$

Tedy $\varrho(f, f_n) \leq \varepsilon$. Pak skutečně $f_n \to f$. Nakonec dokážeme, že f je spojitá. Nechť $y \in [0,1]$. Chceme dokázat, že f je spojitá v y. Nechť $\varepsilon > 0$. Z BC podmínky dostáváme, že existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $\forall m, n \geq n_0$ a $\forall x \in [0,1]$ platí $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$. Nechť $n = n_0$ a $m \to \infty$. Pak $|f_{n_0}(x) - f(x)| \leq \varepsilon$. Nechť n_0 pevné. Pak f_{n_0} je spojitá v bodě y. Z definice spojitosti existuje $\delta > 0$ tak, že $\forall x \in [0,1]$, kde $|x - y| < \delta$, platí $|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(y)| < \varepsilon$. Nyní $\forall x \in [0,1]$, kde $|x - y| < \delta$, máme:

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(y)| + |f_{n_0}(y) - f(y)| \leq 3\varepsilon.$$

Tím pádem je f spojitá v bodě $y \in [0,1]$. □

Poznámka. Metrický prostor $\mathcal{C}([-1,1])$ s metrikou ϱ_{int} není úplný. Jako příklad můžeme vzít funkce, které se rovnají 1 na intervalu $\left(\frac{1}{n}, +\infty\right)$ a -1 na intervalu $\left(-\infty, -\frac{1}{n}\right)$ a na zbytku jsou lineární tak, aby byly spojité. Tyto funkce konvergují k funkci $\operatorname{sgn}(x)$, která není spojitá, ale posloupnost těchto funkcí je cauchyovská, protože platí:

$$\varrho_{\text{int}}(f_n, f_m) \leq \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} 1 \, \mathrm{d}x = \frac{2}{n} \leq \frac{2}{n_0} < \varepsilon.$$

Věta 8.31 (Banachova věta o kontrakci)**.** Nechť (P, ϱ) je úplný metrický prostor a $T \colon P \to P$ je kontrakce. To znamená, že existuje $\gamma \in (0,1)$ tak, že $\forall x, y \in P$ platí $\varrho(T(x), T(y)) \leq \gamma \varrho(x, y)$. Pak existuje právě jedno $x \in P$ takové, že $T(x) = x$.

Důkaz. Zvolme $x_1 \in P$ libovolně. Definujme indukcí $x_{n+1} = T(x_n)$. Dokážeme, že taková posloupnost je cauchyovská. Jistě $\forall n \in \mathbb{N}$ platí:

$$\varrho(x_{n+1}, x_n) = \varrho(T(x_n), T(x_{n-1})) \leq \gamma\varrho(x_n, x_{n-1}) \leq \gamma^2\varrho(x_{n-1}, x_{n-2}) \leq \cdots \leq \gamma^{n-1}\varrho(x_2, x_1).$$

Nechť $\varepsilon > 0$. Zvolme $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, aby platilo:

$$\varrho(x_2, x_1)\gamma^{n_0-1}\frac{1}{1-\gamma} < \varepsilon.$$

Nyní $\forall m, n \geq n_0$, $m < n$ platí:

$$\begin{aligned}
\varrho(x_m, x_n) &\leq \varrho(x_m, x_{m+1}) + \varrho(x_{m+1}, x_{m+2}) + \cdots + \varrho(x_{n-1}, x_n) \\
&\leq \gamma^{m-1}\varrho(x_2, x_1) + \gamma^m\varrho(x_2, x_1) + \cdots + \gamma^{n-2}\varrho(x_2, x_1) \\
&= \varrho(x_2, x_1)(\gamma^{m-1} + \cdots + \gamma^{n+2}) \\
&\leq \varrho(x_2, x_1)\gamma^{m-1}\frac{1}{1-\gamma} \leq \varrho(x_2, x_1)\gamma^{n_0-1}\frac{1}{1-\gamma} < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Posloupnost je tedy cauchyovská. Z úplnosti prostoru P dostaneme, že existuje $x \in P$ tak, že $x_n \to x$. Ukážeme, že $T(x_n) \to T(x)$. K tomu nejprve dokážeme, že T je spojité zobrazení v x. K $\varepsilon > 0$ zvolme $\delta = \varepsilon$. Pak $\forall y \in B(x, \delta)$ platí, že pokud $\varrho(x, y) < \delta$, pak:

$$\varrho(T(x), T(y)) \leq \gamma\varrho(x, y) < \gamma\delta < \varepsilon.$$

Nyní podle Heineho věty máme, že pokud $x_n \to x$, tak $T(x_n) \to T(x)$. Dále víme, že $x_{n+1} = T(x_n)$. Tím pádem platí:

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} T(x_n) \Rightarrow x = T(x).$$

x je tedy pevný bod zobrazení. Zbývá dokázat jednoznačnost. Nechť existují x, y takové, že $T(x) = x$ a $T(y) = y$. Pak:

$$\varrho(x, y) = \varrho(T(x), T(y)) \leq \gamma\varrho(x, y) \xrightarrow[\gamma>0]{\varrho(x,y)\geq 0} \varrho(x, y) = 0 \Rightarrow x = y.$$

Tím je důkaz hotov. □

Věta 8.32 (O převodu na integrální tvar)**.** Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je otevřený interval, $x_0 \in I$, $f\colon I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitá a $y\colon I \to \mathbb{R}$ je také spojitá. Pak y je řešení obyčejné diferenciální rovnice $y'(x) = f(x, y(x))$ na I s počáteční podmínkou $y(x_0) = y_0$ právě tehdy, když $y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y(s))\,\mathrm{d}s$ $\forall x \in I$.

Důkaz. Dokážeme postupně jednotlivé implikace:

1. Pravá implikace: Víme, že $y'(s) = f(s, y(s))$, a tedy je y' spojitá. Můžeme ji integrovat následujícím způsobem:

$$y(x) - y_0 = y(x) - y(x_0) = \int_{x_0}^x y'(s)\,\mathrm{d}s = \int_{x_0}^x f(s, y(s))\,\mathrm{d}s.$$

   Z toho ihned vidíme, že $y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y(s))\,\mathrm{d}s$.

2. Levá implikace: Víme, že $y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))\,\mathrm{d}s$. Funkce $f(s, y(s))$ je spojitá. Lze využít věty o derivaci podle horní meze a dostaneme:
$$y'(x) = 0 + f(x, y(x)).$$
Ověříme počáteční podmínku:
$$y(x_0) = y_0 + \int_{x_0}^{x_0} f(s, y(s))\,\mathrm{d}s = y_0.$$
Počáteční podmínka platí.

Věta je tímto dokázána. □

Věta 8.33 (Picardova věta)**.** Nechť $I \subset \mathbb{R}^2$ je otevřený interval a $[x_0, y_0] \in I$. Nechť $f\colon I \to \mathbb{R}$ je spojitá a lokálně lipschitzovská vůči y. Pak existuje $B(x_0, \delta)$ a funkce y definovaná na $B(x_0, \delta)$ tak, že $\forall x \in B(x_0, \delta)$ máme $y'(x) = f(x, y(x))$ s počáteční podmínkou $y(x_0) = y_0$. Navíc y je jediné řešení na $B(x_0, \delta)$.

Důkaz. Zvolme $\delta > 0$ a $\Delta > 0$, aby $[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \times [y_0 - \Delta, y_0 + \Delta] \subset I$. Definujme $X = \{y \in \mathcal{C}([x_0 - \delta, x_0 + \delta])\colon y(x) \in [y_0 - \Delta, y_0 + \Delta]\}$. Definujme operátor $T\colon \mathcal{C}([x_0 - \delta, x_0 + \delta]) \to \mathcal{C}([x_0 - \delta, x_0 + \delta])$ následovně:
$$T[y](x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))\,\mathrm{d}s.$$
Uveďme zcela klíčové pozorování: y je řešení této rovnice právě tehdy, když $T[y] = y$. Důkaz dále rozdělíme na několik kroků:

1. Nejprve dokážeme, že X je úplný. X je uzavřená podmnožina $\mathcal{C}([x_0 - \delta, x_0 + \delta])$, protože $X = B(y_0, \Delta) = \{y, \varrho(y, y_0) \leq \Delta\}$ je uzavřená koule. Nechť $y_n \in X$ je cauchyovská posloupnost. Víme, že $\mathcal{C}([a, b])$ je úplný metrický prostor, takže y_n je cauchyovská v úplném prostoru $\mathcal{C}([x_0 - \delta, x_0 + \delta])$. Tedy existuje $y \in \mathcal{C}([x_0 - \delta, x_0 + \delta])$ tak, že $y_n \to y$. Z toho, že $y_n \to y$ a X je uzavřená množina můžeme psát, že $y \in X$ a X je tím pádem úplný.

2. Nechť máme pevné $\delta > 0$ a $\Delta > 0$ tak, že $A_{\delta,\Delta} = [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \times [y_0 - \Delta, y_0 + \Delta] \subset I$. f je spojitá na tomto kompaktu, a tedy existuje $M > 0$ tak, že $|f(x, y)| \leq M$. Z toho, že je funkce lokálně lipschitzovská lze usoudit, že existuje $K > 0$ tak, že $\forall [x, y] \in A_{\delta,\Delta}$ a $\forall [x, \tilde{y}] \in A_{\delta,\Delta}$ platí:
$$|f(x, y) - f(x, \tilde{y})| \leq K|y - \tilde{y}|.$$
Případným zmenšením δ jsme schopni dostat $\delta \leq \left\{\frac{\Delta}{M}, \frac{1}{2K}\right\}$.

3. Nyní dokážeme, že $T\colon X \to X$. Zřejmě:
$$|T[y](x) - y_0| = \left|\int_{x_0}^{x} f(s, y(s))\,\mathrm{d}s\right| \leq M|x - x_0| \leq M\delta = \Delta.$$
Z toho dostáváme, že $T[y](x) \in [y_0 - \Delta, y_0 + \Delta] \Rightarrow T(y) \in X$.

4. Nakonec dokážeme, že T je kontrakce. Nechť $y, \tilde{y} \in X$ a $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$. Pak:

$$\begin{aligned}
|T[y](x) - T[\tilde{y}](x)| &= \left| \int_{x_0}^{x} f(s, y(s)) - f(s, \tilde{y}(s)) \,\mathrm{d}s \right| \\
&\leq \int_{x_0}^{x} |f(s, y(s)) - f(s, \tilde{y}(s))| \,\mathrm{d}s \\
&\leq \int_{x_0}^{x} |K(y(s) - \tilde{y}(s))| \,\mathrm{d}s \leq K|x_0 - x| \sup_{x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]} |y(x) - \tilde{y}(x)| \\
&\leq K\delta\varrho(y, \tilde{y}) \leq \frac{1}{2}\varrho(y, \tilde{y}).
\end{aligned}$$

Jedná se tedy o kontrakci.

Důkaz je hotov. $\square$

9 Funkce více proměnných

9.1 Úvodní definice a spojitost

Definice 9.1. Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$. Funkcí více reálných proměnných rozumíme zobrazení $f\colon M \to \mathbb{R}$. Vektorovou funkcí více reálných proměnných rozumíme zobrazení $f\colon M \to \mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}$.

Definice 9.2. Nechť $x = [x_1, \dots, x_n] \in \mathbb{R}^n$ a $y = [y_1, \dots, y_n] \in \mathbb{R}^n$. Uvažujeme euklidovskou metriku:

$$\|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}.$$

Připomeňme definici koule:

$$B(c, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \|x - c\| < r\}.$$

Prstencovým okolím bodu c rozumíme $P(c, r) = B(c, r) \setminus \{c\}$.

Definice 9.3. Nechť $f\colon G \to \mathbb{R}$, kde $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina. Řekneme, že f má v bodě $a \in G$ limitu rovnou $A \in \mathbb{R}^*$, jestliže platí:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in P(a, \delta)\colon f(x) \in B(A, \varepsilon).$$

Značíme $\lim_{x \to a} f(x) = A$. Řekneme, že f je spojitá v a, jestliže $\lim_{x \to a} = f(a)$. Limitu a spojitost vektorové funkce $f = [f_1, \dots, f_n]\colon G \to \mathbb{R}^n$ definujeme po složkách, tedy:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \left[\lim_{x \to a} f_1(x), \dots, \lim_{x \to a} f_n(x)\right].$$

Poznámka. Bez důkazu budeme uvažovat následující věty: aritmetika limit, věta o limitě vložené funkce, spojitost složené funkce a věta o limitě složené funkce.

Definice 9.4. Nechť $x_j \in \mathbb{R}^n$. Pak $\lim_{j \to \infty} x_j = a \in \mathbb{R}^n$ právě tehdy, když platí:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0\colon \|x_n - a\| < \varepsilon.$$

Poznámka. Konvergence posloupnosti bodů $x_j = [(x_j)_1, \dots, (x_j)_n] \subset \mathbb{R}^n$ je ekvivalentní konvergenci po složkách, tedy:

$$\lim_{j \to \infty} x_j = \left[\lim_{j \to \infty} (x_j)_1, \dots, \lim_{j \to \infty} (x_j)_n\right].$$

Toto tvrzení můžeme snadno dokázat. Pravá implikace je snadná. $\forall \varepsilon$ existuje $j_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $\forall j \geq j_0$ a $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ platí:

$$|(x_j)_i - a_i| \leq \sqrt{((x_j)_1 - a_1)^2 + \dots + ((x_j)_n - a_n)^2} = \|x_j - a\| < \varepsilon.$$

Nyní dokážeme levou implikaci. $\forall \varepsilon > 0$ najdeme $j_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $\forall j \geq j_0$ platí $|(x_j)_i - a_i| < \varepsilon$, a sice $\forall i \in \{1, \dots, n\}$. Vezmeme $j = \max\{j_1, \dots, j_n\}$. Pak $\forall j \geq j_0$ platí:

$$\|x_j - a\| = \sqrt{((x_j)_1 - a_1)^2 + \dots + ((x_j)_n - a_n)^2} \leq \sqrt{n\varepsilon^2} = \sqrt{n}\varepsilon,$$

a tedy $x_j \to a$.

Následující větu je možné dokázat analogicky Heineho věty v předchozí kapitole:

Věta 9.5 (Heineho věta)**.** Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, $a \in G$, $A \in \mathbb{R}^*$ a $f\colon G \to \mathbb{R}$. Pak následující podmínky jsou ekvivalentní:

1. $\lim_{x\to a} f(x) = A$.
2. Pro každou posloupnost $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$ splňující $x_j \in G \setminus \{a\}$ a $\lim_{j\to\infty} x_j = a$ platí:
$$\lim_{j\to\infty} f(x_j) = A.$$

9.2 Parciální derivace a totální diferenciál

Definice 9.6. Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, $i \in \{1, \dots, n\}$, $f\colon G \to \mathbb{R}$ a $x \in G$. Parciální derivací funkce f v bodě x podle i-té proměnné nazveme:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_1, \dots, x_i + t, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(x + t\mathbf{e}_i) - f(x)}{t},$$

pokud tato limita existuje.

Definice 9.7. Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$, $f\colon M \to \mathbb{R}$ a $x_0 \in M$. Řekneme, že f nabývá v bodě x_0 svého minima vzhledem k M, pokud $\forall x \in M$ platí $f(x) \geq f(x_0)$. Řekneme, že f nabývá v bodě x_0 svého lokálního minima vzhledem k M, pokud existuje $\delta > 0$ tak, že $\forall x \in M \cap B(x_0, \delta)$ platí $f(x) \geq f(x_0)$. Analogicky definujeme maximum a lokální maximum.

Věta 9.8 (Nutná podmínka existence extrému)**.** Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, $i \in \{1, \dots, n\}$, $a \in G$ a $f\colon G \to \mathbb{R}$. Má-li f v bodě a lokální minimum (maximum) a existuje-li $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$, pak $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$.

Důkaz. Položme $h(t) = f(a + t\mathbf{e}_i)$. Pak h je definovaná na okolí nuly. f má v a extrém, a tedy h má v 0 extrém. Dále:

$$h'(0) = \lim_{t\to 0} \frac{h(t) - h(0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(a + t\mathbf{e}_i) - f(a)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a),$$

a tím pádem $h'(0)$ existuje. Podle Fermatovy věty je $h'(0) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$. □

Definice 9.9. Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, $f\colon G \to \mathbb{R}$, $x \in G$ a $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$. Derivací funkce f v bodě x ve směru v nazveme:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x + tv) - f(x)}{t},$$

jestliže limita existuje.

Definice 9.10. Nechť G je otevřená, $f\colon G \to \mathbb{R}$ a $a \in G$. Řekneme, že lineární zobrazení $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je totální diferenciál funkce f v bodě a, jestliže platí:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a + h) - f(a) - L(h)}{\|h\|} = 0.$$

Značíme $Df(a)$ a hodnotu v bodě $h \in \mathbb{R}^n$ značíme $Df(a)(h)$.

Poznámka. Uveďme následující poznámky:

1. Lineární zobrazení $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ lze reprezentovat následovně:
$$L(h) = A_1 h_1 + A_2 h_2 + \cdots + A_n h_n,$$
kde $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$ platí $A_i \in \mathbb{R}$.

2. Totální diferenciál můžeme ekvivalentně definovat také takto:
$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - L(x-a)}{\|x-a\|} = 0.$$

3. Geometrickým významem je, že funkce $f(a) + L(x-a)$ je velmi blízko původní funkci f na okolí bodu a.

Věta 9.11 (O tvaru totálního diferenciálu)**.** Nechť G je otevřená, $a \in G$ a $f\colon G \to \mathbb{R}$. Nechť existuje totální diferenciál funkce f v bodě a. Pak existují parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ a $\forall h \in \mathbb{R}^n$ platí:
$$Df(a)(h) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)h_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)h_n.$$
Navíc pro $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$ platí $\frac{\partial f}{\partial v}(a) = Df(a)(v)$.

Důkaz. Víme, že $\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)-L(h)}{\|h\|} = 0$. Toto platí speciálně pro $h = t\mathbf{e}_i$, $i \in \{1, \ldots, n\}$. Označme $L(h) = A_1 h_1 + \cdots + A_n h_n$. Pak platí:
$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{t\to 0} \frac{f(a+t\mathbf{e}_i) - f(a) - A_i t}{|t|} = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+t\mathbf{e}_i) - f(a) - A_i t}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{f(a+t\mathbf{e}_i) - f(a)}{t} - A_i. \end{aligned}$$
Z toho dostaneme, že existuje $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = A_i$. Nyní nechť $h = tv$. Pak:
$$0 = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+tv) - f(a) - tL(v)}{|t|\|v\|} = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t} - L(v),$$
protože to, že se limita rovná nule nezáleží na velikosti vektoru v. Nakonec dostaneme, že existuje $\frac{\partial f}{\partial v}(a) = L(v) = Df(a)(v)$. □

Definice 9.12. Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, $f\colon G \to \mathbb{R}$ a $a \in G$. Nechť f má v bodě a totální diferenciál. Pak definujeme gradient funkce f v bodě a jako vektor:
$$\nabla f(a) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right].$$
Můžeme psát $Df(a)(h) = \langle \nabla f(a), h\rangle$.

Věta 9.13 (Geometrický význam gradientu)**.** Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, $a, v \in G$ a $f\colon G \to \mathbb{R}$. Nechť existuje derivace f v bodě a ve směru v. Pak platí:
$$\max\left\{\frac{\partial f}{\partial v}(a), \|v\| = 1\right\} = \|\nabla f(a)\|.$$

Důkaz. Z předchozí věty a Cauchyovy nerovnosti snadno dostaneme:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = Df(a)(v) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) v_i \leq \sqrt{\sum_{n=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\right)^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} v_i^2} = \|\nabla f(a)\| \|v\|.$$

Položme $v = \frac{\nabla f(a)}{\|\nabla f(a)\|}$, pak $\|v\| = 1$. Nyní:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)}{\|\nabla f(a)\|} = \frac{\|\nabla f(a)\|^2}{\|\nabla f(a)\|} = \|\nabla f(a)\|.$$

Tím jsme větu dokázali. □

Poznámka. Nechť existuje totální diferenciál f v bodě a. Pak:

$$|Df(a)(h)| = |\langle \nabla f(a), h \rangle| \leq \|\nabla f(a)\| \|h\|.$$

Věta 9.14 (O vztahu spojitosti a totálního diferenciálu)**.** Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, $a \in G$ a $f\colon G \to \mathbb{R}$. Nechť existuje totální diferenciál f v bodě a. Pak je f v bodě a spojitá.

Důkaz. Snadno se přesvědčíme výpočtem:

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} f(a+h) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - Df(a)(h)}{\|h\|} \|h\| + f(a) + Df(a)(h) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - Df(a)(h)}{\|h\|} \lim_{h\to 0} \|h\| + \lim_{h\to 0} f(a) + \lim_{h\to 0} Df(a)(h) \\
&= f(a).
\end{aligned}$$

Funkce je tedy v bodě a spojitá. □

Věta 9.15 (Postačující podmínka pro existenci totálního diferenciálu)**.** Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, $a \in G$ a $f\colon G \to \mathbb{R}$. Nechť f má v bodě a spojité parciální derivace, tedy funkce $x \to \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$, $j = 1, \ldots, n$, jsou spojité v a. Pak $Df(a)$ existuje.

Věta 9.16 (O aritmetice totálního diferenciálu)**.** Nechť $a \in \mathbb{R}^n$, $f, g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a $Df(a)$, $Dg(a)$ existují. Pak existují i $D(f+g)(a)$, $D(cf)(a)$, $D(fg)(a)$ a $D\left(\frac{f}{g}\right)(a)$, jestliže $g(a) \neq 0$. Navíc platí:

1. $D(f+g)(a) = Df(a) + Dg(a)$.
2. $D(cf)(a) = cDf(a)$, $c \in \mathbb{R}$.
3. $D(fg)(a) = f(a)Dg(a) + Df(a)g(a)$.
4. Je-li $g(a) \neq 0$, pak $D\left(\frac{f}{g}(a)\right) = \frac{Df(a)g(a) - f(a)Dg(a)}{g^2(a)}$.

Důkaz. Dokážeme pouze třetí tvrzení. $f(a)Dg(a) + Df(a)g(a)$ je lineární zobrazení. Pak platí:

$$\lim_{h\to 0} \frac{\begin{aligned} f(a+h)g(a+h) - f(a)g(a) - f(a)Dg(a)(h) - Df(a)(h)g(a) \\ - f(a+h)g(a) + f(a+h)g(a) \end{aligned}}{\|h\|}$$
$$= \lim_{h\to 0} g(a)\frac{f(a+h) - f(a) - Df(a)(h)}{\|h\|} + \lim_{h\to 0} f(a+h)\frac{g(a+h) - g(a) - Dg(a)(h)}{\|h\|}$$
$$+ \lim_{h\to 0} \frac{(f(a+h) - f(a))Dg(a)(h)}{\|h\|} = 0,$$

protože:

$$0 \le |f(a+h) - f(a)| \left| \frac{Dg(a)(h)}{\|h\|} \right| \le |f(a+h) - f(a)| \frac{\|\nabla g(a)\| \|h\|}{\|h\|} \xrightarrow{h\to 0} 0.$$

Tím jsme dokončili důkaz třetího tvrzení. □

Definice 9.17. Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, $f\colon G \to \mathbb{R}^k$ a $a \in G$. Řekneme, že lineární zobrazení $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ je derivací funkce f v bodě a, jestliže platí:

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|f(a+h) - f(a) - L(h)\|}{\|h\|} = 0.$$

Značíme $Df(a)$ a hodnotu v $h \in \mathbb{R}^n$ značíme $Df(a)(h)$.

Poznámka. Nechť $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ je lineární zobrazení. Potom existuje právě jedna $n \times k$ matice A tak, že $L(h) = Ah$. Dále existence $Df(a)$ znamená, že $f(a) + Df(a)(x-a)$ je blízko $f(x)$ v okolí bodu a.

Věta 9.18 (Reprezentace derivace maticí)**.** Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená a $f = [f_1, \dots, f_k]\colon G \to \mathbb{R}^k$ má derivaci v bodě $a \in G$. Pak $Df(a)$ je reprezentováno maticí:

$$Df(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_k}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

Důkaz. Víme, že platí:

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|f(a+h) - f(a) - Df(a)(h)\|}{\|h\|} = 0.$$

V první složce dostaneme:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f_1(a+h) - f_1(a) - (Df(a))_1(h)}{\|h\|} = 0.$$

Tedy f_1 má totální diferenciál v bodě a. Ten můžeme psát takto:

$$(Df(a)))_1(h) = \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a)h_1 + \dots + \frac{\partial f_1}{x_n}(a)h_n.$$

Tuto samou vlastnost bychom dostali i pro ostatní složky. Z toho snadno dostaneme matici výše. □

Poznámka. Uvedeme několik poznámek:

1. Matice $Df(a)$ se nazývá Jakobiho matice. Pokud $k = n$, tak se determinant této matice nazývá jakobián a značí se $J_f(a)$.

2. Derivace $Df(a)$ existuje právě tehdy, když existují všechny totální diferenciály $Df_1(a), \ldots, Df_k(a)$.

3. Z předchozího bodu a věty o postačující podmínce pro existenci totálního diferenciálu dostáváme, že jsou-li všechny parciální derivace spojité v bodě a, tak existuje derivace $Df(a)$.

Poznámka. Nechť $L = Ah\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ je lineární zobrazení reprezentované maticí A. Pak existuje $C > 0$ tak, že $\|Ah\| \leq C\|h\|$. Toto tvrzení můžeme snadno dokázat:

$$\begin{aligned}\|Ah\| &= \left\| \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \ldots & a_{kn} \end{pmatrix} \right\| \left\| \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} \right\| \\ &= \sqrt{(a_{11}h_1 + \cdots + a_{1n}h_n)^2 + \cdots + (a_{k1}h_1 + \cdots + a_{kn}h_n)^2} \\ &\leq \sqrt{(|a_{11}| + \cdots + |a_{1n}|)^2 + \cdots + (|a_{k1}| + \cdots + |a_{kn}|)^2}\|h\|.\end{aligned}$$

Zvolíme $C = \sqrt{(|a_{11}| + \cdots + |a_{1n}|)^2 + \cdots + (|a_{k1}| + \cdots + |a_{kn}|)^2}$ a tvrzení platí.

Lemma. Nechť $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ má derivaci v bodě $a \in \mathbb{R}^n$. Pak existuje $\delta_0 > 0$ a $C > 0$ tak, že $\forall h \in B(0, \delta_0)$ platí $\|f(a+h) - f(a)\| \leq C\|h\|$.

Důkaz. Z $\lim_{h\to 0} \frac{\|f(a+h)-f(a)-Df(a)(h)\|}{\|h\|}$ existuje $\delta_0 > 0$ tak, že $\forall h \in B(0, \delta_0)$ platí:

$$\frac{\|f(a+h) - f(a) - Df(a)(h)\|}{\|h\|} < 1.$$

Dále:

$$\begin{aligned}\|f(a+h) - f(a)\| &= \left\| \frac{f(a+h) - f(a) - Df(a)(h)}{\|h\|}\|h\| + Df(a)(h) \right\| \\ &\leq \|h\| + \|Df(a)(h)\| \leq (1 + \tilde{C})\|h\|,\end{aligned}$$

protože z předchozí poznámky máme $\|Ah\| \leq \tilde{C}\|h\|$. Položíme $C = 1 + \tilde{C}$ a důkaz je hotov. □

Věta 9.19 (Derivace složeného zobrazení)**.** Nechť $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, $g\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^s$, f má derivace v bodě $a \in \mathbb{R}^n$ a g má derivaci v bodě $b = f(a) \in \mathbb{R}^k$. Pak existuje derivace složeného zobrazení $D(g \circ f)(a)$ a platí:

$$D(g \circ f)(a) = Dg(b)Df(a) = Dg(f(a))Df(a).$$

Důkaz. Podle lemmatu existuje $\delta_0 > 0$ a $C > 0$ tak, že $\forall h \in B(0, \delta_0)$ platí:

$$\|f(a+h) - f(a)\| \leq C\|h\|.$$

Nechť $\varepsilon > 0$. Z definice $Dg(b)$ existuje $\eta > 0$ tak, že $\forall y \in B(0, \eta)$ platí:

$$\|g(b+y) - g(b) - Dg(b)(y)\| < \varepsilon\|y\|.$$

Z definice $Df(a)$ existuje $\delta > 0$, $\delta < \delta_0$, $\delta < \frac{\eta}{C}$, tak, že $\forall h \in B(0, \delta)$ platí:

$$\|f(a+h) - f(a) - Df(a)(h)\| < \varepsilon\|h\|.$$

Nyní $\forall h \in B(0, \delta)$ zřejmě:

$$\|f(a+h) - f(a)\| \leq C\|h\| \leq C\delta \leq \eta.$$

Položme $y = f(a+h) - f(a)$. Pak:

$$\|g(b + f(a+h) - f(a)) - g(b) - Dg(b)(f(a+h) - f(a))\| \leq \varepsilon\|f(a+h) - f(a)\| \leq \varepsilon C\|h\|.$$

Dále:

$$\|Dg(b)(f(a+h) - f(a)) - Dg(b)Df(a)(h)\| \leq \tilde{C}\|f(a+h) - f(a) - Df(a)(h)\| \leq \varepsilon\tilde{C}\|h\|.$$

Celkem:

$$\begin{aligned}
&\frac{\|g(f(a+h)) - g(f(a)) - Dg(b)Df(a)(h)\|}{\|h\|} \\
&\leq \frac{\|g(b + f(a+h) - f(a)) - g(f(a)) - Dg(b)(f(a+h) - f(a))\|}{\|h\|} \\
&+ \frac{\|Dg(b)(f(a+h) - f(a)) - Dg(b)Df(a)(h)\|}{\|h\|} \leq \varepsilon C + \varepsilon\tilde{C} = \varepsilon(C + \tilde{C}).
\end{aligned}$$

Věta je tímto dokázána. □

Věta 9.20 (Řetízkové pravidlo)**.** Nechť $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ má derivaci v bodě $a \in \mathbb{R}^n$ a $g\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ má totální diferenciál v bodě $b = f(a) = [f_1(a), \ldots, f_k(a)]$. Pak funkce $h(x) = g(f_1(x), \ldots, f_k(x))$ z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$ má totální diferenciál v a a platí:

$$\frac{\partial h}{\partial x_i}(a) = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial g}{\partial y_j}(b)\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a).$$

Důkaz. Podle minulé věty dostáváme:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial h}{\partial x_1}(a), \ldots, \frac{\partial h}{\partial x_n}(a)\right) &= Dh(a) = Dg(b)Df(a) \\
&= \left(\frac{\partial g}{\partial y_1}(b), \ldots, \frac{\partial g}{\partial y_k}(b)\right) \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1}(a) & \ldots & \frac{\partial f_k}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Snadno bychom dopočetli a dostali výslednou sumu. □

Věta 9.21 (O přírustku funkce)**.** Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená a $f\colon G \to \mathbb{R}$ má totální diferenciál v každém bodě G. Nechť $a, b \in G$ a nechť úsečka L spojující body a a b je obsažena v G, tedy $\{(1-t)a + tb, t \in [0,1]\} \subset G$. Pak existuje $\xi \in L$ tak, že $f(b) - f(a) = Df(\xi)(b-a)$.

Důkaz. Položme $F(t) = f(a + t(b-a)) = f(a_1 + t(b_1 - a_1), \ldots, a_n + t(b_n - a_n))$. Podle Lagrangeovy věty existuje $\eta \in (0,1)$ tak, že platí:

$$f(b) - f(a) = F(1) - F(0) = F'(\eta).$$

Položme $\xi = a + \eta(b-a)$. Podle řetízkového pravidla dostaneme:

$$f(b) - f(a) = \frac{\partial F}{\partial t}(\eta) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\xi)\,(b_i - a_i) = Df\,(\xi)\,(b-a).$$

Tím jsme větu dokázali. □

9.3 Parciální derivace vyšších řádů

Definice 9.22. Nechť f má na otevřené množině $G \subset \mathbb{R}^n$ parciální derivaci $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $i \in \{1, \ldots, n\}$. Pak definujeme pro $a \in G$ a $j \in \{1, \ldots, n\}$ druhou parciální derivaci:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(a),\ \ i \neq j,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(a).$$

Analogicky definujeme parciální derivace vyšších řádů.

Definice 9.23. Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená a $f\colon G \to \mathbb{R}$. Řekneme, že $f \in \mathcal{C}^1(G)$, pokud existují parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $i \in \{1, \ldots, n\}$ a jsou to spojité funkce na G. Řekneme, že $f \in \mathcal{C}^k(G)$, $k \in \mathbb{N}$, pokud existují všechny parciální derivace f až do řádu k včetně a jsou to spojité funkce.

Důsledek. Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená. Z věty o postačující podmínce pro existenci totálního diferenciálu dostáváme, že je-li $f \in \mathcal{C}^1(G)$, pak existuje totální diferenciál funkce f na G.

Věta 9.24 (Záměnnost parciálních derivací)**.** Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, $a \in G$ a $f \in \mathcal{C}^2(G)$ a $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Pak:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a).$$

Definice 9.25. Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená a $a \in G$. Nechť $f \in \mathcal{C}^2(G)$. Definujeme Hessovu matici funkce f jako:

$$D^2 f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a) \end{pmatrix}$$

Matice je symetrická, a proto můžeme pracovat s následující bilineární formou:

$$D^2 f(a)(u, v) = u^T D^2 f(a) v \ \forall u, v \in \mathbb{R}^n.$$

Definice 9.26. Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená a $a \in G$. Nechť $f \in \mathcal{C}^2(G)$. Pak definujeme Taylorův polynom druhého stupně následovně:

$$T_2^{f,a}(x) = f(a) + Df(a)(x-a) + \frac{1}{2} D^2 f(a)(x-a, x-a).$$

Věta 9.27 (Tayolorova věta pro druhý řád)**.** Nechť $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je třídy $\mathcal{C}^2$ na okolí bodu $a \in \mathbb{R}^n$. Pak platí:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - T_2^{f,a}(x)}{\|x-a\|^2} = 0.$$

Poznámka. Lze definovat i Taylorovy polynomy řádu k pomocí k-tých parciálích derivací, které pro $f \in \mathcal{C}^k$ dobře aproximují funkce f.

Věta 9.28 (O pozitivně definitní kvadratické formě)**.** Nechť $Q\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je pozitivně definitní kvadratická forma. Potom existuje $\varepsilon > 0$ tak, že $\forall h \in \mathbb{R}^n$ platí:

$$Q(h, h) \geq \varepsilon \|h\|^2.$$

Důkaz. Funkce $A(h) = Q(h, h) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} h_i h_j$ je spojitá. Množina $M = \{h \in \mathbb{R}^n\colon \|h\| = 1\}$ je omezená a uzavřená, a tedy kompaktní. Funkce $A(h)$ tedy nabývá na M svého minima v bodě h_0. Označme $\varepsilon = Q(h_0, h_0) > 0$. Nyní $\forall h \in \mathbb{R}^n$ platí:

$$Q(h, h) = Q\left(\frac{h}{\|h\|}\|h\|, \frac{h}{\|h\|}\|h\|\right) = \|h\|^2 Q\left(\frac{h}{\|h\|}, \frac{h}{\|h\|}\right) \geq \|h\|^2 Q(h_0, h_0) = \|h\|^2 \varepsilon.$$

Tím je důkaz hotov. □

Věta 9.29 (Postačující podmínka pro lokální extrém)**.** Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina, $a \in G$ a nechť $f \in \mathcal{C}^2(G)$. Nechť $Df(a) = 0$.

1. Je-li $D^2 f(a)$ pozitivně definitní, pak a je bod lokálního minima.
2. Je-li $D^2 f(a)$ negativně definitní, pak a je bod lokálního maxima.
3. Je-li $D^2 f(a)$ indefinitní, pak v a není extrém.

Důkaz. Nejprve dokážeme první bod věty. Z předchozí věty plyne, že existuje $\varepsilon > 0$ tak, že $\forall h \in \mathbb{R}^n$ platí $D^2 f(a)(h, h) \geq \varepsilon \|h\|^2$. Podle Taylorovy věty pro druhý řád platí:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - Df(a)(x-a) - \frac{1}{2} D^2 f(a)(x-a, x-a)}{\|x-a\|^2} = 0.$$

K zadanému $\varepsilon > 0$ nalezneme $\delta > 0$ tak, že $\forall x \in P(a, \delta)$ platí:

$$\frac{f(x) - f(a) - Df(a)(x-a) - \frac{1}{2} D^2 f(a)(x-a, x-a)}{\|x-a\|^2} > -\frac{1}{4}\varepsilon.$$

Dále $Df(a) = 0$ dle předpokladu věty. Odtud:

$$f(x) - f(a) - \frac{1}{2}D^2 f(a)(x-a, x-a) > -\frac{1}{4}\varepsilon\|x-a\|^2.$$

Odtud snadno dostaneme:

$$\begin{aligned} f(x) &> f(a) + \frac{1}{2}D^2 f(a)(x-a, x-a) - \frac{1}{4}\varepsilon\|x-a\|^2 \\ &\geq f(a) + \frac{1}{2}\varepsilon\|x-a\|^2 - \frac{1}{4}\varepsilon\|x-a\|^2 > f(a). \end{aligned}$$

Dostáváme, že v a je skutečně lokální minimum. Analogicky bychom dokázali druhý bod věty. Dokážeme tedy třetí. Nechť $D^2 f(a)$ je indefinitní. To znamená, že existují $h_1, h_2 \in \mathbb{R}^n$ tak, že $D^2 f(a)(h_1, h_1) > 0$ a $D^2 f(a)(h_2, h_2) < 0$. Uvažme funkci $\varphi(t) = f(a + th_1)$. Pak dle řetízkového pravidla:

$$\varphi'(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a + th_1)(h_1)_i = Df(a + th_1)h_1 \Rightarrow \varphi'(0) = Df(a)h_1 = 0,$$

protože $Df(a) = 0$. Analogicky $\varphi''(t) = D^2 f(a+th_1)(h_1, h_1)$. Opět dosádíme a dostaneme $\varphi''(0) = D^2 f(a)(h_1, h_1) > 0$. Tedy φ má v $t = 0$ lokální minimum. Analogicky pro $\psi(t) = f(a + th_2)$. Jistě $\psi'(0) = Df(a)(h_2) = 0$. Navíc $\psi''(0) = D^2 f(a)(h_2, h_2) < 0$. Z toho dostáváme, že ψ má v 0 lokální maximum. Nakonec tedy máme, že f nemá v a lokální extrém. $\square$

9.4 Implicitní funkce

Věta 9.30 (O implicitní funkci)**.** Nechť $p \in \mathbb{N}$, $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ je otevřená množina, $F \colon G \to \mathbb{R}$, $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$, $\tilde{y} \in \mathbb{R}$, $[\tilde{x}, \tilde{y}] \in G$ a nechť platí:

1. $F \in \mathcal{C}^p(G)$.
2. $F(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0$.
3. $\frac{\partial f}{\partial y}(\tilde{x}, \tilde{y}) \neq 0$.

Pak existuje okolí $U \in \mathbb{R}^n$ bodu $\tilde{x}$ a okolí $V \in \mathbb{R}$ bodu $\tilde{y}$ tak, že $\forall x \in U$ existuje právě jedno $y \in V$ s vlastností $F(x, y) = 0$. Píšeme-li $y = \varphi(x)$, pak $\varphi \in \mathcal{C}^p(U)$ a $\forall x \in U$ a $\forall j = 1, \dots, n$ platí:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_j}(x, \varphi(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, \varphi(x))}.$$

Důkaz. Důkaz rozdělíme do čtyř kroků. Nejprve dokážeme, že funkce φ existuje. Následně její spojitost a fakt, že φ je třídy $\mathcal{C}^1$. Nakonec indukcí ukážeme, že φ je dokonce třídy $\mathcal{C}^p$.

1. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $\frac{\partial F}{\partial y}(\tilde{x}, \tilde{y}) > 0$. F je třídy $\mathcal{C}^1$, a tedy existuje $\delta_1 > 0$ a $\xi_1 > 0$ tak, že $\forall x \in B(\tilde{x}, \delta_1)$ a $\forall y \in B(\tilde{y}, \xi_1)$ platí $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) > 0$. Speciálně $\forall y \in B(\tilde{y}, \xi_1)$ je $\frac{\partial F}{\partial y}(\tilde{x}, y) > 0$. Z toho dostáváme, že funkce $y \to F(\tilde{x}, y)$

je rostoucí, a tím pádem $F(\tilde{x}, \tilde{y} + \xi_1) > 0$ a $F(\tilde{x}, \tilde{y} - \xi_1) < 0$, protože $F(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0$. Nalezneme $\delta_2 < \delta_1$ tak, že $\forall x \in B(\tilde{x}, \delta_2)$ platí $F(x, \tilde{y} + \xi_1) > 0$ a $F(x, \tilde{y} - \xi_1) < 0$. Položme $U = B(\tilde{x}, \delta_2)$ a $V = B(\tilde{y}, \xi_1)$. Nechť $x \in B(x_2, \delta_2)$ je libovolné pevné. Víme, že $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) > 0$, a tedy $y \to F(x, y)$ je rostoucí a spojitá. Dále $F(x, \tilde{y} + \xi_1) > 0$ a $F(x, \tilde{y} - \xi_1) < 0$. Podle Darbouxovy věty o nabývání mezihodnot tedy existuje právě jedno $y \in (\tilde{y} - \xi_1, \tilde{y} + \xi_1)$ tak, že $F(x, y) = 0$. Označme nakonec $y = \varphi(x)$.

2. Nyní se podíváme na spojitost funkce φ. Nechť $\varepsilon > 0$ a $\varepsilon < \xi_1$. Využijeme předchozí části důkazu na funkci F a na $G^* = U \times (\tilde{y} - \varepsilon, \tilde{y} + \varepsilon)$. Dostaneme, že existuje U^* okolí $\tilde{x}$ a V^* okolí $\tilde{y}$ tak, že $\forall x \in U^*$ existuje právě jedno $y \in V^*$ tak, že $F(x, y) = 0$. Speciálně $\varphi(U^*) \subset V^* \subset (\tilde{y} - \varepsilon, \tilde{y} + \varepsilon)$. φ je tedy spojitá funkce.

3. Nyní dokážeme, že φ je třídy $\mathcal{C}^1$. Chceme ukázat, že φ má totální diferenciál v bodě $\tilde{x}$, tedy $\forall \varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že $\forall h \in B(0, \delta) \subset \mathbb{R}^n$ platí:

$$\left\| \varphi(\tilde{x} + h) - \varphi(\tilde{x}) - \sum_{i=1}^{n} -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(\tilde{x}, \varphi(\tilde{x}))}{\frac{\partial F}{\partial y}(\tilde{x}, \varphi(\tilde{x}))} h_i \right\| < \varepsilon \sum_{i=1}^{n} \|h_i\|.$$

Tuto nerovnost označíme pomocí $(*)$. Zvolme $\varepsilon > 0$ tak, aby $\frac{\varepsilon}{\frac{\partial F}{\partial y}}(\tilde{x}, \tilde{y}) < \frac{1}{2}$. Víme, že F má v $[\tilde{x}, \tilde{y}] \in \mathbb{R}^{n+1}$ totální diferenciál. Tím pádem existuje $\delta > 0$ tak, že $\forall h \in B(0, \delta) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ platí:

$$\left\| F(\tilde{x} + \tilde{h}, \tilde{y} + h_{n+1}) - F(\tilde{x}, \tilde{y}) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i}(\tilde{x}, \tilde{y}) h_i - \frac{\partial F}{\partial y}(\tilde{x}, \tilde{y}) h_{n+1} \right\| < \varepsilon \sum_{i=1}^{n+1} \|h_i\|,$$

kde $h = [\tilde{h}, h_{n+1}]$ a $\tilde{y} = \varphi(\tilde{x})$. Položme $h = [\tilde{h}, \varphi(\tilde{x} + \tilde{h}) - \varphi(\tilde{x})]$. Pak platí:

$$\begin{aligned} &\left\| F(\tilde{x} + \tilde{h}, \varphi(\tilde{x} + \tilde{h})) - F(\tilde{x}, \tilde{y}) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i}(\tilde{x}, \tilde{y}) h_i - \frac{\partial F}{\partial y}(\tilde{x}, \tilde{y})(\varphi(\tilde{x} + \tilde{h}) - \varphi(\tilde{x})) \right\| \\ &\leq \varepsilon \left(\sum_{i=1}^{n} \|h_i\| + \|\varphi(\tilde{x} + \tilde{h}) - \varphi(\tilde{x})\| \right), \end{aligned}$$

kde $F(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0$ a $F(\tilde{x}+\tilde{h}, \varphi(\tilde{x}+\tilde{h})) = 0$. Výraz přenásobíme $\frac{1}{\frac{\partial F}{\partial y}(\tilde{x}, \tilde{y})}$. Pak dostaneme:

$$\begin{aligned} &\left\| \varphi(\tilde{x} + \tilde{h}) - \varphi(\tilde{x}) - \sum_{i=1}^{n} -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(\tilde{x}, \tilde{y})}{\frac{\partial F}{\partial y}(\tilde{x}, \tilde{y})} h_i \right\| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{\frac{\partial F}{\partial y}(\tilde{x}, \tilde{y})} \left(\sum_{i=1}^{n} \|h_i\| + \|\varphi(\tilde{x} + \tilde{h}) - \varphi(\tilde{x})\| \right). \end{aligned}$$

Tuto nerovnost označme $(**)$. Dále:

$$\begin{aligned}\|\varphi(\tilde{x}+\tilde{h})-\varphi(\tilde{x})\| &\leq \left\|\varphi(\tilde{x}+\tilde{h})-\varphi(\tilde{x})-\sum_{i=1}^{n}-\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(\tilde{x},\tilde{y})}{\frac{\partial F}{\partial y}(\tilde{x},\tilde{y})}h_i\right\|+\left\|\sum_{i=1}^{n}-\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(\tilde{x},\tilde{y})}{\frac{\partial F}{\partial y}(\tilde{x},\tilde{y})}h_i\right\| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{\frac{\partial F}{\partial y}(\tilde{x},\tilde{y})}\left(\sum_{i=1}^{n}\|h_i\|+\|\varphi(\tilde{x}+\tilde{h})-\varphi(\tilde{x})\|\right)+C_1\sum_{i=1}^{n}\|h_i\| \\ &\leq \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}\|h_i\|+\|\varphi(\tilde{x}+\tilde{h})-\varphi(\tilde{x})\|\right)+C_1\sum_{i=1}^{n}\|h_i\|,\end{aligned}$$

kde C_1 je konstanta. Po snadné úpravě dostaneme:

$$\|\varphi(\tilde{x}+\tilde{h})-\varphi(\tilde{x})\| \leq C_2\sum_{i=1}^{n}\|h_i\|,$$

kde C_2 je konstanta. Tuto nerovnost označme $(***)$. Kombinací nerovností $(*)$, $(**)$ a $(***)$ dostaneme to, co jsme chtěli. Tedy platí:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_j}(x,\varphi(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,\varphi(x))}.$$

Odtud vidíme, že φ je třídy $\mathcal{C}^1$.

4. Zbývá dokázat, že φ je třídy $\mathcal{C}^p$. Tento důkaz provedeme indukcí. Pro $p=1$ jsme již důkaz provedli. Dále nechť φ je třídy $\mathcal{C}^{p-1}$ a F třídy $\mathcal{C}^p$. Víme, že platí následující:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_j}(x,\varphi(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,\varphi(x))}.$$

Tento výraz $p-1$ krát zderivujeme. Podle vzorce pro derivaci složené funkce budou na pravé straně derivace F až do řádu p a derivace φ až do řádu $p-1$. Je to tedy spojitá funkce. Levá strana rovnice dá, že φ je třídy $\mathcal{C}^p$.

Tím jsme tuto větu dokázali. □

Poznámka. Je-li F třídy $\mathcal{C}^p$, pak také φ je třídy $\mathcal{C}^p$ a derivace funkce φ spočítáme derivováním vztahu $F(x,\varphi(x))=0$. Tento postup je rychlejší než přímé využití vzorce z předchozí věty.

Věta 9.31 (O implicitních funkcích)**.** Nechť $m,n,p\in\mathbb{N}$, $G\subset\mathbb{R}^{n+m}$ je otevřená, $F_j\colon G\to\mathbb{R}$, $j=1,\dots,m$, $\tilde{x}\in\mathbb{R}^n$, $\tilde{y}\in\mathbb{R}^m$, $[\tilde{x},\tilde{y}]\in G$ a nechť platí:

1. $F_j\in\mathcal{C}^p(G)$ pro $j=1,\dots,m$.

2. $F_j(\tilde{x},\tilde{y})=0$, $F_j(\tilde{x}_1,\dots,\tilde{x}_m,\tilde{y}_1,\dots,\tilde{y}_m)=0$ pro $j=1,\dots,m$.

3. Determinant matice $m \times m$ parciálních derivací F_j je nenulový. Tedy:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(\tilde{x}, \tilde{y}) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m}(\tilde{x}, \tilde{y}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1}(\tilde{x}, \tilde{y}) & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m}(\tilde{x}, \tilde{y}) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Pak existuje okolí $U \subset \mathbb{R}^n$ bodu $\tilde{x}$ a okolí $V \subset \mathbb{R}^m$ bodu $\tilde{y}$ tak, že $\forall x \in U$ existuje právě jedno $y \in V$ tak, že $F_j(x, y) = 0$ pro $j = 1, \dots, m$. Píšeme-li $y_j = \varphi_j(x)$, pak $\varphi_j \in \mathcal{C}^p(U)$ pro $j = 1, \dots, m$.

Věta 9.32 (Lagrangeova věta o vázaných extrémech)**.** Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina, $m < n$, $f, g_1, \dots, g_m \in \mathcal{C}^1(G)$ a mějme množinu $M = \{z \in \mathbb{R}^n \colon g_1(z) = \dots = g_m(z) = 0\}$. Je-li $a \in M$ bodem lokálního extrému funkce f vzhledem k M a vektory $\nabla g_1(a) = \left(\frac{\partial g_1}{\partial z_1}(a), \dots, \frac{\partial g_1}{\partial z_n}(a)\right), \dots, \nabla g_m(a) = \left(\frac{\partial g_m}{\partial z_1}(a), \dots, \frac{\partial g_m}{\partial z_n}(a)\right)$ jsou lineárně nezávislé, pak existují čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ tak, že platí:

$$\nabla f(a) + \lambda_1 \nabla g_1(a) + \dots + \lambda_m \nabla g_m(a) = 0.$$

Neboli:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial z_1}(a) + \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial z_1} + \dots + \lambda_m \frac{\partial g_m}{\partial z_1}(a) = 0, \\ &\vdots \\ &\frac{\partial f}{\partial z_n} + \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial z_m} + \dots + \lambda_m \frac{\partial g_m}{\partial z_n}(a) = 0. \end{aligned}$$

Důkaz. Položme $k = n - m$. Jistě $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m$. Dále můžeme psát $z = [z_1, \dots, z_n] = [x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_m]$, $a = [a_1, \dots, a_n] = [\tilde{x}, \tilde{y}]$, kde $\tilde{x} \in \mathbb{R}^k$ a $\tilde{y} \in \mathbb{R}^m$. Víme, že $\nabla g_1(a), \dots, \nabla g_n(a)$ jsou lineárně nezávislé. Tím pádem můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že platí:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(a) & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial y_1}(a) & \dots & \frac{\partial g_m}{\partial y_m}(a) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Podle věty o implicitních funkcích existuje okolí U $\tilde{x}$ a okolí V $\tilde{y}$ tak, že $\forall x \in U$ existuje právě jedno $y \in V$ tak, že $g_j(x, y) = 0$, $j = 1, \dots, m$. Píšeme $y_j = \varphi_j(x)$, $j = 1, \dots, m$, kde φ_j je třídy $\mathcal{C}^1$. Položme $\psi(x) = f(x_1, \dots, x_k, \varphi_1(x_1, \dots, x_k), \dots, \varphi_m(x_1, \dots, x_k))$, což je třídy $\mathcal{C}^1$. Víme, že f má extrém vzhledem k M. Tedy ψ má extrém v bodě $\tilde{x}$. Tedy $\frac{\partial \psi}{\partial x_j}(\tilde{x}) = 0$, $j = 1, \dots, k$. Využitím řetízkového pravidla dostaneme:

$$0 = \frac{\partial \psi}{\partial x_j}(\tilde{x}) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial f}{\partial z_i}(a) \frac{\partial x_i}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial z_{k+i}}(a) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(\tilde{x}) = 0.$$

Dostáváme:
$$\frac{\partial f}{\partial z_j}(a) + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial z_{k+i}}(a)\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(\tilde{x}) = 0.$$
Tuto rovnost označíme $(*)$. Zderivováním $g_l(x_1, \dots, x_k, \varphi_1(x_1, \dots, x_k), \dots, \varphi_m(x_1, \dots, x_k))$, $l = 1, \dots, m$ dostáváme:
$$\frac{\partial g_l}{\partial z_j}(a) + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial g_l}{\partial z_{l+i}}(a)\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(\tilde{x}) = 0.$$
Tuto rovnost si označíme $(**)$. Dále označme vektory:
$$v_j = \left(0, \dots, \underbrace{1}_{j}, \dots, 0, \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_j}(\tilde{x}), \dots, \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_j}(\tilde{x})\right) \in \mathbb{R}^n,$$
kde $j = 1, \dots, k$. Označme $A = LO\{v_1, \dots, v_k\}$. Jistě $\dim(A) = k$, již prvních k míst tvoří "bázové" vektory. Z toho snadno dostaneme, že $\dim(A^\perp) = n - k = m$. Dle rovnosti $(*)$ platí $\nabla f(a) \in A^\perp$, protože $\langle \nabla f(a), v_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_i}(a) \cdot (v_j)_i = 0$. Analogicky dle $(**)$ je $\nabla g_l(a) \in A^\perp$, $l = 1, \dots, m$. Dále jsou tyto vektory lineárně nezávislé, a tedy tvoří bázi $A^\perp$. Musíme tedy být schopni zapsat $\nabla f(a)$ jako lineární kombinaci prvků $\nabla g_l(a)$. Jistě existují $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ tak, že platí:
$$\nabla f(a) = \sum_{l=1}^{m} \lambda_l \nabla g_l(a).$$
Tím jsme větu dokázali. □

9.5 Regulární zobrazení

Definice 9.33. Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je oteřená a $f\colon G \to \mathbb{R}^n$. Řekneme, že f je difeomorfismus na G, jestliže je f prostá na G, $U = f(G)$ je otevřená v $\mathbb{R}^n$, $f \in \mathcal{C}^1(G)$ a $f^{-1} \in \mathcal{C}^1(U)$.

Definice 9.34. Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená a $f\colon G \to \mathbb{R}^n$. Řekneme, že f je regulární zobrazení, jestliže $f \in \mathcal{C}^1(G)$ a $\forall a \in G$ platí $J_f(a) \neq 0$.

Věta 9.35 (O lokálním difeomorfismu)**.** Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená a $f\colon G \to \mathbb{R}^n$ je třídy $\mathcal{C}^1$. Nechť pro $a \in G$ platí $J_f(a) \neq 0$. Pak existuje $V \subset G$ okolí a takové, že $f|_V$ je difeomorfismus na V.

Důkaz. Definujme $\Omega = \mathbb{R}^n \times G \subset \mathbb{R}^{2n}$ a $F\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$, kde $F(y, x) = f(x) - y \in \mathcal{C}^1$ a $y, x \in \mathbb{R}^n$. Označme $b = f(a)$, pak $F(b, a) = f(a) - b = 0$. Dále:
$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(b,a) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(b,a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1}(b,a) & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n}(b,a) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(a) \end{vmatrix} = J_f(a) \neq 0.$$

Podle věty o implicitních funkcích existuje okolí U_1 bodu b a okolí V_1 bodu a tak, že $\forall y \in U_1$ existuje právě jedno $x \in V_1$ tak, že $F(y,x) = 0 = f(x) - y$. Označme $x = \varphi(y)$, respektive $x_j = \varphi_j(y)$, $j = 1, \ldots, n$. Pak $\varphi \in \mathcal{C}^1(U_1)$. Platí:

$$0 = f(x) - y = f(\varphi(y)) - y \Rightarrow \varphi = f^{-1},$$

kde f^{-1} je třídy $\mathcal{C}^1$. Označme $A = V_1 \cap f^{-1}(U_1)$. Toto je otevřená množina jako vzor otevřené množiny při spojitém zobrazení. Tím pádem je $f|_A$ je difeomorfismus a zobrazí A na otevřenou množinu U_1. $\square$

10 Metrické prostory 2

10.1 Více o kompaktních a úplných metrických prostorech

Definice 10.1. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor. Nechť $\varepsilon > 0$ a $H \subset P$. Řekneme, že H je ε-síť prostoru P, pokud $P \subset \bigcup_{x \in H} B(x, \varepsilon)$. Řekneme, že P je totálně omezený, pokud $\forall \varepsilon > 0$ existuje konečná ε-síť prostoru P.

Věta 10.2 (Omezenost a totální omezenost)**.** Nechť (P, ϱ) je totálně omezený metrický prostor. Potom je P omezený.

Důkaz. P je totálně omezený, a tedy existuje konečná 1-síť $x_1, \dots, x_n$. Tím pádem $P \subset \bigcup_{i=1}^n B(x_i, 1)$. Označme $d = \max\{\varrho(x_i, x_j), i, j \in \{1, \dots, n\}\}$. Nechť $x, y \in P$, pak existuje $i, j \in \{1, \dots, n\}$ tak, že $x \in B(x_i, 1)$ a $y \in B(x_j, 1)$. Nyní:

$$\varrho(x, y) \leq \varrho(x, x_i) + \varrho(x_i, x_j) + \varrho(x_j, y) \leq 1 + d + 1.$$

Volme x_0 libovolně, pak $P \subset B(x_0, d + 2)$. □

Definice 10.3. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor. Řekneme, že (P, ϱ) je kompaktní metrický prostor, je-li P kompaktní v (P, ϱ).

Věta 10.4 (Kompaktnost a totální omezenost)**.** Nechť (P, ϱ) je kompaktní metrický prostor. Potom P je totálně omezený.

Důkaz. Dokážeme sporem. Nechť existuje $\varepsilon > 0$ tak, že $\forall x_1, \dots, x_n \in P$ platí $P \not\subset \bigcup_{i=1}^n B(x_i, \varepsilon)$. Zvolme $x_1 \in P$ libovolně. Víme, že $P \not\subset B(x_1, \varepsilon)$, a tedy existuje x_2 tak, že $\varrho(x_2, x_1) \geq \varepsilon$. Postupujme indukcí. Mějme $x_1, \dots, x_{n-1}$ tak, že $\varrho(x_i, x_j) \geq \varepsilon \ \forall i = 1, \dots, n, i \neq j$. Víme, že $P \not\subset \bigcup_{i=1}^{n-1} B(x_i, \varepsilon)$. Tím pádem existuje $x_n \in P$ tak, že $\varrho(x_n, x_i) \geq \varepsilon \ \forall i = 1, \dots, n$. Nakonec máme posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^\infty$. Z definice kompaktu existuje $x_{n_k} \to x \in P$. Toto ale není možné, protože $\varrho(x_i, x_j) \geq \varepsilon$. Tato posloupnost není omezená, nelze z ní tím pádem vybrat konvergentní podposloupnost. Dostáváme spor a věta platí. □

Věta 10.5 (Kompaktnost a otevřené pokrytí)**.** Metrický prostor (P, ϱ) je kompaktní právě tehdy, když z každého otevřeného pokrytí lze vybrat konečné podpokrytí. To znamená, že pokud $P \subset \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$ pro libovolnou indexovou množinu A a G_α jsou otevřené, pak existuje konečná $A_0 \subset A$ tak, že $P \subset \bigcup_{\alpha \in A_0} G_\alpha$.

Důkaz. Postupně dokážeme obě implikace:

1. Pravá implikace: Tvrdíme, že existuje $m \in \mathbb{N}$ tak, že $\forall x \in P$ existuje $\alpha \in A$ tak, že $B\left(x, \frac{1}{m}\right) \subset G_\alpha$. Toto tvrzení nyní dokážeme, a to sporem. Nechť $\forall m \in \mathbb{N}$ existuje $x_m \in P$ tak, že $\forall \alpha \in A$ platí $B\left(x_m, \frac{1}{m}\right) \not\subset G_\alpha$. P je kompaktní, a tedy existuje $x_{m_k} \to x \in P$. Z otevřeného pokrytí víme, že existuje $\alpha \in A$ tak, že $x \in G_\alpha$. G_α je otevřená, takže existuje $\delta > 0$ tak, že $B(x, \delta) \subset G_\alpha$. Zvolme k, aby $\frac{1}{m_k} < \frac{\delta}{2}$ a $x_{m_k} \in B\left(x, \frac{\delta}{2}\right)$. Nyní $\forall y \in B\left(x_{m_k}, \frac{1}{m_k}\right)$ platí:

$$\varrho(x, y) \leq \varrho(x, x_{m_k}) + \varrho(x_{m_k}, y) < \frac{\delta}{2} + \frac{1}{m_k} < \delta.$$

Z toho plyne, že $y \in B(x, \delta)$, a tedy $B\left(x_{m_k}, \frac{1}{m_k}\right) \subset B(x, \delta) \subset G_\alpha$. Dostáváme spor, a tedy pomocné tvrzení platí. (P, ϱ) je kompaktní, tím pádem dle předešlé věty totálně omezený. Takže pro naše $m \in \mathbb{N}$ existuje konečná $\frac{1}{m}$-síť $x_1, \ldots, x_n$. Nyní $\forall j = 1, \ldots, n$ existuje G_{α_j} tak, že $B\left(x_j, \frac{1}{m}\right) \subset G_{\alpha_j}$. Dále:

$$P \subset \bigcup_{j=1}^{n} B\left(x_j, \frac{1}{m}\right) \subset \bigcup_{j=1}^{n} G_{\alpha_j}.$$

Tím jsme pravou implikaci dokázali.

2. Levá implikace: Nechť $\{x_n\} \in P$. Chceme dokázat, že existuje $x_{n_k} \to x \in P$. Označme $D = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$. Je-li D konečná, pak se nějaký prvek množiny D opakuje nekonečně mnoho krát a je snadné vybrat konvergentní, v tomto případě konstantní, posloupnost. Nyní předpokládejme, že D je nekonečná. Pak máme dvě možnosti:

   (a) Existuje $y \in P$ tak, že $\forall r > 0$ je $B(y, r) \cap D$ nekonečná.

   (b) $\forall y \in P$ existuje $r_y > 0$ tak, že $B(y, r_y) \cap D$ je konečná.

   Podívejme se nejprve na první možnost. Zvolme $r = 1$. Zřejmě existuje $x_{n_1} \in B(y, 1) \cap D$. Nyní volme $r = \frac{1}{2}$. Jelikož počet prvků v $B\left(y, \frac{1}{2}\right) \cap D$ je nekonečno, tak existuje $n_2 > n_1$ tak, že $x_{n_2} \in B\left(y, \frac{1}{2}\right)$. Postupujme nyní indukcí. Volme $r = \frac{1}{k}$. Počet prvků v $B\left(y, \frac{1}{k}\right) \cap D$ je nekonečno, a tedy existuje $n_k > n_{k-1}$ tak, že $x_{n_k} \in B\left(y, \frac{1}{k}\right)$. Jistě $x_{n_k} \to y$, takže prostor je kompaktní. Podívejme se teď na druhou možnost. Víme, že $P \subset \bigcup_{y \in P} B(y, r_y)$. Jedná se o otevřené pokrytí. Tedy existuje $y_1, \ldots, y_n$ tak, že $P \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(y_i, r_{y_i})$. Tím pádem:

$$D = D \cap P \subset \bigcup_{i=1}^{n} \left(B(y_i, r_{y_i}) \cap D\right).$$

   Dostali jsme, že nekonečná množina D je podmnožinou konečné množiny, což nemůže nastat. Dostáváme spor a druhá implikace je dokázána.

Důkaz věty je hotov. □

Důsledek (Borelova věta)**.** Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ a $\{I_\alpha\}_{\alpha \in A}$ je systém otevřných intervalů. Pak $[a, b] \subset \bigcup_{\alpha \in A} I_\alpha$ implikuje, že existuje konečná $A_0 \in A$ tak, že $[a, b] \subset \bigcup_{\alpha \in A_0} I_\alpha$.

Důkaz. Uzavřený interval je kompaktní v $\mathbb{R}$. Dokazované tvrzení tedy ihned plyne z předchozí věty. □

Příklad. Mějme metrický prostor $P = l^2 = \{\{a_n\}_{n=1}^{\infty} : \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < +\infty\}$ s metrikou $\varrho(\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}) = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n)^2}$. Dá se ukázat, že se skutečně jedná o metrický prostor. My nyní však ukážeme, že je tento prostor úplný. Mějme cauchyovskou posloupnost $a^k = \{a_n^k\}_{n=1}^{\infty}$. To znamená:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists k_0\ \forall k, l \geq k_0 \colon \varrho(a^k, a^l) = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^k - a_n^l)^2} < \varepsilon.$$

Věta 10.6 (Cantorova věta o uzavřených množinách)**.** Nechť (P, ϱ) je úplný metrický prostor a F_n je posloupnost uzavřených množin v P tak, že $F_{n+1} \subset F_n$ a $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam} F_n = 0$, kde $\operatorname{diam} F_n = \sup\{\varrho(x,y), x, y \in F_n\}$. Pak $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ je jednobodová množina.

Důkaz. Volme $x_n \in F_n$ libovolně $\forall n \in \mathbb{N}$. Dokážeme, že $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je cauchyovská. Nechť $\varepsilon > 0$. K němu najdeme $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $\operatorname{diam} F_{n_0} < \varepsilon$. Nyní $\forall m, n \geq n_0$ je $x_n \in F_n \subset F_{n_0}$ a $x_m \in F_n \subset F_{n_0}$, a tedy $\varrho(x_n, x_m) \leq \operatorname{diam} F_{n_0} < \varepsilon$. Posloupnost je tím pádem cauchyovská. P je úplný, a tedy $x_n \to x \in P$. Nechť $j \in \mathbb{N}$ je pevné a $n \geq j$. Pak $x_n \in F_n \subset F_j$ a $x_n \to x \Rightarrow x \in F_j \ \forall j$. Dostáváme tedy, že $x \in \bigcap_{j=1}^{\infty} F_j$. Dokážeme, že tato množina je jednobodová. Postupujeme sporem. Nechť $x, y \in \bigcap_{j=1}^{\infty} F_j$ a $\varrho(x,y) > 0$. Pak existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že platí $\varrho(x,y) > \operatorname{diam} F_{n_0} \geq \varrho(x,y)$, kde poslední nerovnost plyne z faktu, že $x, y \in F_{n_0}$. Dostáváme spor a x je jediný bod průniku. To, že x je jediný bod průniku můžeme také snadno dostat z nerovnosti $\operatorname{diam}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n\right) \leq \operatorname{diam} F_m \ \forall m \in \mathbb{N}$, a tedy $\operatorname{diam}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n\right) = 0$. □

Věta 10.7 (O totální omezenosti a úplnosti)**.** Metrický prostor (P, ϱ) je kompaktní právě tehdy, když je totálně omezený a úplný.

Důkaz. Pravá implikace ihned plyne z věty o kompaktnosti a totální omezenosti a z věty o vztahu kompaktnosti a úplnosti. Zbývá dokázat levou implikaci. Nechť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset P$. Chceme dokázat, že existuje $x_{n_k} \to x$. P je totálně omezený, a tedy existuje konečná 1-síť tak, že $P \subset \bigcup_{i=1}^{j_1} B(s_i, 1)$. $\{x_n\}$ je nekonečná, a tím pádem existuje $B_1 = B(s_i, 1)$ tak, že počet prvků $\{x_n, x_n \in B_1\}$ je nekonečno. Zvolme $x_{n_1} \in B_1$. Dále postupujme indukcí. Mějme $B_1, \ldots, B_{k-1}$, poloměr B_i je $\frac{1}{i}$, tak, že pro $A_{k-1} = B_1 \cap \cdots \cap B_{k-1}$ platí, že počet prvků $\{x_n, x_n \in A_{k-1}\}$ je nekonečno. Mějme $n_1 < n_2 < \cdots < n_{k-1}$ tak, že $x_{n_j} \in A_j$, $j = 1, \ldots, k-1$. P je totálně omezený, a tedy existuje konečná $\frac{1}{k}$-síť tak, že $A_{k-1} \subset P \subset \bigcup_{i=1}^{j_k} B\left(c_i, \frac{1}{k}\right)$, A_{k-1} má nekonečně mnoho prvků. Tím pádem existuje $B_k = B\left(c_i, \frac{1}{k}\right)$ tak, že pro $A_k = A_{k-1} \cap B_k$ platí, že počet prvků $\{x_n, x_n \in A_k\}$ je nekonečno. Dále zvolme $n_k > n_{k-1}$ a $x_{n_k} \in A_k$. Dokážeme, že posloupnost $\{x_{n_k}\}$ je cauchyovská. Nechť $\varepsilon > 0$. Pak existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Nechť $k, l \geq n_0$. Pak $x_{n_k} \in A_k \subset A_{n_0} \subset B_{n_0}$ a $x_{n_k} \in A_l \subset A_{n_0} \subset B_{n_0}$. Takže $\varrho(x_{n_k}, x_{n_l}) < \frac{2}{n_0} < 2\varepsilon$. P je úplný, a tedy existuje x tak, že $x_{n_k} \to x$. □

Věta 10.8 (O zúplnění metrického prostoru)**.** Nechť (P, ϱ) je metrický prostor. Pak existuje úplný metrický prostor $(\tilde{P}, \tilde{\varrho})$ tak, že $P \subset \tilde{P}$ a $\forall x, y \in P$ platí $\varrho(x,y) = \tilde{\varrho}(x,y)$.

Věta 10.9 (Arzela-Ascoli)**.** Nechť $A \subset \mathcal{C}([0,1])$. Pak $\overline{A}$ je kompaktní právě tehdy, když jsou funkce z A stejně omezené a stejně stejnoměrně spojité. Tedy pokud existuje $K > 0$ tak, že $\forall f \in A$ a $\forall x \in [0,1]$ platí $|f(x)| \leq K$ a:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x, y \in [0,1]\ \forall f \in A\colon |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Důkaz. Postupně dokážeme jednotlivé implikace:

1. Pravá implikace: $\overline{A}$ je kompaktní, a tím pádem omezená. Pak i A je omezená, tedy $A \subset B(0, K)$, kde 0 je v tomto případě identicky nulová funkce. $\forall f \in A$ a $\forall x \in [0,1]$ tedy platí $|f(x)| \leq K$. Tím máme omezenost. Jelikož je $\overline{A}$ kompaktní, je i totálně

omezená. Nechť $\varepsilon > 0$. Pak existuje konečná ε-síť tak, že $\overline{A} \subset \bigcup_{i=1}^{k} B(f_i, \varepsilon)$. Funkce f_i je spojitá na $[0,1]$, je tam tím pádem i stejnoměrně spojitá. To znamená, že existuje $\delta_i > 0$ tak, že $\forall x, y \in [0,1]$ platí:

$$|x - y| < \delta_i \Rightarrow |f_i(x) - f_i(y)| < \varepsilon.$$

Položme $\delta = \min\{\delta_1, \ldots, \delta_k\}$. Nechť $f \in A$, $x, y \in [0,1]$: $|x - y| < \delta$. K tomuto $f \in A$ najdeme f_i tak, aby $f \in B(f_i, \varepsilon)$. Nyní $|x - y| < \delta \leq \delta_i$. Dále:

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_i(x)| + |f_i(x) - f_i(y)| + |f_i(y) - f(y)| < 3\varepsilon.$$

Tím jsme dokončili i stejnoměrnou spojitost a pravá implikace platí.

2. Levá implikace: Chceme dokázat, že pro $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \overline{A}$ existuje $f_{n_k} \to f$. Důkaz rozdělíme do několika kroků:

   (a) Nechť $m \in \mathbb{N}$. Ze stejnoměrné spojitosti pro $\varepsilon = \frac{1}{m}$ existuje δ_m tak, že $\forall x, y \in [0,1]$ $\forall m$ platí:
   $$|x - y| < \delta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon = \frac{1}{m}.$$
   Nyní interval $[0,1]$ pokryjeme. Zřejmě $[0,1] \subset \bigcup_{j=1}^{k_m} B\left(c_j^m, \delta_m\right)$. Položme $C = \{c_j^m, m \in \mathbb{N}, j \in \{1, \ldots, k_m\}\}$. Tato množina je spočetná.

   (b) C je spočetná, a tedy můžeme psát $C = \{c_i, i \in \mathbb{N}\}$. Ze stejné omezenosti máme $|f_n(c_1)| \leq K$. Máme omezenou posloupnost, takže existuje podposloupnost tak, že $f_{n_{k,1}}(c_1)$ konverguje. Nyní ze stejné omezenosti také víme, že $|f_{n_{k,1}}(c_2)| \leq K$. Tím pádem existuje podposloupnost $f_{n_{k,2}}$ tak, že $f_{n_{k,2}}(c_2)$ konverguje. Dále pokračujeme indukcí. Pak položíme $f_{n_k} = f_{n_{k,k}}$. f_{n_k} je vybraná podposloupnost z f_n. Nyní $f_{n_k}(c_1)$ konverguje, neboť je to vybraná posloupnost z $f_{n_{k,1}}(c_1)$. Dále $f_{n_k}(c_2)$ konverguje, protože je to (až na první člen) vybraná posloupnost z $f_{n_{k,2}}(c_2)$. Analogicky $f_{n_k}(c_3)$ konverguje, neboť je to (až na první dva členy) vybraná posloupnost z $f_{n_{k,3}}(c_3)$. Postupujeme dále indukcí. Dostaneme nakonec, že $f_{n_k}(c)$ konverguje $\forall c \in C$. Na obrázku níže je tato metoda znázorněna graficky:

	f_1	f_2	f_3	$\ldots$	$f_{n_{k,1}}(c_1)$ konverguje
c_1	$f_{n_{1,1}}$	$f_{n_{2,1}}$	$f_{n_{3,1}}$	$\ldots$	$f_{n_{k,1}}(c_1)$ konverguje
c_2	$f_{n_{1,2}}$	$f_{n_{2,2}}$	$f_{n_{3,2}}$	$\ldots$	$f_{n_{k,2}}(c_2)$ konverguje
c_3	$f_{n_{1,3}}$	$f_{n_{2,3}}$	$f_{n_{3,3}}$	$\ldots$	$f_{n_{k,3}}(c_3)$ konverguje
$\vdots$					
c_j	$f_{n_{1,j}}$	$f_{n_{2,j}}$	$f_{n_{3,j}}$	$\ldots$	$f_{n_{k,j}}(c_j)$ konverguje

Obrázek 1: Diagonální metoda

(c) Dokážeme, že f_{n_k} je cauchyovská. Nechť $\varepsilon > 0$. Najdeme $m \in \mathbb{N}$ tak, že $\frac{1}{m} < \varepsilon$. Z prvního kroku máme δ_m a $c_1^m, \ldots, c_{k_m}^m$. z druhého kroku pak víme, že $f_{n_k}(c_j^m)$ konverguje $\forall j = 1, \ldots, k_m$. Tedy z BC podmínky v těchto bodech existuje $k_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $\forall k, l \geq k_0$ platí:

$$|f_{n_k}(c_j^m) - f_{n_l}(c_j^m)| < \varepsilon \ \forall j = 1, \ldots, k_m.$$

Volme $k_0 = \max\{k_0^1, \ldots, k_0^{k_m}\}$. Nechť nyní $x \in [0,1]$. Najdeme c_j^m tak, že $|x - c_j^m| < \delta_m$ a:

$$\begin{aligned} |f_{n_k}(x) - f_{n_l}(x)| &\leq |f_{n_k}(x) - f_{n_k}(c_j^m)| + |f_{n_k}(c_j^m) - f_{n_l}(c_j^m)| \\ &\quad + |f_{n_l}(c_j^m) - f_{n_l}(x)| \leq \frac{1}{m} + \varepsilon + \frac{1}{m} \leq 3\varepsilon. \end{aligned}$$

Aplikací $\sup_x$ na obě strany nerovnosti dostaneme $\varrho(f_{n_k}, f_{n_l}) \leq 3\varepsilon$. Dokázali jsme, že $\{f_{n_k}\}$ je cauchyovská. Dále $\mathcal{C}([0,1])$ je úplný. Tím pádem existuje $f \in \mathcal{C}([0,1])$ tak, že $f_{n_k} \to f$. Uvědomme si také, že $\overline{A}$ je uzavřená, $f_{n_k} \in \overline{A}$ a $f_{n_k} \to f$, a tedy $f \in \overline{A}$.

Tímto je důkaz věty hotov. □

10.2 Prostory L^p

Tato kapitola vyžaduje znalosti teorie míry a integrálu.

Věta 10.10 (Jensenova nerovnost)**.** Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je pravděpodobnostní prostor, $f \in \mathscr{L}^1(\mu)$, $a, b \in [-\infty, \infty]$ a $f\colon X \to (a,b)$. Je-li $\varphi\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ konvexní, pak platí:

$$\varphi\left(\int_X f \, \mathrm{d}\mu\right) \leq \int_X (\varphi \circ f) \, \mathrm{d}\mu.$$

Důkaz. Označme $t = \int_X f \, \mathrm{d}\mu$. Jsme na pravdědobnostním prostoru, tedy $\mu(X) = 1$. Pak zřejmě $a < t < b$. φ je konvexní, a tím pádem existuje $\beta \in \mathbb{R}$ tak, že $\forall x \in (a,b)$ platí:

$$\varphi(s) \geq \varphi(t) + \beta(s - t).$$

Toto použijeme pro $s = f(x)$ a dostaneme:

$$\varphi(f(x)) \geq \varphi(t) + \beta(f(x) - t).$$

f je měřitelná a φ je spojitá, a tedy $\varphi(f(x))$ je měřitelná. Zintegrujeme:

$$\int_X \varphi(f(x)) \, \mathrm{d}\mu(x) \geq \int_X \varphi(t) \, \mathrm{d}\mu(x) + \beta \int_X (f(x) - t) \, \mathrm{d}\mu(x).$$

Po úpravě dostaneme:

$$\int_X \varphi(f(x)) \, \mathrm{d}\mu(x) \geq \varphi(t) + \beta \underbrace{\left(\int_X f \, \mathrm{d}\mu - t\right)}_{0} = \varphi\left(\int_X f \, \mathrm{d}\mu\right),$$

což jsme chtěli dokázat. □

Příklad. Mějme posloupnost bodů $(x_1, \dots, x_n)$, $\mu = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n}\delta_{x_i}$ a $f(x_i) = a_i \in \mathbb{R}$. Nechť $\varphi = \mathrm{e}^x$, což je konvexní funkce. Pak dle Jensenovy nerovnosti platí:

$$\varphi\left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}\right) \leq \frac{\varphi(a_1) + \varphi(a_2) + \dots + \varphi(a_n)}{n}.$$

To můžeme přepsat jako:

$$\mathrm{e}^{\frac{a_1 + \dots + a_n}{n}} \leq \frac{\mathrm{e}^{a_1} + \dots + \mathrm{e}^{a_n}}{n}.$$

Označme $y_i = \mathrm{e}^{a_i}$. Pak:

$$\sqrt[n]{\mathrm{e}^{a_1}\mathrm{e}^{a_2} \dots \mathrm{e}^{a_n}} = \sqrt[n]{y_1 \dots y_n} \leq \frac{y_1 + \dots + y_n}{n}.$$

Tímto jsme dostali AG nerovnost.

Příklad (Youngova nerovnost)**.** Dokážeme, že $ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$, $1 < p < +\infty$, $1 < q < +\infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ a $a, b \geq 0$. Vezmeme $\mu\left(\frac{1}{p}\right) = x$ a $\mu\left(\frac{1}{q}\right) = y$. Nechť $\varphi = \mathrm{e}^x$, což je konvexní funkce. Dle Jensenovy nerovnosti dostaneme:

$$\mathrm{e}^{\frac{1}{p}x + \frac{1}{q}y} \leq \frac{1}{p}\mathrm{e}^x + \frac{1}{q}\mathrm{e}^y.$$

Po úpravě:

$$\mathrm{e}^{\frac{x}{p}}\mathrm{e}^{\frac{y}{q}} \leq \frac{1}{p}\mathrm{e}^x + \frac{1}{q}\mathrm{e}^y.$$

K zadanému $a, b > 0$ nalezneme x, y tak, aby $\mathrm{e}^{\frac{x}{p}} = a$ a $\mathrm{e}^{\frac{y}{q}} = b$. Pak $a^p = \mathrm{e}^x$ a $b^q = \mathrm{e}^y$. Nakonec dostaneme:

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q.$$

Pro $a = 0$ nebo $b = 0$ toto triviálně také platí. Tím je tato nerovnost dokázána.

Definice 10.11. Nechť $1 < p < +\infty$. Pak číslo q splňující $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ nazveme sdružený exponent. Pro $p = 1$ definujeme $q = +\infty$ a pro $p = +\infty$ definujeme $q = 1$.

Věta 10.12 (Hölderova a Minkowského nerovnost)**.** Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou, $1 < p < +\infty$, q je sdružený exponent k p a $f, g \colon X \to [0, \infty]$ jsou měřitelné funkce. Potom platí Hölderova nerovnost

$$\int_X fg \,\mathrm{d}\mu \leq \left(\int_X f^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X g^q \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{q}}$$

a Minkowského nerovnost

$$\left(\int_X (f+g)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_X f^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_X g^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Důkaz. Začneme důkazem Hölderovy nerovnosti. Označme $A = \left(\int_X f^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}}$ a $B = \left(\int_X g^q \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{q}}$. Pokud $A = 0$ (nebo $B = 0$), pak $f = 0$ skoro všude (nebo $g = 0$ skoro všude) a nerovnost platí. Pokud $A = +\infty$ (nebo $B = +\infty$), pak nerovnost zřejmě platí. Položme $F = \frac{1}{A} f$ a $G = \frac{1}{B} g$. Pak:

$$\int_X F^p \,\mathrm{d}\mu = \frac{1}{A^p} \int_X f^p \,\mathrm{d}\mu = 1.$$

Analogicky:

$$\int_X G^q \,\mathrm{d}\mu = 1.$$

Nyní využijeme Youngovu nerovnost z předchozího příkladu a dostaneme:

$$FG \leq \frac{1}{p} F^p + \frac{1}{q} G^p.$$

Tuto nerovnost zintegrujeme:

$$\int_X FG \,\mathrm{d}\mu \leq \frac{1}{p} \int_X F^p \,\mathrm{d}\mu + \frac{1}{q} \int_X G^q \,\mathrm{d}\mu = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Tuto nerovnost přenásobíme členem AB a dostaneme:

$$\int_X fg \,\mathrm{d}\mu \leq AB = \left(\int_X f^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X g^q \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Tím jsme dostali Hölderovu nerovnost. Nyní přejdeme k Minkowského nerovnosti. Platí:

$$\begin{aligned}
\int_X (f+g)^p \,\mathrm{d}\mu &= \int_X (f(f+g)^{p-1} + g(f+g)^{p-1}) \,\mathrm{d}\mu \\
&\leq \left(\int_X f^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X (f+g)^{(p-1)q} \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\quad + \left(\int_X g^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X (f+g)^{(p-1)q} \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \left(\left(\int_X f^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_X g^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}}\right) \left(\int_X (f+g)^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{q}},
\end{aligned}$$

kde jsme využili Hölderovy nerovnosti a faktu, že $q = \frac{p}{p-1}$, protože $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, a tedy $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p} = \frac{p-1}{p}$. Je-li $\int_X (f+g)^p \,\mathrm{d}\mu$ nenulový a nerovná se nekonečnu, tak jím můžeme tuto nerovnost vydělit:

$$\left(\int_X (f+g)^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{1-\frac{1}{q}} \leq \left(\int_X f^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_X g^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Jelikož $1 - \frac{1}{q} = \frac{1}{p}$, tak dostáváme Minkowského nerovnost. Je-li $\int_X (f+g)^p \,\mathrm{d}\mu = 0$, pak $f = 0$ skoro všude a $g = 0$ skoro všude a nerovnost platí. Nechť $\int_X (f+g)^p \,\mathrm{d}\mu = +\infty$. Pro konvexní funkci t platí $t\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{t(a)+t(b)}{2}$. Využijeme konvexity funkce $t \mapsto t^p$ a dostaneme:

$$\left(\frac{f+g}{2}\right)^p \leq \frac{f^p}{2} + \frac{g^p}{2}.$$

Zintegrujeme a dostaneme:

$$+\infty = \int_X \left(\frac{f+g}{2}\right)^p \mathrm{d}\mu \leq \int_X \left(\frac{f^p}{2} + \frac{g^p}{2}\right) \mathrm{d}\mu.$$

Snadno zjistíme, že buď $\int_X f^p \,\mathrm{d}\mu = +\infty$ nebo $\int_X q^p \,\mathrm{d}\mu = +\infty$. Minkowského nerovnost tedy platí. □

Definice 10.13. Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou a $1 \leq p < +\infty$. Definujeme prostor L^p jako:

$$L^p(X, \mu) = \{f \colon X \to \mathbb{R} \colon \|f\|_{L^p} < +\infty\},$$

kde $\|f\|_{L^p} = \left(\int_X |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}$.

Definice 10.14. Nechť $g \colon X \to [0, \infty]$ je měřitelná. Esenciální supremum g definujeme jako:

$$\text{ess sup}\, g = \inf\{\alpha \colon \mu(g > \alpha) = 0\}.$$

Prostor $L^\infty(X, \mu)$ definujeme jako:

$$L^\infty(X, \mu) = \{f \colon X \to \mathbb{R} \colon \|f\|_{L^\infty} < +\infty\},$$

kde $\|f\|_{L^\infty} = \text{ess sup}\, |f|$.

Věta 10.15 (Trojúhelníková nerovnost v L^p)**.** Nechť $1 \leq p \leq +\infty$. Pak pro $f, g \in L^p(X, \mu)$ platí:

$$\|f + g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}.$$

Důkaz. Pro $1 \leq p < +\infty$ plyne přímo z Minkowského nerovnosti. Nechť $p = +\infty$. Z definice esenciálního suprema existuje N_1, N_2 a N_3 tak, že $\mu(N_1) = \mu(N_2) = \mu(N_3) = 0$. Pak $\|f\|_{L^\infty} = \sup_{x \in x \setminus N_1} |f|$, $\|g\|_{L^\infty} = \sup_{x \in X \setminus N_2} |g|$ a $\|f+g\|_{L^\infty} = \sup_{x \in X \setminus N_3} |f+g|$. Nechť $N = N_1 \cup N_2 \cup N_3$. Pak:

$$\|f + g\|_{L^\infty} = \sup_{x \in X \setminus N} |f + g| \leq \sup_{x \in X \setminus N} |f| + |g| \leq \sup_{x \in X \setminus N} |f| + \sup_{x \in X \setminus N} |g| = \|f\|_{L^\infty} + \|g\|_{L^\infty}.$$

Tím jsme větu dokázali. □

Poznámka. Víme, že L^p je lineární vektorový prostor. To znamená, že pro $f, g \in L^p$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ platí $f + g \in L^p$ a $\alpha f \in L^p$. Místo funkcí z L^p budeme uvažovat třídy ekvivalence vzhledem k rovnosti skoro všude. Na tomto prostoru (na třídách ekvivalence) je $\|f\|_{L^p}$ norma. Takto chápaný L^p je metrický prostor s metrikou $\varrho(f, g) = \|f - g\|_{L^p}$.

Věta 10.16 (Úplnost L^p prostorů)**.** Nechť $1 \leq p \leq +\infty$. Pak prostor $L^p(X, \mu)$ je úplný.

Důkaz. Nechť $1 \leq p < +\infty$. Pro $p = +\infty$ nebudeme větu dokazovat. Mějme f_n cauchyovskou posloupnost v L^p. To znamená:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall m, n \geq n_0 \colon \left(\int_X |f_n(x) - f_m(x)|^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon.$$

Najdeme f jako bodovou limitu skoro všude vhodně vybrané podposloupnosti. Z cauchyovskosti existuje $k_1 < k_2 < \cdots < k_j < \dots$ tak, že $\forall j \in \mathbb{N}$ platí:

$$\left(\int_X |f_{k_j} - f_{k_{j+1}}|^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} \le \frac{1}{2^j}.$$

Položme $g_n = \sum_{j=1}^n |f_{k_j} - f_{k_{j+1}}|$ a $g = \sum_{j=1}^\infty |f_{k_j} - f_{k_{j+1}}|$. Pak z Minkowského nerovnosti máme:

$$\|g_n\|_{L^p} \le \sum_{j=1}^n \|f_{k_j} - f_{k_{j+1}}\|_{L^p} \le \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{2^j}\right) \le 1.$$

Z Fatouova lemmatu:

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} g_n^p \,\mathrm{d}\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int_X g_n^p \,\mathrm{d}\mu \le 1.$$

Dále:

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} g_n^p \,\mathrm{d}\mu = \int_X g^p \,\mathrm{d}\mu,$$

z čehož plyne, že $g < +\infty$ skoro všude. Tedy řada $\sum_{j=1}^\infty (f_{k_j} - f_{k_{j+1}})$ konverguje absolutně skoro všude. Funkce $f = f_{k_1} + \sum_{j=1}^\infty (f_{k_{j+1}} - f_{k_j})$ je tedy definována skoro všude. Nyní $f_{k_n} = f_{k_1} + \sum_{j=1}^{n-1} (f_{k_{j+1}} - f_{k_j})$, což konverguje k f skoro všude. Zbývá dokázat, že $f \in L^p$ a $f_n \xrightarrow{L^p} f$. Víme, že $\forall \varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $\forall n, m \ge n_0$ platí:

$$\left(\int_X |f_n - f_m|^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon.$$

Víme, že $k_n \ge n$, speciálně pro $m \ge n_0$ je:

$$\left(\int_X |f_{k_n} - f_m|^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon.$$

Z Fatouova lemmatu dostaneme:

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} |f_{k_n} - f_m|^p \,\mathrm{d}\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int_X |f_{k_n} - f_m|^p \,\mathrm{d}\mu \le \varepsilon^p.$$

Dále:

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} |f_{k_n} - f_m|^p \,\mathrm{d}\mu = \int_X |f - f_m|^p \,\mathrm{d}\mu.$$

Tím pádem $f - f_m \in L^p$ a dle Minkowského nerovnosti také $(f - f_m) + f_m \in L^p$ a $\varrho(f, f_m) \le \varepsilon$, a tedy $f_n \to f$. □

Poznámka. Nechť $1 \le p \le +\infty$ a $\{f_n\}$ je cauchyovská posloupnost v L^p s limitou f. Pak $\{f_n\}$ má podposloupnost, která konverguje skoro všude k f. Tento fakt plyne z důkazu předchozí věty.

10.3 Husté a řídké množiny

Definice 10.17. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor. Řekneme, že $A \subset P$ je hustá, pokud $\overline{A} = P$.

Věta 10.18 (Charakterizace hustých množin)**.** Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $A \subset P$. Potom je A hustá v P právě tehdy, když pro každou neprázdnou otevřenou množinu $G \subset P$ platí $G \cap A \neq \varnothing$.

Důkaz. Dokážeme jedntolivé implikace:

1. Pravá implikace: Dokážeme sporem. Nechť existuje $G \subset P$ otevřená taková, že $G \cap A = \varnothing$. Jistě existuje $B(x, r) \subset G$. Pak $\operatorname{dist}(x, A) \geq r$, a tedy $x \notin \overline{A}$. Dostáváme spor.

2. Levá implikace: Opět postupujeme sporem. A není hustá, a tedy $P \setminus \overline{A} \neq \varnothing$. $G = P \setminus \overline{A}$ je otevřená, protože $\overline{A}$ je uzavřená. Podle předpokladu $(P \setminus \overline{A}) \cap A \neq \varnothing$, ale:
$$(P \setminus \overline{A}) \cap A \subset (P \setminus A) \cap A = \varnothing.$$
Dostáváme spor.

Tímto jsme větu dokázali. □

Důsledek. Nechť (P, ϱ) je metrická prostor a $G_1, G_2 \subset P$ jsou otevřené a husté v (P, ϱ). Pak $G_1 \cap G_2$ je otevřená a hustá v P.

Důkaz. Nechť $G \subset P$, $G \neq \varnothing$, je otevřená. Použijeme předchozí větu na otevřenou množinu G_1 a dostaneme, že $G_1 \cap G \neq \varnothing$. Opět použijeme tuto větu na otevřenou množinu G_2. Dostaneme $G_2 \cap G_1 \cap G \neq \varnothing$. Dle předchozí věty platí, že $G_1 \cap G_2$ je hustá. □

Definice 10.19. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor. Řekneme, že $A \subset P$ je řídká, jestliže $P \setminus \overline{A}$ je hustá, neboli $\overline{P \setminus \overline{A}} = P$.

Věta 10.20 (Vlastnosti řídkých množin)**.** Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a nechť $A, B \subset P$. Potom:

1. Je-li A řídká v P a $B \subset A$, pak také B je řídká v P.
2. Jsou-li A, B řídké v P, pak $A \cup B$ je řídká v P.
3. A je řídká v P právě tehdy, když $\overline{A}$ je řídká v P.

Důkaz. Postupně dokážeme:

1. Nechť $B \subset A$. Pak $\overline{B} \subset \overline{A}$, a tedy $P \setminus \overline{A} \subset P \setminus \overline{B}$. Dále:
$$P = \overline{P \setminus \overline{A}} \subset \overline{P \setminus \overline{B}}.$$
Z toho dostáváme, že $P = \overline{P \setminus \overline{B}}$, takže B je řídká.

2. Platí následující:

$$\begin{aligned}\overline{(A\cup B)} &= \{x\colon \operatorname{dist}(x, A\cup B) = 0\} = \{x\colon \operatorname{dist}(x,A)=0\}\cup\{x\colon \operatorname{dist}(x,B)=0\}\\ &= \overline{A}\cup\overline{B}.\end{aligned}$$

   Pak dostaneme:

$$P\setminus(\overline{A\cup B}) = P\setminus(\overline{A}\cup\overline{B}) = (P\setminus\overline{A})\cap(P\setminus\overline{B}).$$

   Množiny $P\setminus\overline{A}$, $P\setminus\overline{B}$ jsou husté a otevřené. Dle předchozího důsledku je jejich průnik také hustý a otevřený. Dostáváme, že $A\cup B$ je řídká množina.

3. Víme, že $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$. Tím pádem pak $P\setminus\overline{A} = P\setminus\overline{\overline{A}}$. Dále $\overline{P\setminus\overline{A}} = \overline{P\setminus\overline{\overline{A}}}$. Z toho snadno dostáváme dokazované tvrzení.

□

Definice 10.21. Nechť (P,ϱ) je metrický prostor. Řekneme, že $A\subset P$ je první kategorie, jestliže existují řídké množiny A_n tak, že $A=\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Řekneme, že $C\subset P$ je druhé kategorie, jestliže C není první kategorie.

Věta 10.22 (Baireova věta)**.** Nechť (P,ϱ) je úplný metrický prostor. Nechť G_n, $n\in\mathbb{N}$, jsou otevřené a husté v P. Pak $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ je hustá v P.

Důkaz. Podle věty o charakterizaci hustých množin stačí ukázat, že $\forall G\subset P$ otevřenou platí $G\cap\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n \neq \varnothing$. Nechť G je otevřená. G_1 je hustá, a tedy existuje $B(x_1, 2r_1)\subset G_1\cap G$, protože $G_1\cap G$ je neprázdná a otevřená jako průnik dvou otevřených množin. Uvažujme $r_1<1$. Jistě také $\overline{B(x_1,r_1)}\subset G_1\cap G$. G_2 je hustá a $B(x_1,r_1)$ je otevřená, a tedy existuje $B(x_2,2r_2)\subset G_2\cap B(x_1,r_1)\subset G_2\cap G_1\cap G$, speciálně pro $r_2<\frac{1}{2}$. Opět jistě $\overline{B(x_2,r_2)}\subset G_2\cap G_1\cap G$. Dále postupujeme indukcí. Máme:

$$\overline{B(x_1,r_1)}\supset\overline{B(x_2,r_2)}\supset\cdots\supset\overline{B(x_{k-1},r_{k-1})}\subset G_{k-1}\cap G_{k-2}\cap\cdots\cap G_1\cap G,$$

kde $r_i<\frac{1}{i}$ $\forall i=1,\dots,k-1$. G_k je hustá a $B(x_{k-1},r_{k-1})$ je otevřená, a tedy platí:

$$\overline{B(x_k,r_k)}\subset B(x_k,2r_k)\subset G_k\cap B(x_{k-1},r_{k-1})\subset G_k\cap G_{k-1}\cap\cdots\cap G_1\cap G,$$

kde $r_k<\frac{1}{k}$. (P,ϱ) je úplný a $\overline{B(x_k,r_k)}$ je uzavřená. Tím pádem $\operatorname{diam}\overline{B(x_k,r_k)}\to 0$ pro $k\to\infty$. Podle Cantorovy věty o uzavřených množinách existuje $a=\bigcap_{k=1}^{\infty}\overline{B(x_k,r_k)}$. Pak tedy $a\in\overline{B(x_k,r_k)}\subset G_k\cap G$ $\forall k\in\mathbb{N}$. Z toho dostáváme:

$$a\in\bigcap_{k=1}^{\infty} G_k\cap G,$$

což je neprázdná množina. Pak je $\bigcap_{k=1}^{\infty} G_k$ jistě hustá. □

Důsledek. Úplný metrický prostor není první kategorie sám v sobě.

Důkaz. Nechť $P = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ a A_n jsou řídké. To by znamenalo, že P je první kategorie sám v sobě. Pak $P \setminus \overline{A_n}$ jsou husté a otevřené, a tedy $\bigcap_{n=1}^{\infty}(P \setminus \overline{A_n})$ je hustá množina. Speciálně je tato množina neprázdná. Zároveň ale máme:

$$\varnothing = P \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}(P \setminus A_n) \supset \bigcap_{n=1}^{\infty}(P \setminus \overline{A_n}) \neq \varnothing.$$

Tím dostáváme spor. □

Věta 10.23 (O nediferencovatelné funkci)**.** Existuje spojitá funkce $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, která nemá derivaci v žádném bodě z $(0,1)$.

Důkaz. Pro $n \in \mathbb{N}$ definujeme:

$$A_n = \{f \in \mathcal{C}([0,1]), \exists t \in [0,1]\ \forall s \in [0,1] \colon |f(t) - f(s)| \leq n|t - s|\}.$$

Důkaz rozdělíme do třech kroků:

1. Dokážeme, že A_n je uzavřená. K tomu stačí ukázat, že pro $f_k \in A_n$, $f_k \to f$ platí $f \in A_n$. Pokud $f_k \in A_n$, pak existuje $t_k \in [0,1]$ tak, že $\forall s \in [0,1]$ platí $|f_k(t_k) - f_k(s)| \leq n|t_k - s|$. Podle Weierstrassovy věty existuje posloupnost $t_{k_j} \to t$. t_{k_j} označíme bez újmy na obecnosti t_k. Nyní $\forall s \in [0,1]$ platí:

$$\begin{aligned} |f(t) - f(s)| &\leq |f(t) - f_k(t)| + |f_k(t) - f_k(t_k)| + |f_k(t_k) - f_k(s)| + |f_k(s) - f(s)| \\ &\leq |f(t) - f_k(t)| + n|t_k - t| + n|t_k - s| + |f_k(s) - f(s)|. \end{aligned}$$

   Provedeme limitní přechod pro $k \to \infty$ a dostaneme:

$$|f(t) - f(s)| \leq 0 + n \cdot 0 + n|t - s| + 0.$$

   Dostáváme $|f(t) - f(s)| \leq n|t - s|$. Tím pádem $f \in A_n$ a A_n je uzavřená.

2. Nyní dokážeme, že pokud má f derivaci v nějakém bodě t, pak existuje $n \in \mathbb{N}$ tak, že $f \in A_n$. Mějme $f \in \mathcal{C}([0,1])$. Předpokládáme, že existuje $f'(t) = a$. Z definice derivace a limity pro $\varepsilon = 1$ existuje $\delta > 0$ tak, že $\forall s \in (t - \delta, t + \delta)$ platí:

$$\left| \frac{f(t) - f(s)}{t - s} - a \right| < 1.$$

   Pak:

$$\left| \frac{f(t) - f(s)}{t - s} \right| \leq \left| \frac{f(t) - f(s)}{t - s} - a \right| + |a| \leq 1 + |a|,$$

   a tedy $|f(t) - f(s)| \leq (1 + |a|)|t - s|$. Dále $\forall s \in [0,1] \setminus (t - \delta, t + \delta)$ platí:

$$|f(t) - f(s)| \leq 2 \sup_{[0,1]} |f| \frac{\delta}{\delta} \leq \frac{2 \sup_{[0,1]} |f|}{\delta} |t - s|.$$

   Zvolme $n > \max\left\{|a| + 1, \frac{2 \sup_{[0,1]} |f|}{\delta}\right\}$. Pak $f \in A_n$.

3. Budeme chtít dokázat, že A_n je řídká. To uděláme tak, že dokážeme, že $P \setminus \overline{A_n} = P \setminus A_n$ je hustá. Podle věty o charakterizaci hustých množin stačí ukázat, že $\forall g \in \mathcal{C}([0,1])$ a $\forall r > 0$ platí $(P \setminus A_n) \cap B(g,r) \neq \emptyset$. g je na $[0,1]$ spojitá, a tedy je tam i stejnoměrně spojitá. K zadanému r existuje $\delta > 0$ tak, že $\forall x, y \in [0,1]$ platí:

$$|x-y| < \delta \Rightarrow |g(x)-g(y)| < \frac{r}{10}.$$

Definujme pilovitou funkci p tak, aby $p' = \pm c$, kde $c = \max\left\{3n, \frac{r}{2\delta}\right\}$. Definujme $f(x) = g(x) + p(x)$. Zřejmě $f \in \mathcal{C}([0,1])$ a $f \in B(g,r)$. Dokážeme, že $f \notin A_n$. Budeme postupovat sporem. Nechť existuje $t \in [0,1]$ tak, že $\forall s \in [0,1]$ platí:

$$|f(t)-f(s)| \leq n|t-s|.$$

K tomuto t najdeme s na stejném zubu, aby $|p(t)-p(s)| = \frac{r}{2}$, $\left|\frac{p(t)-p(s)}{t-s}\right| = c$ a $|s-t| \leq \delta$. Dále:

$$\frac{r}{2} = |p(t)-p(s)| = c|t-s| \geq 3n|t-s|.$$

Pak platí:

$$|f(t)-f(s)| \geq |p(t)-p(s)| - |g(t)-g(s)| \geq \frac{r}{2} - \frac{r}{10} = \frac{2}{5}r \geq \frac{2}{5}6n|t-s| > n|t-s|.$$

Tímto dostáváme spor s tím, že $|f(t)-f(s)| \leq n|t-s|$. f tím pádem není v A_n. Pak A_n je řídká. Množina diferencovatelných funkcí je podmnožinou $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, takže množina diferencovatelných funkcí je první kategorie, což znamená, že existuje nějaká spojitá funkce, která do této množiny nepatří, a tedy není diferencovatelná.

Tím je důkaz hotov. □

10.4 Separabilní prostory

Definice 10.24. Řekneme, že metrický prostor (P,ϱ) je separabilní, jestliže existuje spočetná množina $A \subset P$, která je hustá v (P,ϱ).

Věta 10.25 (Nutná podmínka separability)**.** Nechť (P,ϱ) je metrický prostor. Nechť existuje nejspočetná množina A a $\delta > 0$ takové, že $\forall x, y \in A$, $x \neq y$, platí $\varrho(x,y) \geq \delta$. Potom (P,ϱ) není separabilní.

Důkaz. Dokážeme sporem. Nechť A a δ jsou jako ve znění věty a $M \subset P$ je spočetná množina taková, že $\overline{M} = P$. Pro $a \in A$ uvažujme $B\left(a, \frac{\delta}{2}\right)$. Tyto koule jsou po dvou disjunktní. Z $\overline{M} = P$ víme, že existuje $m_a \in M \cap B\left(a, \frac{\delta}{2}\right)$. Jelikož jsou koule disjuktní, tak je zobrazení $a \mapsto m_a$ prosté. Dostali jsme prosté zobrazení nespočetné množiny A do spočetné množiny M, což nemůže nastat a dostáváme spor. □

Definice 10.26. Nechť (P,ϱ) je metrický prostor a $\mathscr{B}$ je nějaký systém otevřených podmnožin P. Řekneme, že $\mathscr{B}$ je báze množin (P,ϱ), jestliže pro každou otevřenou množinu $G \subset P$ existuje $\mathscr{B}^* \subset \mathscr{B}$ tak, že $\bigcup \mathscr{B}^* = G$.

Věta 10.27 (Charakterizace separabilních prostorů)**.** Metrický prostor je separabilní právě tehdy, když v něm existuje spočetná báze otevřených množin.

Důkaz. Postupně dokážeme obě implikace:

1. Pravá implikace: Nechť A je spočetná a $\overline{A} = P$. Položme $\mathscr{B} = \{B(a,r), a \in A, r \in \mathbb{Q}, r > 0\}$. $\mathscr{B}$ je spočetná. Dokážeme, že $\mathscr{B}$ je báze. Nechť $G \subset P$ je otevřená. Položme $\mathscr{B}^* = \{B(a,r) \in \mathscr{B}, B(a,r) \subset G\}$. Dokážeme, že $\bigcup \mathscr{B}^* = G$. Zřejmě $\bigcup \mathscr{B}^* \subset G$. Zbývá ověřit druhou inkluzi. Nechť $z \in G$. Chceme ukázat, že $z \in \mathscr{B}^*$. G je otevřená, a tedy existuje $B(z,r) \subset G$. A je hustá, a tím pádem existuje $a \in A \cap B\left(z, \frac{r}{4}\right)$. Dále existuje $r^* \in \mathbb{Q} \cap \left(\frac{r}{2}, \frac{3}{4}r\right)$. Pak $B(a,r^*) \in \mathscr{B}$. Navíc $r^* > \frac{r}{2}$, takže $z \in B(a,r^*)$. Dále $\varrho(a,z) < \frac{r}{4}$ a $r^* < \frac{3}{4}r$, a tedy $B(a,r^*) \subset B(z,r)$, z čehož dostáváme, že $B(a,r^*) \subset G$. Pak také $B(a,r^*) \in \mathscr{B}^*$, a tím pádem $\{z\} \in \bigcup \mathscr{B}^*$. Nakonec máme, že $G = \bigcup \mathscr{B}^*$.

2. Levá implikace: Nechť $\mathscr{B}$ je spočetná báze otevřených množin, tedy $\mathscr{B} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \{S_i\}$. Zvolme $A = \{a_i, a_i \in S_i\}$, neboli z každé množiny S_i vyboreme libovolně jeden prvek a_i. Pak A je spočetná. Chceme ukázat, že A je hustá v P. Nechť $G \subset P$ je otevřená. Dále existuje $\mathscr{B}^* \subset \mathscr{B}$ tak, že $G = \bigcup \mathscr{B}^*$. Pak existuje S_i tak, že $S_i \subset G$, a tedy $a_i \in G$. Z toho máme, že $G \cap A \neq \emptyset$. A je tím pádem hustá v P.

Tím je důkaz hotov. □

Věta 10.28 (Vztah totální omezenosti a separability)**.** Nechť je metrický prostor (P, ϱ) totálně omezený. Pak je separabilní.

Důkaz. (P, ϱ) je totálně omezený, a tedy $\forall \varepsilon > 0$ existuje konečná ε-síť. Speciálně $\forall n \in \mathbb{N}$ existuje konečná $\frac{1}{n}$-síť tak, že $P \subset \bigcup_{i=1}^{k_n} B\left(c_i^n, \frac{1}{n}\right)$. Pak $A = \{c_i^n, n \in \mathbb{N}, i \in \{1, \ldots, k_n\}\}$. Tato množina je spočetná. Dokážeme, že $\overline{A} = P$. Nechť $x \in P$. Z definice $\frac{1}{n}$-sítě existuje $x_n = c_i^n$ tak, že $\varrho(x_n, x) < \frac{1}{n}$. Pak jistě $x_n \to x$, což znamená, že $\overline{A} = P$. □

11 Hilbertovy prostory

11.1 Základní definice

Definice 11.1. Nechť H je reálný vektorový prostor. Řekneme, že H je prostor se skalárním součinem, jestliže existuje zobrazení $\langle \cdot, \cdot \rangle \colon H \times H \to \mathbb{R}$ takové, že:

1. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle \ \forall x, y \in H$,
2. $\langle x + y, \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle \ \forall x, y, z \in H$,
3. $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle \ \forall x, y \in H \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$,
4. $\langle x, x \rangle \geq 0 \ \forall x \in H$,
5. $\langle x, x \rangle = 0$ právě tehdy, když $x = 0$.

Definujeme $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$. Řekneme, že prvek $x \in H$ je ortogonální k $g \in H$, pokud $\langle x, y \rangle = 0$.

Věta 11.2 (Cauchy-Schwarzova nerovnost)**.** $\forall x, y \in H$ platí $\langle x, y \rangle \leq \|x\| \|y\|$.

Důkaz. $\forall t \in \mathbb{R}$ je $h(t) = \langle x - ty, x - ty \rangle \geq 0$. Platí:

$$\begin{aligned} h(t) &= \langle x, x - ty \rangle - \langle ty, x - ty \rangle = \langle x, x \rangle - t\langle x, y \rangle - t\langle y, x \rangle + t^2 \langle y, y \rangle \\ &= \|x\|^2 - 2t\langle x, y \rangle + t^2 \|y\|^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Tato kvadratická funkce je nezáporná, a tedy její diskriminant je nekladný. Tedy $D = (-2\langle x, y \rangle)^2 - 4\|x\|^2 \|y\|^2 \leq 0$. Úpravou snadno dostaneme dokazovanou nerovnost. □

Věta 11.3 (Trojúhelníková nerovnost)**.** $\forall x, y \in H$ platí $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$. Speciálně $(H, \|\cdot\|)$ tvoří metrický prostor s metrikou $\varrho(x, y) = \|x - y\|$.

Důkaz. Platí:

$$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle \leq (\|x\| + \|y\|)^2.$$

Odmocnením dostaneme dokazovanou nerovnost. □

Definice 11.4. Nechť H je prostor se skalárním součinem. Řekneme, že H je Hilberův prostor, jestliže je metrický prostor $(H, \|\cdot\|)$ úplný.

Příklad. Následující prostory jsou Hilbertovy:

1. $(\mathbb{R}^n, \varrho_e)$.
2. $l^2 = \{\{a_n\}_{n=1}^\infty \colon a_n \in \mathbb{R}, \sum_{n=1}^\infty a_n < \infty\}$ se skalárním součinem $\langle \{a_n\}_{n=1}^\infty, \{b_n\}_{n=1}^\infty \rangle = \sum_{n=1}^\infty a_n b_n$.
3. $L^2(0,1) = \{f \colon (0,1) \to \mathbb{R} \colon \int_0^1 |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x < \infty\}$ se skalárním součinem $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) g(x) \, \mathrm{d}x$.

Věta 11.5 (Spojitost skalárního součinu)**.** Nechť H je Hilbertův prostor. Potom jsou zobrazení $x \mapsto \langle x, y\rangle$, $x \mapsto \|x\|$ spojitá na H.

Důkaz. K $\varepsilon > 0$ zvolme $\delta = \frac{\varepsilon}{\|y\|}$. Je-li $\|x_1 - x_2\| < \delta$, pak $|\langle x_1, y\rangle - \langle x_2, y\rangle| < \varepsilon$, protože:

$$|\langle x_1, y\rangle - \langle x_2, y\rangle| = |\langle x_1 - x_2, y\rangle| \leq \|x_1 - x_2\|\|y\|.$$

Zobrazení $x \mapsto \langle x, y\rangle$ je spojité. Z trojúhelníkové nerovnosti $\|x_1\| - \|x_2\| \leq \|x_1 - x_2\|$ a $\|x_2\| - \|x_1\| \leq \|x_2 - x_1\|$, a tedy je $x \mapsto \|x\|$ spojité. □

Definice 11.6. Nechť H je Hilbertův prostor a $E \subset H$. Řekneme, že E je konvexní, jestliže $\forall x, y \in E$ a $\forall t \in [0, 1]$ platí $tx + (1 - t)y \in E$.

Věta 11.7 (O existenci prvku s nejmenší normou)**.** Nechť H je Hilbertův prostor a $E \subset H$ je konvexní a uzavřená. Potom existuje právě jeden prvek v E s nejmenší normou.

Důkaz. Platí rovnoběžníkové pravidlo:

$$\begin{aligned}\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 &= \langle x + y, x + y\rangle + \langle x - y, x - y\rangle\\ &= \langle x, x\rangle + 2\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle + \langle x, x\rangle - 2\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle\\ &= 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.\end{aligned}$$

Označíme $\delta = \inf_{y\in E}\|y\|$. Dokážeme existenci. Mějme $y_n \in E$ tak, že $\|y_n\| \xrightarrow{n\to\infty} \delta$. Z rovnoběžníkového pravidla:

$$\|y_n - y_m\|^2 = 2\|y_n\|^2 + 2\|y_m\|^2 - 4\left\|\frac{y_n + y_m}{2}\right\|^2 \leq 2\|y_n\|^2 + 2\|y_m\|^2 - 4\delta^2 \xrightarrow{n,m\to\infty} 0.$$

Uvědomme si, že $y_n + y_m \in E$ díky konvexitě. y_n je tedy cauchyovská. H je úplný, a tedy existuje $y \in H$ tak, že $y_n \to y$. E je uzavřená, a tedy $y \in E$. $\|\cdot\|$ je spojité zobrazení, a tím pádem $\|y_n\| \to \delta = \|y\|$. Dokážeme nyní jednoznačnost nejbližšího prvku. Nechť $y_1, y_2 \in E$ a $\|y_1\| = \|y_2\| = \delta$. Pak:

$$\|y_1 - y_2\|^2 = 2\|y_1\|^2 + 2\|y_2\|^2 - 4\left\|\frac{y_1 + y_2}{2}\right\| \leq 2\|y_1\|^2 + 2\|y_2\|^2 - 4\delta^2 = 0.$$

Dostáváme, že $y_1 = y_2$. □

Definice 11.8. Nechť $M \subset H$ je lineární podprostor Hilbertova prostoru H. Definujeme ortogonální podprostor $M^\perp = \{y \in H : \langle x, y\rangle = 0\ \forall x \in M\}$.

Věta 11.9 (O projekci prostoru na podprostor)**.** Nechť M je uzavřený lineární podprostor Hilbertova prostoru H.

1. Každý prvek $x \in H$ má jednoznačný rozklad $x = P(x) + Q(x)$ tak, že $P(x) \in M$ a $Q(x) \in M^\perp$.
2. $P(x)$ je bod M nejbližší k x, $Q(x)$ je bod z $M^\perp$ nejbližší k x.
3. Zobrazení $P : H \to M$ a $Q : H \to M$ jsou lineární.

4. $\|x\|^2 = \|P(x)\|^2 + \|Q(x)\|^2$.

Důkaz. Postupně dokážeme:

1. Dokážeme nejprve jednoznačost. Nechť $x = x_1 + y_1 = x_2 + y_2$, $x_1, x_2 \in M$ a $y_1, y_2 \in M^\perp$. Pak $x_1 - x_2 = y_2 - y_1$, kde $x_1 - x_2 \in M$ a $y_2 - y_1 \in M^\perp$. Zároveň ale $M \cap M^\perp = \{0\}$. Z toho plyne, že $0 = x_1 - x_2 = y_2 - y_1$, čímž jsme dokázali jednoznačnost. Nyní dokážeme existenci. $x + M$ je uzavřený podprostor, a tedy dle věty o existenci prvku s nejmenší normou existuje $Q(x) \in x + M$ s nejmenší normou. Položme $P(x) = x - Q(x)$. Pak $P(x) + Q(x) = x$. Dokážeme, že $P(x) \in M$. $Q(x) \in x + M$, a tedy $Q(x) - x \in M$, z čehož plyne, že $P(x) \in M$. Zbývá ukázat, že $Q(x) \in M^\perp$. Pokud by to platilo, tak $\forall y \in M$ je $\langle y, Q(x)\rangle = 0$. bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $y \in M$ a $\|y\| = 1$. $Q(x)$ je prvek s nejmenši normou v $x + M$, a tedy platí:
$$\begin{aligned}\|Q(x)\|^2 \leq \|Q(x) - \alpha y\|^2 &= \langle Q(x) - \alpha y, Q(x) - \alpha y\rangle \\ &= \|Q(x)\|^2 - 2\alpha\langle Q(x), y\rangle + \alpha^2\|y\|.\end{aligned}$$
$\|Q(x)\|^2$ se odečte na obou stranách nerovnice a dostaneme:
$$0 \leq -2\alpha\langle Q(x), y\rangle + \alpha^2\|y\|.$$
Dále $\|y\| = 1$ a nerovnice platí pro všechny α, speciálně pro $\alpha = \langle Q(x), y\rangle$. Pak:
$$0 \leq -2(\langle Q(x), y\rangle)^2 + (\langle Q(x), y\rangle)^2 = -(\langle Q(x), y\rangle)^2.$$
Tím pádem $\langle Q(x), y\rangle = 0$. Dokázali jsme, že $Q(x) \in M^\perp$.

2. Nechť $y \in M$ je libovolné. Pak:
$$\|x - y\|^2 = \|Q(x) + P(x) - y\|^2 = \|Q(x)\|^2 + 2\langle Q(x), P(x) - y\rangle + \|P(x) - y\|^2,$$
kde $\langle Q(x), P(x) - y\rangle = 0$, protože $Q(x) \in M^\perp$ a $P(x) - y \in M$. $\|Q(x)\|^2 + \|P(x) - y\|^2$ je nejmenší právě tehdy, když $y = P(x)$. Nechť $y \in M^\perp$. Pak:
$$\|x - y\|^2 = \|Q(x) - y + P(x)\|^2 = \|Q(x) - y\|^2 + 2\langle Q(x) - y, P(x)\rangle + \|P(x)\|^2,$$
kde $\langle Q(x) - y, P(x)\rangle = 0$, protože $Q(x) - y \in M^\perp$ a $P(x) \in M$. $\|Q(x) - y\|^2 + \|P(x)\|^2$ je nejmenší právě tehdy, když $y = Q(x)$.

3. Chceme dokázat, že $P(\alpha x + \beta y) = \alpha P(x) + \beta P(y)$. Víme, že $x = P(x) + Q(x), y = P(y) + Q(y)$ a $\alpha x + \beta y = P(\alpha x + \beta y) + Q(\alpha x + \beta y)$. První rovnici vynásobíme $-\alpha$, druhou $-\beta$ a všechny tři rovnice sečteme. Dostaneme:
$$\alpha Q(x) + \beta Q(y) - Q(\alpha x + \beta y) = P(\alpha x + \beta y) - \alpha P(x) - \beta P(y),$$
kde člen na levé straně rovnice je v $M^\perp$ a člen na pravé straně je v M. $M \cap M^\perp = \{0\}$, a tedy musí platit:
$$\alpha Q(x) + \beta Q(y) - Q(\alpha x + \beta y) = 0 = P(\alpha x + \beta y) - \alpha P(x) - \beta P(y).$$
Tím jsme dokázali, že zobrazení je lineární.

4. Přímo spočteme:

$$\|x\|^2 = \langle P(x) + Q(x), P(x) + Q(x)\rangle = \|P(x)\|^2 + 2\langle P(x), Q(x)\rangle + \|Q(x)\|^2,$$

kde $\langle P(x), Q(x)\rangle = 0$, protože $P(x) \in M$ a $Q(x) \in M^\perp$. Tím pádem dostáváme dokazovanou rovnost.

Věta tedy platí. □

Důsledek. Nechť M je uzavřený podprostor Hilbertova prostoru H a $M \neq H$. Pak existuje $y \in M^\perp$ tak, že $y \neq 0$.

Věta 11.10 (O reprezentaci lineárního funkcionálu)**.** Nechť H je Hilbertův prostor a $L\colon H \to \mathbb{R}$ je spojité lineární zobrazení. Pak existuje právě jedno $y \in H$ tak, že $L(x) = \langle x, y\rangle$.

Důkaz. Nejprve dokážeme jednoznačnost. Nechť $L(x) = \langle x, y_1\rangle = \langle x, y_2\rangle$. Pak $\forall x$ je $\langle x, y_1 - y_2\rangle = 0$. Speciálně pro $x = y_1 - y_2$ máme $\|y_1 - y_2\| = 0$, a tedy $y_1 = y_2$. Nyní přejdeme k existenci. Pro $L \equiv 0$ volme $y = 0$. Jinak mějme $M = \{x \in H\colon L(x) = 0\} = L^{-1}(\{0\})$. Toto je lineární podprostor, který je navíc uzavřený. Podle předchozího důsledku existuje $a \in M^\perp$, $a \neq 0$. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $\|a\| = 1$. Mějme x pevné. Položme $z(x) = xL(a) - L(x)a$. Pak:

$$L(z) = L(x)L(a) - L(x)L(a) = 0 \Rightarrow z \in M.$$

Dále:

$$0 = \langle a, z\rangle = \langle a, xL(a) - L(x)a\rangle = L(a)\langle a, x\rangle - L(x)\langle a, a\rangle.$$

Jelikož $\|a\| = 1$, tak máme $L(x) = \langle a, x\rangle L(a) = \langle x, aL(a)\rangle$. Za y zvolíme $aL(a)$ a důkaz je hotov. □

11.2 Rozklad do Schauderovy báze

Definice 11.11. Nechť H je Hilbertův prostor a A je indexová množina. Množina prvků $u_\alpha \in H$, kde $\alpha \in A$, se nazývá ortogonální, pokud $\langle u_\alpha, u_\beta\rangle = 0 \ \forall \alpha, \beta \in A$, $\alpha \neq \beta$. Ortogonální množina se nazývá ortonormální, pokud navíc $\|u_\alpha\| = 1 \ \forall \alpha \in A$. Jestliže $\{u_\alpha\}_{\alpha \in A}$ je ortonormální množina, pak $\forall x \in H$ definujeme Fourierovy koeficienty x vzhledem k u_α jako $\hat{x}(\alpha) = \langle x, u_\alpha\rangle$.

Věta 11.12 (O konečné ortonormální množině)**.** Nechť H je Hilbertův prostor, $\{u_\alpha\}_{\alpha \in A}$ je ortonormální množina a $F \subset A$ je konečná množina. Označme $M_F = LO\{u_\alpha\colon \alpha \in F\}$.

1. Nechť $\varphi\colon A \to \mathbb{R}$ je 0 mimo F. Pro vektor $y = \sum_{\alpha \in F} \varphi(\alpha) u_\alpha$ platí $\hat{y}(\alpha) = \varphi(\alpha)$ a $\|y\|^2 = \sum_{\alpha \in F} |\varphi(\alpha)|^2$.

2. Je-li $x \in H$ a $s_F(x) = \sum_{\alpha \in F} \hat{x}(\alpha) u_\alpha$, pak $s_F(x) = P(x)$ je projekce na M_F. Navíc platí Besselova nerovnost $\sum_{\alpha \in F} |\hat{x}(\alpha)|^2 \leq \|x\|^2$.

Důkaz. Postupně dokážeme:

1. Můžeme psát:

$$\hat{y}(\alpha) = \langle y, u_\alpha \rangle = \left\langle \sum_{\beta \in F} \varphi(\beta) u_\beta, u_\alpha \right\rangle = \sum_{\beta \in F} \varphi(\beta) \langle u_\beta, u_\alpha \rangle = \varphi(\alpha).$$

Jelikož je suma konečná, tak jsme mohli prohodit sumu a skalární součin. Nyní:

$$\|y\|^2 = \left\langle \sum_{\beta \in F} \varphi(\beta) u_\beta, \sum_{\alpha \in F} \varphi(\alpha) u_\alpha \right\rangle = \sum_{\beta \in F} \sum_{\alpha \in F} \varphi(\beta)\varphi(\alpha) \langle u_\beta, u_\alpha \rangle = \sum_{\alpha \in F} (\varphi(\alpha))^2.$$

2. Platí:

$$\langle x - s_F(x), u_\alpha \rangle = \langle x, u_\alpha \rangle - \left\langle \sum_{\beta \in F} \hat{x}(\beta) u_\beta, u_\alpha \right\rangle = \langle x, u_\alpha \rangle - \hat{x}(\alpha) = 0.$$

Z tohoto plyne, že $x - s_F(x) \in M_F^\perp$. Nechť $y \in M_F$. Pak:

$$\begin{aligned} \|x - y\|^2 &= \langle x - s_F + s_F - y, x - s_F + s_F - y \rangle \\ &= \langle x - s_F, x - s_F \rangle + 2\langle x - s_F, s_F - y \rangle + \langle s_F - y, s_F - y \rangle \geq \|x - s_F\|^2, \end{aligned}$$

kde $\langle x - s_F, s_F - y \rangle = 0$, protože $x - s_F \in M_F^\perp$ a $s_F - y \in M_F$. Tedy $s_F(x)$ je nejbližší k x v M_F (má nejmenší normu), a tedy $s_F(x) = P(x)$. Vyjdeme z nerovnosti výše pro $y = 0$ a dostaneme:

$$\|x\|^2 = \|x - s_F(x)\|^2 + \|s_F(x)\|^2 \geq \|s_F(x)\|^2 = \sum_{\alpha \in F} (\hat{x}(\alpha))^2.$$

Tím je důkaz dokončen. □

Definice 11.13. Nechť (X, ϱ) a (Y, σ) jsou metrické prostory. Zobrazení $f\colon X \to Y$ je izometrie právě tehdy, když $\forall x_1, x_2 \in X$ platí $\varrho(x_1, x_2) = \sigma(f(x_1), f(x_2))$.

Lemma. Nechť $(X, \varrho), (Y, \sigma)$ jsou metrické prostory, X je úplný a $f\colon X \to Y$ je spojité. Nechť X_0 je hustá podmnožina X a nechť $f(X_0)$ je hustá podmnožina Y. Nechť f je izometrie X_0 na Y, pak f je izometrie X na Y.

Důkaz. Nejprve dokážeme, že se jedná o izometrii. Nechť $x, a \in X$. X_0 je hustá v X, a tedy existuje $x_n \in X_0$ tak, že $x_n \to x$. Dále existuje $a_n \in X_0$ tak, že $a_n \to a$. Víme, že f je izometrie na X_0, takže platí $\varrho(x_n, a_n) = \sigma(f(x_n), f(a_n))$. Pro $n \to \infty$ dostaneme, jelikož f je spojitá, že $\varrho(x, a) = \sigma(f(x), f(a))$. Nyní dokážeme, že f je na Y. Nechť $y \in Y$. $f(X_0)$ je hustá v Y, a tedy existuje $x_n \in X_0$ tak, že $f(x_n) \to y$. $f(x_n)$ je tím pádem cauchyovská v Y, a jelikož je f izometrie, tak i x_n je cauchyovská v X. X je úplný, takže existuje $x \in X$ tak, že $x_n \to x$. Dále f je spojitá, a tedy $f(x_n) \to f(x)$. Z toho $f(x) = y$. □

Poznámka. Bez důkazu využijeme v následující větě faktu, že $A = \{\{a_n\}_{n=1}^\infty \in l^2 \colon \exists k \in \mathbb{N}\colon a_n = 0 \ \forall n \geq k\}$ je hustá v l^2.

Věta 11.14 (Riesz-Fischerova věta)**.** Nechť H je Hilbertův prostor a $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$ je ortonormální množina. Nechť P je prostor všech konečných lineárních kombinací vektorů u_i. Potom $\forall x \in H$ platí $\sum_{i=1}^{\infty} |\hat{x}(i)|^2 \leq \|x\|^2$. Zobrazení $x \to \hat{x}$ je spojité lineární zobrazení z H na l^2, jehož restrikce na $\overline{P}$ je izometrie $\overline{P}$ na l^2.

Důkaz. Z předchozí věty víme, že $\sum_{i=1}^{n} |\hat{x}(i)|^2 \leq \|x\|^2$. Limitním přechodem pro $n \to \infty$ dostaneme $\sum_{i=1}^{\infty} |\hat{x}(i)|^2 \leq \|x\|^2$. Tedy $x \mapsto \hat{x}$ je z H do l^2. Toto zobrazení je lineární, neboť:

$$\begin{aligned} \widehat{x+y}(i) &= \langle x+y, u_i\rangle = \langle x, u_i\rangle + \langle y, u_i\rangle = \hat{x}(i) + \hat{y}(i), \\ \widehat{\alpha x}(i) &= \langle \alpha x, u_i\rangle = \alpha\langle x, u_i\rangle = \alpha\hat{x}(i). \end{aligned}$$

Dále pro $x, y \in H$ platí $\|x-y\|^2 \geq \sum_{i=1}^{\infty} |\hat{x}(i) - \hat{y}(i)|^2$, a tedy je zobrazení $x \mapsto \hat{x}$ spojité. Podle předešlé věty je toto zobrazení také izometrie na P. Využijeme předešlého lemmatu, kde $X = \overline{P}$, $X_0 = P$ a $Y = l^2$. X je úplný, neboť je to uzavřená podmnožina úplného prostoru. Dále X_0 je hustá v X a $x \mapsto \hat{x}$ je spojité. Dále $f(X_0) = \{\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^2 \colon \exists k \in \mathbb{N} \colon a_n = 0 \ \forall n \geq k\}$ je dle předchozí poznámky hustá v l^2. □

Definice 11.15. Nechť H je Hilbertův prostor a $h_i \in H$, $i \in \mathbb{N}$. Řekneme, že $\sum_{i=1}^{\infty} h_i$ konverguje k $s \in H$, pokud $\lim_{n\to\infty} \|s - \sum_{i=1}^{n} h_i\| = 0$.

Věta 11.16 (O maximální ortonormální množině)**.** Nechť H je Hilbertův prostor a $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$ je ortonormální množina. Následující podmínky jsou ekvivalentní:

1. $\{u_i\}$ je maximální ortonormální množina.
2. Množina P všech konečných lineárních kombinací prvků z $\{u_i\}$ je hustá v H.
3. $\forall x \in H$ platí $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\hat{x}_i|^2$.
4. $\forall x, y \in H$ platí $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \hat{x}_i \hat{y}_i$.
5. $\forall x \in H$ platí $x = \sum_{i=1}^{\infty} \hat{x}_i u_i$.

Důkaz. Potupně dokážeme jednotlivé implikace:

- 1 ⇒ 2: Pokud je $\{u_i\}$ maximální ortonormální množina, tak $\forall v \in H$ a $\forall i \in \mathbb{N}$ platí $\langle u_i, v\rangle = 0$. Dokážeme tuto implikaci sporem. Nechť $\overline{P} \neq H$. $\overline{P}$ je uzavřený lineární podprostor H. Podle předchozího důsledku existuje $u \in \overline{P}^{\perp}$ tak, že $u \neq 0$. Pak ale $\forall i \in \mathbb{N}$ je $\langle u, u_i\rangle = 0$, čímž dostáváme spor s maximální ortonormalitou.
- 2 ⇒ 3: Podle předchozí věty je $x \mapsto \hat{x}$ izometrie $\overline{P} = H$ na l^2. Tedy $\|x\|^2 = \|\hat{x}\|_{l^2}^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\hat{x}_i|^2$.
- 3 ⇒ 4: Platí:

  $\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 = \langle x, x\rangle + 2\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle - (\langle x, x\rangle - 2\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle) = 4\langle x, y\rangle$.

  Analogicky:

  $$\|\hat{x}+\hat{y}\|^2 - \|\hat{x}-\hat{y}\|^2 = 4\langle \hat{x}, \hat{y}\rangle = 4\sum_{i=1}^{\infty} \hat{x}_i \hat{y}_i.$$

  Podle třetího bodu platí, že $\|x+y\|^2 = \|\hat{x}+\hat{y}\|^2$ a $\|x-y\|^2 = \|\hat{x}-\hat{y}\|^2$, a tedy $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \hat{x}_i \hat{y}_i$.

- 4 ⇒ 3: Volme $y = x$. Ihned dostaneme požadovanou nerovnost.
- 5 ⇒ 1: Nechť $x \in H$ a $\langle x, u_i \rangle = 0\ \forall i \in \mathbb{N}$. Chceme dokázat, že $x = 0$. Zřejmě:
$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \hat{x}_i u_i = \sum_{i=1}^{\infty} 0 u_i = 0.$$
- 3 ⇒ 5: Chceme ukázat, že $y^n = \sum_{i=1}^{n} \hat{x}_i u_i$ jde k x pro $n \to \infty$. To můžeme zapsat tak, že $\|y^n - x\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Pro $i \leq n$ platí:
$$\langle x - y^n, u_i \rangle = \langle x, u_i \rangle - \sum_{j=1}^{n} \hat{x}_j \langle u_j, u_i \rangle = \langle x, u_i \rangle - \hat{x}_i = 0.$$
Pro $i > n$ platí:
$$\langle x - y^n, u_i \rangle = \langle x, u_i \rangle - \sum_{j=1}^{n} \hat{x}_j \langle u_j, u_i \rangle = \langle x, u_i \rangle.$$
Použijeme třetí bod pro $x - y^n$. Dostaneme:
$$\|x - y^n\|^2 = \sum_{i=n+1}^{\infty} |\hat{x}_i|^2 \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Tím je věta dokázána. □

11.3 Trigonometrické řady

Definice 11.17. Nechť $f \in L^2(0, 2\pi)$. Potom čísla
$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx)\, \mathrm{d}x,\ \ k \in \mathbb{N}_0,$$
$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx)\, \mathrm{d}x,\ \ k \in \mathbb{N},$$
nazýváme Fourierovy koeficienty funkce f. Trigonometrickou řadu
$$F_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$
nazveme Fourierovou řadou funkce f.

Věta 11.18 (O ortonormalitě trigonometrických funkcí)**.** Nechť $m, n \in \mathbb{N}$. Pak platí:
$$\int_0^{2\pi} \sin(nx) \sin(mx)\, \mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \pi, & m = n, \end{cases}$$
$$\int_0^{2\pi} \cos(nx) \cos(mx)\, \mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \pi, & m = n, \end{cases}$$
$$\int_0^{2\pi} \sin(nx) \cos(mx)\, \mathrm{d}x = 0.$$

Důkaz. Platí následující vzorce:

$$\begin{aligned}\sin\alpha\sin\beta &= \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)),\\ \cos\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)),\\ \sin\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)).\end{aligned}$$

Pro $n \neq m$ platí:

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\sin(nx)\sin(mx)\,\mathrm{d}x &= \int_0^{2\pi}\frac{1}{2}(\cos((n-m)x)-\cos((n+m)x))\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin((n-m)x)}{n-m}\right]_0^{2\pi}-\frac{1}{2}\left[\frac{\sin((n+m)x)}{n+m}\right]_0^{2\pi}=0.\end{aligned}$$

Pro $n = m$ máme:

$$\int_0^{2\pi}\sin^2(nx)\,\mathrm{d}x=\pi.$$

Zbylé rovnosti by se dokázali analogicky dle vzorců výše. □

Věta 11.19 (O maximalitě trigonometrických funkcí)**.** Systém trigonometrických funkcí $\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(nx)\right\}_{n=1}^{\infty}$, $\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(nx)\right\}_{n=1}^{\infty}$ a $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ tvoří maximální ortonormální množinu v $L^2(0,2\pi)$.

Důsledek. Nechť a_k, b_k jsou Fourierovy koeficienty $\forall f \in L^2(0,2\pi)$. Pak

$$f(x)=F_f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos(kx)+b_k\sin(kx))$$

ve smyslu rovnosti L^2 funkcí. Tedy v $L^2(0,2\pi)$ platí:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos(kx)+b_k\sin(kx)).$$

Navíc:

$$\int_0^{2\pi}|f(x)|^2\,\mathrm{d}x=\pi\frac{a_0^2}{2}+\pi\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2).$$

Speciálně platí, že trigonometrikcé polynomy jsou husté v $L^2(0,2\pi)$, a tedy i $\mathcal{C}([0,1])$ je husté v $L^2(0,1)$.

12 Stejnoměrná konvergence posloupností a řad funkcí

12.1 Bodová a stejnoměrná konvergence posloupností funkcí

Definice 12.1. Nechť $J \subset \mathbb{R}$ je interval a nechť máme funkce $f\colon J \to \mathbb{R}$ a $f_n\colon J \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Řekneme, že posloupnost funkcí $\{f_n\}$ konverguje:

- bodově k f na J, pokud $\forall x \in J$ platí $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, neboli pokud platí:

$$\forall x \in J\ \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0\colon |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

- stejnoměrně k f na J, pokud platí:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0\ \forall x \in J\colon |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

  Značíme $f_n \rightrightarrows f$ na J.

- lokálně stejnoměrně, pokud pro každý omezený uzavřený interval $[a, b] \subset J$ platí $f_n \rightrightarrows f$ na $[a, b]$. Značíme $f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f$ na J.

Poznámka. Analogicky můžeme definovat stejnoměrnou konvergenci pro metrické prostory. Nechť M je množina, (Q, σ) je metrický prostor a $f, f_n\colon M \to Q$, $n \in \mathbb{N}$. Řekneme, že $\{f_n\}$ konverguje stejnoměrně k f, jestliže platí:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall x \in M\ \forall n \geq n_0\colon \sigma(f_n(x), f(x)) < \varepsilon.$$

Stejně tak bychom mohli zobecnit i následující věty.

Věta 12.2 (Kritérium stejnoměrné konvergence)**.** Nechť $f, f_n\colon J \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Pak $f_n \rightrightarrows f$ na J právě tehdy, když platí:

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in J} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

Důkaz. Pokud $f_n \rightrightarrows f$ na J, tak platí:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0\ \forall x \in J\colon |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Tento výrok je ekvivalentní následujícímu výroku:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0\colon \sup_{x\in J} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Toto je ale zřejmě ekvivalentní $\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in J} |f_n(x) - f(x)| = 0$. □

Poznámka. Nechť $f, f_n\colon J \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, jsou spojité funkce. Podle předchozí věty máme, že $f_n \rightrightarrows f$ na J právě tehdy, když $f_n \to f$ v metrickém prostoru $\mathcal{C}(J)$ se supremovou metrikou.

Věta 12.3 (Bolzano-Cauchyova podmínka pro stejnoměrnou konvergenci)**.** Nechť $f_n\colon J \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Pak $\{f_n\}$ je stejnoměrně konvergentní právě tehdy, když platí:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall m, n \geq n_0\ \forall x \in J\colon |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

Důkaz. Postupně dokážeme obě implikace:

1. Pravá implikace: Nechť $f_n \rightrightarrows f$ na J. Pak platí:
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0\ \forall x \in J\colon |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$
Tedy $\forall m, n \geq n_0$ a $\forall x \in J$ platí:
$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| < 2\varepsilon,$$
čímž dostáváme, co jsme chtěli.

2. Levá implikace: Předpokládejme nyní, že platí:
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall m, n \geq n_0\ \forall x \in J\colon |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$
Toto použijeme pro pevné $x \in J$ pro $a_n = f_n(x)$. Pak máme:
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall m, n \geq n_0\colon |a_n - a_m| < \varepsilon.$$
Z toho dostáváme, že existuje $\lim_{n\to\infty} f_n(x) \in \mathbb{R}$. Označme $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. V nerovnosti nahoře provedeme limitní přechod pro $m \to \infty$ a dostaneme:
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0\ \forall x \in J\colon |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$
Z tohoto ihned plyne, že $f_n \rightrightarrows f$ na J.

Tímto jsme větu dokázali. □

Věta 12.4 (Moore-Osgoodova věta)**.** Nechť x_0 je krajní bod intervalu J (může být i $\pm\infty$). Nechť $f, f_n\colon J \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, splňují následující:

1. $f_n \rightrightarrows f$ na J,
2. existuje $\lim_{x\to x_0} f_n(x) = a_n \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Pak existují $\lim_{n\to\infty} a_n$ a $\lim_{x\to x_0} f(x)$ a jsou si rovny, neboli:
$$\lim_{n\to\infty} \lim_{x\to x_0} f_n(x) = \lim_{x\to x_0} \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

Důkaz. Z BC podmínky máme:
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall m, n \geq n_0\ \forall x \in J\colon |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$
Provedeme limitní přechod pro $x \to x_0$ a dostaneme:
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall m, n \geq n_0\colon |a_n - a_m| < \varepsilon.$$
$\{a_n\}$ splňují BC podmínku pro posloupnosti, a tedy existuje $\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$. Zbývá dokázat, že existuje $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$. Nechť $\varepsilon > 0$. Z definice $f_n \rightrightarrows f$ dostáváme, že existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $\forall x \in J$ platí $|f_{n_0}(x) - f(x)| < \varepsilon$. Zároveň můžeme předpokládat, že $|a_{n_0} - a| < \varepsilon$. Máme pevnou funkci f_{n_0} a víme, že $\lim_{x\to x_0} f_{n_0}(x) = a_{n_0}$. Tedy existuje $\delta > 0$ tak, že $\forall x \in P(x_0, \delta) \cap J$ platí $|f_{n_0}(x) - a_{n_0}| < \varepsilon$. Nyní $\forall x \in P(x_0, \delta) \cap J$ platí:
$$|f(x) - a| \leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - a_{n_0}| + |a_{n_0} - a| \leq 3\varepsilon.$$
Dostáváme $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$, čímž jsme větu dokázali. □

Důsledek. Nechť $f_n \rightrightarrows f$ na I a nechť f_n jsou spojité na I. Pak f je spojitá na I.

Věta 12.5 (O záměně limity a derivace)**.** Nechť funkce f_n, $n \in \mathbb{N}$, mají vlastní derivaci na intervalu (a, b) a nechť platí:

1. Existuje $x_0 \in (a, b)$ tak, že $\{f_n(x_0)\}$ konverguje.
2. Pro derivaci f_n' platí, že konverguje lokálně stejnoměrně na (a, b).

Pak existuje funkce f tak, že $f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f$ na (a, b), f má vlastní derivaci a $f_n' \overset{loc}{\rightrightarrows} f'$ na (a, b).

Důkaz. Nechť $x_0 \in [c, d] \subset (a, b)$. Ukážeme, že $f_n \rightrightarrows f$ na $[c, d]$. Nechť $\varepsilon > 0$. Z BC podmínky pro f_n' víme, že existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $\forall m, n \geq n_0$ a $\forall x \in J$ platí $|f_n'(x) - f_m'(x)| < \varepsilon$. Zároveň z BC podmínky pro posloupnosti víme, že $\forall m, n \geq n_0$ platí $|f_n(x_0) - f_m(x_0)| < \varepsilon$. Nyní $\forall x \in [c, d]$ máme:

$$\begin{aligned}|f_n(x) - f_m(x)| &\leq |f_n(x) - f_m(x) - (f_n(x_0) - f_m(x_0))| + |f_n(x_0) - f_m(x_0)| \\ &\leq |x - x_0||f_n'(\xi) - f_m'(\xi)| + \varepsilon \leq \varepsilon((d - c) + 1),\end{aligned}$$

kde jsme využili Lagrangeovy věty pro $h(x) - h(x_0)$, kde $h = f_n - f_m$. Dostali jsme, že $f_n \rightrightarrows f$ na $[c, d]$. Zbývá ukázat, že $f_n' \rightrightarrows f'$ na $[c, d]$. Zvolme $z \in [c, d]$ a položme $\varphi_n(x) = \frac{f_n(x) - f_n(z)}{x - z}$ pro $x \in [c - d] \setminus \{z\}$. Nechť $\varepsilon > 0$. Podle BC podmínky existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $\forall m, n \geq n_0$ a $\forall x \in [c, d]$ platí $|f_n'(x) - f_m'(x)| < \varepsilon$. Podobně jako v předchozím kroku máme:

$$|f_n(x) - f_m(x) - (f_n(z) - f_m(z))| = |f_n'(\xi) - f_m'(\xi)||x - z| < \varepsilon|x - z|.$$

Nyní $\forall m, n \geq n_0$ a $\forall x \in [c, d] \setminus \{z\}$ platí:

$$|\varphi_n(x) - \varphi_m(x)| = \left|\frac{f_n(x) - f_n(z) - (f_m(x) - f_m(z))}{x - z}\right| < \frac{\varepsilon|x - z|}{|x - z|} = \varepsilon.$$

φ_n tím pádem konverguje stejnoměrně na $[c, d] \setminus \{z\}$. Dále platí:

$$\lim_{x \to z} \varphi_n(x) = \lim_{x \to z} \frac{f_n(x) - f_n(z)}{x - z} = f_n'(z) \in \mathbb{R}.$$

Tímto jsme ověřili předpoklady Moore-Osgoodovy věty. Podle ní platí:

$$\lim_{n \to \infty} \lim_{x \to z} \frac{f_n(x) - f_n(z)}{x - z} = \lim_{x \to z} \lim_{n \to \infty} \frac{f_n(x) - f_n(z)}{x - z}.$$

Úpravou dostáváme:

$$\lim_{n \to \infty} f_n'(z) = \lim_{x \to z} \frac{f(x) - f(z)}{x - z} = f'(z).$$

Tedy $f_n' \to f'$ a navíc víme, že f_n' konverguje stejnoměrně, a tedy $f_n' \rightrightarrows f'$. Tím jsme větu dokázali. □

12.2 Stejnoměrná konvergence řady funkcí

Definice 12.6. Řekneme, že řada funkcí $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ konverguje stejnoměrně (lokálně stejnoměrně) na intervalu J, pokud posloupnost částečných součtů $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$ konverguje stejnoměrně (lokálně stejnoměrně) na J.

Věta 12.7 (Nutná podmínka stejnoměrné konvergence řady)**.** Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ je řada funkcí definovaná na intervalu J. Pokud $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ konverguje stejnoměrně na J, pak posloupnost funkcí $u_n(x) \rightrightarrows 0$ na J.

Důkaz. Víme, že $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ konverguje stejnoměrně, a tedy i $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$ konverguje stejnoměrně. Takže podle BC podmínky máme:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall m, n \geq n_0\ \forall x \in J\colon |s_n(x) - s_m(x)| < \varepsilon.$$

Speciálně pro $m = n + 1$ máme:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0\ \forall x \in J\colon \left| \sum_{k=1}^{n+1} u_k(x) - \sum_{k=1}^{n} u_k(x) \right| = |u_{n+1}(x)| < \varepsilon.$$

Z toho ihned vidíme, že $u_n \rightrightarrows 0$. □

Věta 12.8 (Weierstrassovo kritérium)**.** Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ je řada funkcí definovaná na intervalu J. Pokud pro $\sigma_n = \sup_{x \in J} |u_n(x)|$ platí, že číselná řada $\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n$ konverguje, pak $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ konverguje stejnoměrně na J.

Důkaz. Nechť $\varepsilon > 0$. Z BC podmínky pro konvergenci $\sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k$ víme, že existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $\forall m, n \geq n_0$, $m > n$, platí $\left|\sum_{k=n+1}^{m} \sigma_k\right| < \varepsilon$. Chceme ověřit BC podmínku pro $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$. Zřejmě $\forall m, n \geq n_0$, $m > n$, a $\forall x \in J$ platí:

$$|s_m(x) - s_n(x)| = \left| \sum_{k=1}^{n} u_k(x) - \sum_{k=1}^{m} u_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |u_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{m} \sigma_k < \varepsilon.$$

Dostáváme, že řada konverguje stejnoměrně. □

Věta 12.9 (O spojitosti a derivování řady funkcí)**.** Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ je řada funkcí definovaná na intervalu (a, b).

1. Nechť u_n jsou spojité na (a, b) a nechť $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ konverguje lokálně stejnoměrně na (a, b). Pak $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ je spojitá na (a, b).

2. Nechť funkce u_n mají vlastní derivaci na (a, b) a nechť platí:

   (a) Existuje $x_0 \in (a, b)$ tak, že $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ konverguje.

   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ konverguje lokálně stejnoměrně na (a, b).

   Pak je funkce $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ dobře definovaná a diferencovatelná na (a, b). Navíc $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \overset{loc}{\rightrightarrows} F(x)$ a $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x) \overset{loc}{\rightrightarrows} F'(x)$ na (a, b).

Důkaz. Dokážeme jednotlivá tvrzení:

1. Funkce $s_k(x) = \sum_{n=1}^{k} u_n(x)$ jsou spojité a s_k konverguje lokálně stejnoměrně na (a,b). Podle důsledku je jejich limita lokálně spojitá, a tedy spojitá. Limita je právě:

$$\lim_{k\to\infty} s_k(x) = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = F(x).$$

2. Na s_k použijeme větu o záměně limity a derivace. To můžeme, neboť $s_k(x_0) = \sum_{n=1}^{k} u_n(x_0)$ konverguje a $s_k'(x) = \sum_{n=1}^{k} u_n'(x)$ konverguje lokálně stejnoměrně na (a,b). Tím pádem podle zmíněné věty existuje $F(x) = \lim_{k\to\infty} s_k(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$. Tato funkce je diferencovatelná, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \overset{loc}{\rightrightarrows} F(x)$ a $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x) \overset{loc}{\rightrightarrows} F'(x)$ na (a,b).

Tím je důkaz hotov. □

Věta 12.10 (Abel-Dirichletovo kritérium pro stejnoměrnou konvergenci)**.** Nechť máme $\{a_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost funkcí definovaných na intervalu J a nechť $\{b_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost funkcí definovaných na J taková, že $b_1(x) \geq b_2(x) \geq \dots \geq 0$. Jestliže je splněna některá z následujících podmínek, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ konverguje stejnoměrně na J.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ konverguje stejnoměrně na J a b_n je omezená.
2. $b_n \rightrightarrows 0$ na J a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ má omezené částečné součty, tedy existuje $K > 0$ tak, že $\forall m \in \mathbb{N}$ a $\forall x \in J$ platí $|s_m(x)| = |\sum_{i=1}^{m} a_i(x)| < K$.

Důkaz. Dokážeme postupně jednotlivá tvrzení. Začneme druhým:

1. Nechť $\varepsilon > 0$. Nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $\forall n \geq n_0$ a $\forall x \in J$ platí $|b_n(x)| < \varepsilon$. Nechť $m, n \geq n_0$. Označme $\sigma_i = \sum_{j=n}^{i} a_j(x)$. Pak:

$$|\sigma_i(x)| \leq \left| \sum_{j=1}^{i} a_j(x) - \sum_{j=1}^{n-1} a_j(x) \right| \leq K + K = 2K.$$

   Nyní $\forall m, n \geq n_0$ a $\forall x \in J$ platí:

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{j=n}^{m} a_j(x)b_j(x) \right| &= |\sigma_n b_n + (\sigma_{n+1} - \sigma_n)b_{n+1} + \dots + (\sigma_m - \sigma_{m-1})b_m| \\
&= |\sigma_n \underbrace{(b_n - b_{n+1})}_{\geq 0} + \sigma_{n+1} \underbrace{(b_{n+1} - b_{n+2})}_{\geq 0} + \dots + \sigma_{m-1} \underbrace{(b_{m-1} - b_m)}_{\geq 0} + \sigma_m \underbrace{b_m}_{\geq 0}| \\
&\leq \sup_{j\in\{n,\dots,m\}} |\sigma_j(x)|((b_n - b_{n+1}) + (b_{n+1} - b_{n+2}) + \dots + (b_{m-1} - b_m) + b_m) \\
&= \sup_{j\in\{n,\dots,m\}} |\sigma_j(x)||b_n(x)| \leq 2K\varepsilon.
\end{aligned}$$

   Podle BC podmínky tedy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ konverguje stejnoměrně na J.

2. Nechť $\varepsilon > 0$. Z BC podmínky pro stejnoměrnou konvergenci existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $\forall m, n \geq n_0$ platí $\left|\sum_{j=n}^{m} a_j(x)\right| < \varepsilon$. Tedy pro $\sigma_i(x) = \sum_{j=n}^{i} a_j(x)$ platí $|\sigma_i(x)| < \varepsilon$. Analogicky odhadu výše máme:

$$\left|\sum_{j=n}^{m} a_j(x) b_j(x)\right| \leq \sup_{j \in \{n,\dots,m\}} |\sigma_j||b_n(x)| \leq \varepsilon \sup_{x \in J} |b_1(x)|.$$

Tedy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$ splňuje BC podmínku, a tedy konverguje stejnoměrně na J.

Tímto jsme větu dokázali. □

12.3 Mocninné řady

Definice 12.11. Nechť $x_0 \in \mathbb{R}$, $a_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$. Řadu funkcí $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ nazveme mocninnou řadou s koeficienty a_n a středem x_0.

Definice 12.12. Poloměrem konvergence mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ nazveme $R = \sup\{r \in [0, \infty)\colon \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ konverguje $\forall x \in [x_0 - r, x_0 + r]\}$.

Věta 12.13 (O poloměru konvergence). Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ je mocninná řada a $R \in [0, \infty]$ je její poloměr konvergence. Pak řada konverguje absolutně $\forall x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ a diverguje $\forall x$ taková, že $|x - x_0| > R$. Navíc platí:

$$R = \frac{1}{\limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|}},$$

kde výrazem $\frac{1}{0}$ rozumíme ∞ a výrazem $\frac{1}{\infty}$ rozumíme 0. Pokud navíc víme, že existuje $\lim_{n \to \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$, pak $R = \lim_{n \to \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$.

Důkaz. Položme $R = \frac{1}{\limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$. Uvažujme nejprve, že $R \in (0, \infty)$. Pak $\forall x$ takové, že $|x - x_0| < R$ platí:

$$\limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n (x - x_0)^n|} = |x - x_0| \limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{|x - x_0|}{R} < 1.$$

Dle odmocninového kritéria řada konverguje absolutně. Pro $\forall x$ takové, že $|x - x_0| > R$ máme:

$$\limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n (x - x_0)^n|} = \frac{|x - x_0|}{R} > 1,$$

a tedy řada diverguje. Pokud $\limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$, pak $R = \infty$ a $\forall x \in \mathbb{R}$ dostaneme:

$$\limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n (x - x_0)^n|} = 0.$$

Řada tedy konverguje absolutně. Je-li $\limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$, pak $R = 0$ a $\forall x \in \mathbb{R}$ platí:

$$\limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n (x - x_0)^n|} = \infty.$$

Řada tím pádem diverguje. Nechť existuje $A = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$, pak:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}(x-x_0)^{n+1}}{a_n(x-x_0)^n} \right| = |x-x_0| \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|x-x_0|}{A}.$$

Pro $\frac{|x-x_0|}{A} < 1$ řada konverguje a pro $\frac{|x-x_0|}{A} > 1$ řada diverguje a zřejmě $A = R$. □

Věta 12.14 (O stejnoměrné konvergenci mocninné řady)**.** Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ je mocninná řada s poloměrem konvergence $R > 0$. Řada konverguje lokálně stejnoměrně na $(x_0 - R, x_0 + R)$.

Důkaz. Nechť $0 < r < R$. Podle předchozí věty, kde $x = x_0 + r$ platí, že $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ konverguje absolutně. Nyní $\forall x \in [x_0 - r, x_0 + r]$ máme $|a_n(x-x_0)^n| \leq |a_n| r^n$. Víme, že $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$ konverguje, tedy podle Weierstrassova kritéria $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ konverguje stejnoměrně na $[x_0 - r, x_0 + r]$. Tím pádem konverguje lokálně stejnoměrně na $(x_0 - R, x_0 + R)$. □

Věta 12.15 (O derivaci mocninné řady)**.** Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ je mocninná řada s poloměrem $R > 0$. Pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n(x-x_0)^{n-1}$ je také mocninná řada se stejným středem a poloměrem konvergence. Navíc pro $x \in \mathbb{R}$ takové, že $|x - x_0| < R$, platí:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n(x-x_0)^{n-1}.$$

Důkaz. Položme $R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$. Víme, že to jistě je poloměr konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$. Nyní:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n n(x-x_0)^{n-1} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} a_n n(x-x_0)^n}{(x-x_0)},$$

kde $x \neq x_0$. Poloměr konvergence druhé řady je podle věty o poloměru konvergence řady právě:

$$\frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n| n}} = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}},$$

neboť $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. Tedy řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n(x-x_0)^n$ má stejný poloměr konvergence. Chceme použít větu o spojitosti a derivování řady funkcí na $(x_0 - R, x_0 + R)$. $u_n(x) = a_n(x-x_0)^n$ má vlastní derivaci $a_n n(x-x_0)^{n-1}$. Dále $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x_0)$ konverguje. Navíc $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n(x-x_0)^{n-1}$ konverguje lokálně stejnoměrně na $(x_0 - R, x_0 + R)$ dle předchozí věty. Tím pádem dle věty o spojitosti a derivování řady funkcí existuje $F'(x)$ pro $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ a $F'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n(x-x_0)^{n-1}$. □

Důsledek (O integrování mocninné řady)**.** Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ je mocninná řada a $R > 0$. Pak $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}$ je mocninná řada se stejným poloměrem a navíc platí:

$$\int \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1} + C$$

na $(x_0 - R, x_0 + R)$.

Důkaz. Dle předchozí věty jistě platí:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}+C\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n.$$

Tím je důkaz hotov. □

Věta 12.16 (Abelova věta)**.** Nechť $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ je mocninná řada s poloměrem konvergence $R>0$. Nechť navíc $\sum_{n=0}^{\infty}a_nR^n$ konverguje. Pak řada $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ konverguje stejnoměrně na $[x_0,x_0+R]$ a $\sum_{n=0}^{\infty}a_nR^n=\lim_{r\to R^-}\sum_{n=0}^{\infty}a_nr^n$, tedy je zprava spojitá.

Důkaz. Zřejmě:

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\underbrace{a_nR^n}_{a_n(x)}\underbrace{\frac{(x-x_0)^n}{R^n}}_{b_n(x)}.$$

Ověříme, že $b_n\geq b_{n+1}\geq 0$. Jistě:

$$\frac{(x-x_0)^n}{R^n}\geq\frac{(x-x_0)^{n+1}}{R^{n+1}}\Leftrightarrow 1\geq\frac{(x-x_0)}{R},$$

což platí. Dále $|b_0|=1$, takže b_n je omezená. Víme, že $\sum_{n=0}^{\infty}a_nR^n$ konverguje. Podle BC podmínky pro konvergenci reálné řady máme:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists n_0\in\mathbb{N}\ \forall m,n\geq n_0\colon\ \left|\sum_{k=n}^{m}a_kR^k\right|<\varepsilon.$$

Ukážeme, že $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nR^n$ konverguje stejnoměrně podle BC podmínky pro stejnoměrnou konvergenci. K ε volme n_0 jako výše. Pak $\forall m,n\geq n_0$ a $\forall x\in[x_0,x_0+R]$ platí:

$$\left|\sum_{k=n}^{m}a_k(x)\right|=\left|\sum_{k=n}^{m}a_kR^k\right|<\varepsilon.$$

Dle Abel-Dirichletova kritéria platí, že $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ konverguje stejnoměrně na $[x_0,x_0+R]$. Funkce $a_n(x-x_0)^n$ jsou spojité a $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ konverguje stejnoměrně, a tedy $F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ je spojitá na $[x_0,x_0+R]$. Tedy:

$$\lim_{r\to R^-}\sum_{n=0}^{\infty}a_nr^n=\lim_{x\to x_0+R^-}F(x)=F(x_0+R)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nR^n.$$

Tím jsme větu dokázali. □

13 Absolutně spojité funkce a funkce s konečnou variací

13.1 Derivace monotónní funkce

Definice 13.1. Nechť $x \in (a,b)$ a $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$. Definujme limes superior a limes inferior jako:

$$\limsup_{h\to 0} f(x+h) = \lim_{h\to 0} \sup_{y\in P(x,h)} f(y),$$
$$\liminf_{h\to 0} f(x+h) = \lim_{h\to 0} \inf_{y\in P(x,h)} f(y).$$

Poznámka. Platí následující:

$$\exists \lim_{h\to 0} f(x+h) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \limsup_{h\to 0} f(x+h) = \liminf_{h\to 0} f(x+h).$$

Důkaz je možné najít v sekci teoretických příkladů.

Definice 13.2. Nechť I je interval, x je vnitřní bod I a $f\colon I \to \mathbb{R}$ je funkce. Definujeme horní a dolní derivaci funkce f v bodě x jako:

$$\overline{D}f(x) = \limsup_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$
$$\underline{D}f(x) = \liminf_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Věta 13.3 (Míra vzoru a obrazu)**.** Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval. Nechť $f\colon I \to \mathbb{R}$ je neklesající funkce, $M \subset I$ je měřitelná a $c > 0$.

1. Je-li $\overline{D}f(x) > c$ na M, potom $\lambda^*(f(M)) \geq c\lambda(M)$.
2. Je-li $\underline{D}f(x) < c$ na M, potom $\lambda^*(f(M)) \leq c\lambda(M)$.

Věta 13.4 (Derivace monotónní funkce)**.** Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval a $f\colon I \to \mathbb{R}$ je monotónní funkce. Potom ve skoro každém bodě $x \in I$ existuje $f'(x)$.

Důkaz. Označme:
$$M_{p,q} = \{x \in I\colon \underline{D}f(x) < p < q < \overline{D}f(x)\}.$$
Podle předchozí věty platí:

$$q\lambda(M_{p,q}) \leq \lambda^*(f(M_{p,q})) \leq p\lambda(M_{p,q}).$$

Jelikož $p < q$, tak $\lambda(M_{p,q}) = 0$. Ukážeme, že pro množinu bodů nediferencovatelnosti M platí, že $M = \bigcup_{p,q\in\mathbb{Q},p<q} M_{p,q}$. Spočetné sjednocení nulových množin je nulová množina, a tedy důkaz věty bude hotov. Začneme pravou inkluzí. Nechť $x \in M_{p,q}$. Pak $\underline{D}f(x) < \overline{D}f(x)$, a tedy neexistuje $f'(x)$. Přejdeme k opačné inkluzi. Nechť naopak $x \in M$. Pak neexistuje $f'(x)$, a tedy $A = \underline{D}f(x) < \overline{D}f(x) = B$. K $A < B$ nalezneme $p, q \in \mathbb{Q}$ tak, že $A < p < q < B$. Pak $x \in M_{p,q}$. $\square$

Poznámka. Uveďme několik poznámek:

1. Každá monotónní funkce z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$ má nejvýše spočetně mnoho bodů nespojitosti.
2. Každá monotónní funkce z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$ má nejvýše spočetně mnoho intervalů, na kterých je konstantní.
3. Každá monotónní funkce je měřitelná.

Důkaz. Pro důkaz prvního tvrzení bez újmy na obecnosti předpokládejme, že f je neklesající. Každá monotónní funkce má limitu zleva i zprava. Zřejmě $\forall x \in \mathbb{R}$ platí:

$$\lim_{y\to x^-} f(y) \le f(x) \le \lim_{y\to x^+} f(y).$$

Mějme nyní $D = \{x \in \mathbb{R}\colon \lim_{y\to x^-} f(y) < \lim_{y\to x^+} f(y)\}$. $\forall x \in D$ označme $a_x = \lim_{y\to x^-} f(y)$ a $b_x = \lim_{y\to x^+} f(y)$. Máme-li $x, y \in D$, $x < y$, pak:

$$a_x < b_x \le a_y < b_y.$$

Tím pádem je systém otevřených intervalů $\{(a_x, b_x), x \in D\}$ disjunktní, a tedy spočetný. Tedy i množina D je spočetná. Nyní dokážeme třetí tvrzení. Nechť $c \in \mathbb{R}$. Množina $\{x \in [a,b]\colon f(x) > c\}$ je interval, a tedy je to měřitelná množina. Takže f je také měřitelná. □

Věta 13.5 (Integrál derivace monotónní funkce)**.** Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ a $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ je neklesající funkce. Potom f' je lebesgueovsky měřitelná na $[a,b]$ a platí:

$$\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x \le f(b) - f(a).$$

Důkaz. f je neklesající, a tedy měřitelná. Dodefinujeme $f(x) = f(b)$ pro $x > b$. Z předešlé věty víme, že pro skoro všechna x existuje $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x)$. Definujme funkce $g_n(x) = \frac{f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)}{\frac{1}{n}}$. Tyto funkce jsou měřitelné a pro skoro všechna x existuje $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = f'(x)$. Tedy $f'(x)$ je měřitelná, neboť limita měřitelných funkcí je měřitelná. Dále f je neklesající, a tím pádem $g_n(x) \ge 0$ a $f'(x) \ge 0$. Podle Fatouova lemmatu platí:

$$\begin{aligned}
\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x &= \int_a^b \liminf_{n\to\infty} g_n(x)\,\mathrm{d}x \le \liminf_{n\to\infty} \int_a^b g_n(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \liminf_{n\to\infty} \int_a^b n\left(f\left(x+\frac{1}{n}\right) - f(x)\right)\,\mathrm{d}x \\
&= \liminf_{n\to\infty} \left(n\int_{a+\frac{1}{n}}^{b+\frac{1}{n}} f(x)\,\mathrm{d}x - n\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right) \\
&= \liminf_{n\to\infty} \left(n\int_b^{b+\frac{1}{n}} f(x)\,\mathrm{d}x - n\int_a^{a+\frac{1}{n}} f(x)\,\mathrm{d}x\right) \\
&\le \liminf_{n\to\infty} \left(f(b) - n\int_a^{a+\frac{1}{n}} f(a)\,\mathrm{d}x\right) = f(b) - f(a).
\end{aligned}$$

Tím také dostáváme, že f' je integrovatelná a důkaz je hotov. □

13.2 Funkce s konečnou variací

Definice 13.6. Nechť $[a, b] \subset \mathbb{R}$ je uzavřený interval a nechť $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$. Definujeme:

$$V^+(f, a, b) = \sup_D \left\{ \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1}))^+ \right\}, \qquad \text{(Kladná variace)}$$

$$V^-(f, a, b) = \sup_D \left\{ \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1}))^- \right\}, \qquad \text{(Zaporná variace)}$$

$$V(f, a, b) = \sup_D \left\{ \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| \right\}, \qquad \text{(Totální variace)}$$

kde supremum bereme přes všechna dělení $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ intervalu $[a, b]$ tvaru $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$. Zavedeme značení $V_f^+(x) = V^+(f, a, x)$, $V_f^-(x) = V^-(f, a, x)$ a $V_f(x) = V(f, a, x)$. Řekneme, že funkce f má na intervalu $[a, b]$ konečnou variaci, jestliže $V(f, a, b) < \infty$. Množinu všech funkcí s konečnou variací značíme $BV([a, b])$.

Poznámka. Nechť $[a, b] \subset \mathbb{R}$ a $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$. Pak:

1. Je-li f neklesající na $[a, b]$, pak $V(f, a, b) = V^+(f, a, b) = f(b) - f(a)$.
2. $V(f, a, b) \geq |f(a) - f(b)|$.
3. Je-li $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$, pak:
$$V(f, a, b) = \sum_{i=1}^n V(f, x_{i-1}, x_i).$$

Věta 13.7 (Vztah omezené variace a monotonie)**.** Nechť $[a, b] \subset \mathbb{R}$ a nechť $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$.

1. Má-li f konečnou variaci na $[a, b]$, pak $V_f(x) = V_f^+(x) + V_f^-(x)$ a $f(x) - f(a) = V_f^+(x) - V_f^-(x)$.
2. $f \in BV([a, b])$ právě tehdy, když existují neklesající funkce $u, v \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ tak, že $f = v - u$.

Důkaz. Postupně dokážeme jednotlivá tvrzení:

1. Nechť $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ je dělení intervalu $[a, b]$ tvaru $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$. Bez újmy na obecnosti stačí ukázat pro $x = b$. Platí:
$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| &= \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1}))^+ + \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1}))^- \\ &\leq V^+(f, a, b) + V^-(f, a, b).\end{aligned}$$

Vezmeme $\sup_D$ a dostaneme:

$$V(f,a,b) \le V^+(f,a,b) + V^-(f,a,b).$$

Analogicky:

$$V(f,a,b) \ge \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| = \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1}))^+ + \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1}))^-.$$

Opět aplikujeme $\sup_D$ na obě strany a dostaneme:

$$V(f,a,b) \ge V^+(f,a,b) + V^-(f,a,b).$$

Tím jsme dokázali první rovnost. Přejdeme nyní k druhé. Zřejmě:

$$\begin{aligned} f(b) - f(a) &= \sum_{i=1}^{n} f(x_i) - f(x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1}))^+ - \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1}))^- \\ &\le V^+(f,a,b) - \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1}))^-. \end{aligned}$$

Aplikací $\inf_D$ získáme:

$$f(b) - f(a) \le V^+(f,a,b) - \sup_D \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1}))^- = V^+(f,a,b) - V^-(f,a,b).$$

Analogicky:

$$\begin{aligned} f(b) - f(a) &= \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1}))^+ - \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1}))^- \\ &\ge \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1}))^+ - V^-(f,a,b). \end{aligned}$$

$\sup_D$ pak dá:

$$f(b) - f(a) \ge V^+(f,a,b) - V^-(f,a,b).$$

2. Začneme pravou implikací. Z předchozí části víme, že:

$$f(x) = \underbrace{f(a) + V^+(f,a,x)}_{v(x)} - \underbrace{V^-(f,a,x)}_{u(x)}$$

Nyní $u(x)$ a $v(x)$ jsou zřejmě neklesající a mají konečnou variaci. Přejdeme k důkazu levé implikace. Víme, že $f(x) = v(x) - u(x)$. Tedy:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| &\le \sum_{i=1}^{n} |v(x_i) - v(x_{i-1})| + \sum_{i=1}^{n} |u(x_i) - u(x_{i-1})| \\ &= v(b) - v(a) + u(b) - u(a). \end{aligned}$$

$\sup_D$ dá, že $f \in BV([a,b])$.

Tím jsme větu dokázali. □

Důsledek. Je-li $f \in BV$, pak f má derivaci skoro všude.

Důkaz. Víme, že f můžeme napsat jako $f = u - v$, kde u a v jsou neklesající. Podle věty o derivaci monotónní funkce existují v' a u' skoro všude, a tedy existuje i f' skoro všude. □

13.3 Absolutně spojité funkce

Definice 13.8. Nechť $[a,b] \subset \mathbb{R}$ a $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Řekneme, že f je absolutně spojitá na $[a,b]$, jestliže $\forall \varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro každý systém po dvou disjunktních intervalů $\{(a_j,b_j)\}_{j=1}^n$, $(a_j,b_j) \subset [a,b]$, platí:

$$\sum_{j=1}^n (b_j - a_j) < \delta \Rightarrow \sum_{j=1}^n |f(b_j) - f(a_j)| < \varepsilon.$$

Poznámka. Uveďme následující poznámky:

1. Je-li f lipschitzovská, pak je také absolutně spojitá. Absolutní spojitost dále implikuje konečnou variaci a spojitost. Tyto implikace neplatí naopak.
2. $AC([a,b])$ je lineární prostor.
3. f je absolutně spojitá, a tedy V^+ a V^- jsou absolutně spojité.

Důkaz. Dokážeme nejprve, že lipschitzovská funkce je absolutně spojitá. Nechť $\varepsilon > 0$ a volme $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$, kde L je konstanta lipschitzovskosti. Pak pro libovolný systém disjunktních intervalů $\{(a_j,b_j)\}$, pro které je $\sum_{j=1}^n (b_j - a_j) < \delta$, máme:

$$\sum_{j=1}^n |f(b_j) - f(a_j)| \leq L \sum_{j=1}^n (b_j - a_j) < \varepsilon.$$

Nyní ukážeme, že absolutně spojitá funkce má konečnou variaci. K $\varepsilon = 1$ volme $\delta > 0$ tak, že pro systém po dvou disjunktních intervalů $\{(a_j,b_j)\}_{j=1}^n$ takových, že $\sum_{j=1}^n (b_j - a_j) < \delta$ máme $\sum_{j=1}^n |f(b_j) - f(a_j)| < \varepsilon = 1$. Mějme dělení $D^* = \{x_i\}_{i=0}^n$ intervalu $[a,b]$ tak, že $x_i - x_{i-1} = \frac{\delta}{2}$ pro $i \in \{1,\dots,n-2\}$ a $x_n - x_{n-1} \leq \frac{\delta}{2}$. Pak $n = \left\lfloor \frac{2(b-a)}{\delta} \right\rfloor + 1$. Nyní vezměme libovolné dělení D a nechť $D' = D \cup D^*$ a $D' = \{y_i\}_{i=0}^m$ je tím pádem zjemnění. Nechť $D_i' = \{y_{i_k} \in D'\colon y_{i_k} \in [x_{i-1}, x_i]\}$. Pak platí:

$$\begin{aligned} V(D,f) &= \sum_{i=1}^s |f(z_i) - f(z_{i-1})| \leq V(D',f) = \sum_{i=1}^n \sum_k |f(y_{i_k}) - f(y_{i_{k-1}})| \leq n \\ &= \left\lfloor \frac{2(b-a)}{\delta} \right\rfloor + 1, \end{aligned}$$

kde $\{z_i\}_{i=1}^s$ je dělení D. Je zřejmé, že absolutně spojitá funkce je spojitá, je dokonce stejnoměrně spojitá. Dále je snadné ukázat, že $AC([a,b])$ je lineární prostor. Důkaz třetího tvrzení nebudeme uvádět. $\square$

Věta 13.9 (Integrál derivace absolutně spojité funkce)**.** Nechť $f \in AC([a,b])$. Potom $f \in L^1([a,b])$ a platí:

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Důkaz. Bez újmy na obecnosti stačí uvažovat rostoucí funkci. Je-li totiž f absolutně spojitá, pak má konečnou variaci, a tedy ji můžeme napsat jako $f(x) = v(x) - u(x)$, kde $v(x) = V^+ + x$ a $u(x) = V^- + x$, což jsou rostoucí funkce. Pak bude platit:

$$f(b) - f(a) = v(b) - v(a) - (u(b) - u(a)) = \int_a^b v'(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b u'(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Podle věty o derivaci monotónní funkce víme, že f' existuje skoro všude, tedy:

$$[a,b] = \underbrace{\{x\colon f'(x) > 0\}}_{D} \cup \underbrace{\{x\colon f'(x) = 0\}}_{Z} \cup \underbrace{\{x\colon f'(x) \text{ neexistuje}\}}_{N}.$$

Dokážeme, že $\lambda(f(N)) = 0$, $\lambda(f(Z)) = 0$ a $\int_D f'\,\mathrm{d}\lambda = \lambda(f(D))$. Pak totiž:

$$\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x = \int_D f'(x)\,\mathrm{d}x = \lambda(f(D)) = \lambda(f(D) \cup f(N) \cup f(Z)) = f(b) - f(a),$$

kde poslední rovnost platí, protože f je prostá. Postupně dokážeme následující:

1. Začneme důkazem toho, že $\lambda(N) = 0$. K $\varepsilon > 0$ nalezneme $\delta > 0$ z definice absolutně spojité funkce. K N nalezneme otevřenou množinu G takovou, že $N \subset G$ a $\lambda(G) < \delta$. Tedy $G = \bigcup_{i=1}^{\infty}(a_i, b_i)$, kde (a_i, b_i) jsou po dvou disjunktní a sjednocení může být konečné. Nyní $\forall m \in \mathbb{N}$ platí:

$$\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i) \le \lambda(G) < \delta \Rightarrow \sum_{i=1}^{m} |f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon.$$

   Nyní $m \to \infty$ dává $\sum_{i=1}^{\infty} |f(b_i) - f(a_i)| \le \varepsilon$ a $f(N) \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} f((a_i, b_i))$, a tedy platí:

$$\lambda(f(N)) \le \sum_{i=1}^{\infty} |f(b_i) - f(a_i)| \le \varepsilon \Rightarrow \lambda(f(N)) = 0,$$

   protože toto platí $\forall \varepsilon$.

2. Nechť $\varepsilon > 0$, $f'(x) \le \varepsilon$ na množině Z. Podle věty o míře vzoru a obrazu platí:

$$\lambda(f(Z)) \le \varepsilon\lambda(Z) \le \varepsilon(b - a),$$

   a tedy $\lambda(f(Z)) = 0$.

3. Nechť $\tau > 1$. Označme $D_k = \{x\colon \tau^k \le f'(x) < \tau^{k+1}\}$. Pak $D = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} D_k$. Podle věty o míře vzoru a obrazu platí:

$$\frac{1}{\tau}\int_{D_k} f'(x)\,\mathrm{d}x \le \tau^k \lambda(D_k) \le \lambda(f(D_k)) \le \tau^{k+1}\lambda(D_k) \le \tau \int_{D_k} f'(x)\,\mathrm{d}x.$$

   Přesčítáním přes všechna $k \in \mathbb{Z}$ dostaneme:

$$\frac{1}{\tau}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_{D_k} f'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\tau}\int_D f'(x)\,\mathrm{d}x \le \sum_{k\in\mathbb{Z}} \lambda(f(D_k)) \le \tau \int_D f'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dále:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \lambda(f(D_k)) = \lambda\left(f\left(\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} D_k\right)\right) = \lambda(f(D)).$$

Limita pro $\tau \to 1^+$ dává:

$$\int_D f'(x)\,\mathrm{d}x = \lambda(f(D)).$$

Tím jsme důkaz dokončili. □

Lemma. Nechť $\theta \in L^1$. Platí:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall M\colon \lambda(M) < \delta \Rightarrow \int_M |\theta|\,\mathrm{d}\lambda < \varepsilon.$$

Důkaz. Dokážeme sporem. Tedy:

$$\exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0, \delta_k = \frac{1}{2^k}, k \in \mathbb{N},\ \exists M_k\colon \lambda(M_k) < \frac{1}{2^k} \Rightarrow \int_{M_k} |\theta|\,\mathrm{d}\lambda \geq \varepsilon.$$

Položme:

$$M = \bigcap_{n=1}^{\infty} \underbrace{\bigcup_{k=n}^{\infty} M_k}_{B}$$

Zřejmě:

$$\lambda(B) \leq \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{2^k} \leq \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Pak:

$$\lambda(M) \leq \lim_{n\to\infty} \lambda\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} M_k\right) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 0.$$

Nyní:

$$0 = \int_M |\theta|\,\mathrm{d}\lambda = \int_a^b \chi_M |\theta|\,\mathrm{d}\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \chi_{\bigcup_{k=n}^{\infty} M_k} |\theta|\,\mathrm{d}\lambda \geq \lim_{n\to\infty} \int_{M_n} |\theta|\,\mathrm{d}\lambda \geq \varepsilon.$$

Tím dostáváme spor a důkaz je hotov. □

Věta 13.10 (Neurčitý Lebesgueův integrál)**.** Nechť $\theta \in L^1([a,b])$ a f je neurčitý Lebesgueův integrál θ, tedy existuje konstanta C tak, že $\forall x \in [a,b]$ platí:

$$f(x) = \int_a^x \theta(t)\,\mathrm{d}t + C.$$

Pak $f \in AC([a,b])$ a $f' = \theta$ skoro všude.

Důkaz. Nejprve dokážeme, že $f \in AC([a,b])$. K $\varepsilon > 0$ zvolme $\delta > 0$ z předchozího lemmatu. Nechť (a_j, b_j) jsou po dvou disjunktní a $\sum_{j=1}^{n}(b_j - a_j) < \delta$. Nyní:

$$\sum_{j=1}^{n} |f(b_j) - f(a_j)| = \sum_{j=1}^{n} \left| \int_{a_j}^{b_j} \theta(t)\,\mathrm{d}t \right| \le \int_{\bigcup_{j=1}^{n}(a_j,b_j)} |\theta(t)|\,\mathrm{d}t < \varepsilon.$$

Tím pádem $f \in AC([a,b])$. Nyní ukážeme, že $f' = \theta$ skoro všude. Z předchozí věty víme, že:

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Dále ale také víme, že platí:

$$f(x) - C = \int_a^x \theta(t)\,\mathrm{d}t.$$

Odečtením obou rovnic dostaneme:

$$C - f(a) = \int_a^x f'(t) - \theta(t)\,\mathrm{d}t.$$

Pokud za x dosadíme a, tak dostaneme $C = f(a)$. Pak $\forall x \in [a,b]$ platí:

$$\int_a^x f'(t) - \theta(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Toto platí pro všechny intervaly, a tedy pro všechny otevřené množiny. Pak to ale také platí pro všechny měřitelné množiny, a tím pádem je $f' = \theta$ skoro všude. ☐

Důsledek. $f \in AC([a,b])$ právě tehdy, když f je neurčitým Lebesgueovým integrálem nějaké $\theta \in L^1([a,b])$.

Věta 13.11 (Per partes pro absolutně spojité funkce)**.** Nechť $f, g \in AC([a,b])$. Pak platí:

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Důkaz. Nejprve dokážeme, že pokud jsou f a g absolutně spojité funkce, pak i fg je absolutně spojitá. Nechť $\varepsilon > 0$. Jelikož $f, g \in AC([a,b])$, tak existuje $\delta > 0$ tak, že $\forall (a_i, b_i) \subset [a,b]$ disjunktní platí:

$$\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i) < \delta \Rightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} |f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon, \\ \sum_{i=1}^{n} |g(b_i) - g(a_i)| < \varepsilon. \end{cases}$$

Dále f a g jsou spojité na uzavřeném intervalu $[a,b]$, a tedy existuje $M > 0$ tak, že $|f| \le M$ a $|g| \le M$. Tedy:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} |f(b_i)g(b_i) - f(a_i)g(a_i)| &= \sum_{i=1}^{n} |f(b_i)g(b_i) - f(a_i)g(a_i) + f(b_i)g(a_i) - f(b_i)g(a_i)| \\ &\le \sum_{i=1}^{n} |f(b_i)g(b_i) - f(b_i)g(a_i)| + \sum_{i=1}^{n} |f(b_i)g(a_i) - f(a_i)g(a_i)| \\ &\le \sum_{i=1}^{n} M|g(b_i) - g(a_i)| + \sum_{i=1}^{n} M|f(b_i) - f(a_i)| \le 2M\varepsilon. \end{aligned}$$

Nyní si uvědomme, že jelikož je $F = fg$ absolutně spojitá, tak podle věty o integrálu derivace absolutně spojité funkce platí:

$$\int_a^b F'(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

Jelikož jsou f a g absolutně spojité, tak existují jejich derivace skoro všude. Dále:

$$F'(x) = (f(x)g(x))' = \underbrace{f'(x)}_{\in L^1([a,b])}\underbrace{g(x)}_{\in \mathcal{C}([a,b])} + \underbrace{f(x)}_{\in \mathcal{C}([a,b])}\underbrace{g'(x)}_{\in L^1([a,b])} \in L^1([a,b]).$$

Nakonec máme:

$$F(b) - F(a) = f(b)g(b) - f(a)g(a) = \int_a^b F'(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Jelikož jsou integrály konečné, tak je můžeme roztrhnout a dostáváme dokazovanou rovnost. $\square$

14 Fourierovy řady

14.1 Základní pojmy

Symbolem $\mathcal{P}_{2\pi}$ budeme značit množinu všech lokálně integrovatelných 2π-periodických funkcí.

Definice 14.1. Nechť $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$, $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ jsou posloupnosti reálných čísel. Pak řadu funkcí

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)),\ \ x \in \mathbb{R},$$

nazveme trigonometrickou řadou. Je-li $n \in \mathbb{N}$, pak

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx))$$

nazýváme trigonometrickým polynomem stupně n.

Poznámka. Již víme, že trigonometrické funkce jsou ortogonální, tedy platí:

$$\int_0^{2\pi} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = 0,$$

kde f a g jsou trigonometrické funkce.

Věta 14.2 (Fourierovy vzorce). Nechť $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$, $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ jsou posloupnosti reálných čísel a řada $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx))$ konverguje stejnoměrně k f na $\mathbb{R}$. Pak platí:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(kx)\,\mathrm{d}x,\ \ k \in \mathbb{N}_0,\\ b_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(kx)\,\mathrm{d}x,\ \ k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Důkaz. Řada stejnoměrně konverguje k f a $a_k\cos(kx)$, $b_k\sin(kx)$ jsou spojité funkce, a tedy i f je spojitá funkce. Spojitá funkce na uzavřeném intervalu je omezená, a tedy existuje $M > 0$ tak, že $|f(x)| \leq M\ \forall x \in [0, 2\pi]$. Dále existuje $j_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $\forall j \geq j_0$ platí:

$$\left|\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{j}(a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx))\right| \leq M + 1.$$

Dále pro $n \in \mathbb{N}_0$ máme:

$$\left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{j}(a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx))\right)\cos(nx) \rightrightarrows f(x)\cos(nx).$$

Navíc:

$$\left|\left(\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{j}(a_k\cos(kx)+b_k\sin(kx))\right)\cos(nx)\right|\leq M+1.$$

Podle Lebesgueovy věty s majorantou $M+1$ dostáváme:

$$\lim_{j\to\infty}\int_0^{2\pi}\left(\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{j}(a_k\cos(kx)+b_k\sin(kx))\right)\cos(nx)\,\mathrm{d}x=\int_0^{2\pi}f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x.$$

Dále také, pokud $j>n$:

$$\begin{aligned}&\lim_{j\to\infty}\int_0^{2\pi}\left(\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{j}(a_k\cos(kx)+b_k\sin(kx))\right)\cos(nx)\,\mathrm{d}x\\&=\lim_{j\to\infty}\int_0^{2\pi}a_n\cos(nx)\cos(nx)\,\mathrm{d}x=a_n\pi.\end{aligned}$$

Tedy skutečně $a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x$. Analogicky:

$$\left(\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{j}(a_k\cos(kx)+b_k\sin(kx))\right)\rightrightarrows f(x)\sin(kx).$$

V důkazu bychom postupovali stejně jako pro a_k. $\square$

Definice 14.3. Nechť $f\in\mathcal{P}_{2\pi}$. Pak posloupnosti reálných čísel $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$, $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ definované

$$\begin{aligned}a_k&=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos(kx)\,\mathrm{d}x,\\b_k&=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\sin(kx)\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

nazýváme Fourierovy koeficienty funkce f. Trigonometrickou řadu

$$Sf(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos(kx)+b_k\sin(kx))$$

nazýváme Fourierovou řadou funkce f. Značíme $f\sim Sf$. Pro $n\in\mathbb{N}$ dále definujeme částečný součet Fourierovy řady následovně:

$$S_nf(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos(kx)+b_k\sin(kx)),\ x\in\mathbb{R}.$$

Důsledek. Nechť $f\in L^2(0,2\pi)$ a a_k, b_k jsou Fourierovy koeficienty. Pak platí:

$$f(x)=Sf(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos(kx)+b_k\sin(kx))$$

ve smyslu rovností L^2 funkcí. Tedy v metrickém prostoru L^2 platí $f(x) = \lim_{n\to\infty} S_n f(x)$. Navíc platí Parsevalova rovnost:

$$\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x = \pi \frac{a_0^2}{2} + \pi \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2).$$

Poznámka. Vyslovme několik poznámek:

- Konvence $\frac{a_0}{2}$ je zavedena, aby byl stejný vzorec pro a_k pro $k \in \mathbb{N}$ i $k = 0$.
- V definici a_k a b_k lze integrovat přes libovolný interval délky 2π, tedy:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_\alpha^{\alpha+2\pi} f(x) \cos(kx) \,\mathrm{d}x.$$

- $f \sim Sf$ označuje pouze fakt, že řada vpravo je Fourierova řada funkce f. Neříká nic o bodové konvergenci řady k f.
- Fourierovy řady lze definovat pro funkce s libovolnou periodou $l > 0$. Řada má pak tvar:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos\left(\frac{2\pi k x}{l}\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi k x}{l}\right) \right),$$

  a vzorce pro a_k, b_k mají odpovídající tvar.

Poznámka. Je-li $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$ sudá, potom $\forall k \in \mathbb{N}$ je $b_k = 0$. Je-li $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$ naopak lichá, pak $\forall k \in \mathbb{N}_0$ je $a_k = 0$. Navíc řadu

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx)$$

nazveme kosinovou řadou. Řadu

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx)$$

pak nazveme sinovou.

14.2 Bodová konvergence Fourierových řad

Definice 14.4. Nechť $n \in \mathbb{N}_0$. Potom funkci $D_n(x) = \frac{1}{2} + \cos(x) + \cdots + \cos(nx)$ nazýváme Dirichletovým jádrem.

Poznámka (Vlastnosti Dirichletova jádra)**.** Uveďme základní vlastnosti funkce D_n:

1. D_n je sudá, spojitá, 2π-periodická a $D_n(0) = n + \frac{1}{2}$.
2. Můžeme psát:
$$D_n(x) = \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}, \ x \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi\}.$$
3. Platí:
$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n(x)\,\mathrm{d}x = \pi.$$

Důkaz. První a třetí vlastnost jsou zřejmé. □

Věta 14.5 (O částečných součtech Fourierovy řady)**.** Nechť $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$ a $n \in \mathbb{N}_0$. Potom $\forall x \in \mathbb{R}$ platí:
$$S_n f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+y)D_n(y)\,\mathrm{d}y = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (f(x+y)+f(x-y))D_n(y)\,\mathrm{d}y.$$

Důkaz. Platí:
$$\begin{aligned}
S_n f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(0t)\,\mathrm{d}t + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(kt)\,\mathrm{d}t\right)\cos(kx) \\
&+ \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(kt)\,\mathrm{d}t\right)\sin(kx) \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos(kt)\cos(kx) + \sin(kt)\sin(kx)\right)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos(kt-kx)\right)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(t-x)\,\mathrm{d}t \\
&= \left| y = t-x,\, \mathrm{d}y = \,\mathrm{d}t \right| = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(y+x)D_n(y)\,\mathrm{d}y \\
&= \underline{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y+x)D_n(y)\,\mathrm{d}y} = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi} f(y+x)D_n(y)\,\mathrm{d}y + \int_{-\pi}^{0} f(y+x)D_n(y)\,\mathrm{d}y\right) \\
&= \underline{\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(f(x+y)+f(x-y))D_n(y)\,\mathrm{d}y.}
\end{aligned}$$

Funkce je 2π-periodická, a tedy můžeme místo $(-\pi-x, \pi-x)$ integrovat přes $(-\pi,\pi)$. V předposlední rovnosti bychom v druhém integrálu provedli substituci "$y = -y$" a využili faktu, že $D_n(-y) = D_n(y)$ ze sudosti funkce. □

Definice 14.6. Jednoduchou funkcí nazýváme funkci ve tvaru $s(x) = \sum_{j=1}^{J} \alpha_J \chi_{E_j}(x)$, kde E_j je měřitelná a $\lambda(E_j) < \infty$.

Poznámka. Množina všech jednoduchých funkcí je hustá v L^2. Definice je ekvivalentní definici v teorii míry a integrálu. Tato definice se nám bude více hodit v následujícím důkazu.

Důkaz. Nechť $f \in L^1$. f můžeme napsat jako $f = f^+ + f^-$. Existuje posloupnost nezáporných jednoduchých funkcí $\{s_k\}$ tak, že $s_k \nearrow f^+$. Analogicky existuje posloupnost nezáporných jednoduchých funkcí $\{s'_k\}$ tak, že $s'_k \nearrow f^-$. Dle Leviho věty pak $\int_X s_k \, \mathrm{d}\mu \to \int_X f^+ \, \mathrm{d}\mu$ a $\int_X s'_k \, \mathrm{d}\mu \to \int_X f^- \, \mathrm{d}\mu$. Pak jistě $\|f^+ - s_k\|_{L^1} \to 0$ a $\|f^- - s'_k\|_{L^1} \to 0$. Funkce $s_k - s'_k$ jsou jednoduché a $\|(s_k - s'_k) - f\|_{L^1} \to 0$. $\square$

Věta 14.7 (Riemann-Lebesgueovo lemma)**.** Nechť $(a, b) \subset \mathbb{R}$ je omezený interval a nechť $f \in L^1(a, b)$. Potom:

$$\lim_{t \to \infty} \int_a^b f(x) \cos(tx) \, \mathrm{d}x = 0,$$
$$\lim_{t \to \infty} \int_a^b f(x) \sin(tx) \, \mathrm{d}x = 0.$$

Důkaz. Důkaz rozdělíme do několika kroků:

1. Nejprve dokážeme pro funkci $\chi_{(c,d)}(x)$, $(c, d) \subset (a, b)$. Jistě:

$$\lim_{t \to \infty} \int_a^b \chi_{(c,d)}(x) \cos(tx) \, \mathrm{d}x = \lim_{t \to \infty} \int_c^d \cos(tx) \, \mathrm{d}x = \lim_{t \to \infty} \frac{\sin(td) - \sin(tc)}{t} = 0.$$

2. Nyní mějme funkci χ_G, G otevřená a $G \subset (a, b)$. Víme, že $G = \bigcup_{j=1}^{\infty} (c_j, d_j)$, kde (c_j, d_j) jsou disjunktní. K $\varepsilon > 0$ existuje $j_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $\lambda\left(\bigcup_{j=j_0}^{\infty} (c_j, d_j)\right) < \varepsilon$. Pak:

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b \chi_G(x) \cos(tx) \, \mathrm{d}x\right| &= \left|\int_a^b \sum_{i=1}^{j_0} \chi_{(c_j,d_j)}(x) \cos(tx) \, \mathrm{d}x\right| \\
&\quad + \left|\int_a^b \sum_{j=j_0+1}^{\infty} \chi_{(c_j,d_j)}(x) \cos(tx) \, \mathrm{d}x\right| \\
&\leq \left|\int_a^b \sum_{i=1}^{j_0} \chi_{(c_j,d_j)}(x) \cos(tx) \, \mathrm{d}x\right| + \underbrace{\int_a^b \sum_{j=j_0+1}^{\infty} \chi_{(c_j,d_j)}(x) \, \mathrm{d}x}_{<\varepsilon} \\
&\xrightarrow{t \to \infty} 0 + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Toto platí $\forall \varepsilon > 0$, a tedy dostáváme, co jsme chtěli.

3. Nyní mějme funkci χ_E, kde E je měřitelná. Nechť $\varepsilon > 0$. Pak existuje G otevřená tak, že $E \subset G$ a $\lambda(G \setminus E) < \varepsilon$. Zřejmě:

$$\left|\int_a^b \chi_E(x)\cos(tx)\,\mathrm{d}x\right| \leq \left|\int_a^b \chi_G(x)\cos(tx)\,\mathrm{d}x\right| + \left|\int_a^b \chi_{G\setminus E}\cos(tx)\,\mathrm{d}x\right| \xrightarrow{t\to\infty} 0+\varepsilon,$$

protože platí:

$$\left|\int_a^b \chi_{G\setminus E}\cos(tx)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b \chi_{G\setminus E}(x)\,\mathrm{d}x \leq \lambda(G\setminus E) < \varepsilon.$$

4. Pokud máme jednoduchou funkci, pak ji můžeme dostat jako konečný součet funkcí z předchozího kroku, a tedy tvrzení platí.

5. Nechť $f \in L^1$. K $\varepsilon > 0$ existuje jednoduchá funkce s tak, že $\int_a^b |f(x) - s(x)|\,\mathrm{d}x < \varepsilon$. Pak:

$$\left|\int_a^b f(x)\cos(tx)\,\mathrm{d}x\right| \leq \left|\int_a^b s(x)\cos(tx)\,\mathrm{d}x\right| + \left|\int_a^b (s(x)-f(x))\cos(tx)\,\mathrm{d}x\right| \xrightarrow{t\to\infty} 0+\varepsilon,$$

neboť platí:

$$\left|\int_a^b (s(x)-f(x))\cos(tx)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |s(x)-f(x)|\,\mathrm{d}x < \varepsilon.$$

Toto platí $\forall\varepsilon$, a tím pádem dostáváme požadované tvrzení.

Tím je důkaz hotov. □

Důsledek. Jsou-li $\{a_k\}$, $\{b_k\}$ Fourierovy koeficienty funkce $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$, pak $\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} b_k = 0$.

Věta 14.8 (Riemannova věta o lokalizaci)**.** Nechť $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$, $x \in \mathbb{R}$ a $s \in \mathbb{R}$. Potom $Sf(x) = s$ právě tehdy, když existuje $\delta \in (0,\pi)$ tak, že platí:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\delta \left(f(x+t)+f(x-t)-2s\right)D_n(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Důkaz. Z věty o částečných součtech Fourierovy řady víme, že platí:

$$S_nf(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (f(x+y)+f(x-y))D_n(y)\,\mathrm{d}y.$$

Dále z vlastností Dirichletova jádra víme, že:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi 2D_n(y)s\,\mathrm{d}y = s.$$

Chceme ukázat, že platí:

$$\begin{aligned}0 &= \lim_{n\to\infty}(S_n f(x) - s) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^\pi (f(x+y) + f(x-y) - 2s)D_n(y)\,\mathrm{d}y\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^\delta (f(x+y) + f(x-y) - 2s)D_n(y)\,\mathrm{d}y\\ &+ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_\delta^\pi (f(x+y) + f(x-y) - 2s)D_n(y)\,\mathrm{d}y = A + B.\end{aligned}$$

Nyní stačí ukázat, že $B = 0$. Přejeme si tedy ukázat:

$$\begin{aligned}0 &= \lim_{n\to\infty}\int_\delta^\pi (f(x+y) + f(x-y) - 2s)\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)y\right)}{2\sin\left(\frac{y}{2}\right)}\,\mathrm{d}y\\ &= \lim_{n\to\infty}\int_\delta^\pi \underbrace{\frac{f(x+y) + f(x-y) - 2s}{2\sin\left(\frac{y}{2}\right)}}_{F(y)}\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)y\right)\,\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

Pokud $F \in L^1$, pak je limita nulová díky Riemann-Lebesgueova lemmatu. Na intervalu (δ, π) platí:

$$|F(y)| \leq \frac{|f(x+y)| + |f(x-y)| + |2s|}{2\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)} \in L^1.$$

Tím jsme větu dokázali. □

Poznámka. Z Riemannovy věty o lokalizaci plyne, že Fourierova řada v bodě závisí pouze na hodnotách funkce f na libovolně malém prstenovém okolí x.

Nechť $x \in \mathbb{R}$ a f je reálná funkce na okolí x. Značíme $f(x+) = \lim_{t\to x^+} f(t)$ a $f(x-) = \lim_{t\to x^-} f(t)$.

Věta 14.9 (Diniovo kritérium)**.** Nechť $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$ a $x \in \mathbb{R}$. Nechť existují vlastní limity $f(x+)$ a $f(x-)$. Dále nechť existují limity:

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{f(x+t) - f(x+)}{t},$$
$$\lim_{t\to 0^+}\frac{f(x-t) - f(x-)}{t}.$$

Potom řada Sf konverguje v bodě x a platí $Sf(x) = \frac{f(x+)+f(x-)}{2}$. Speciálně, má-li f konečné jednostranné derivace v x, pak $Sf(x) = f(x)$.

Důkaz. Podle Riemannovy věty o lokalizaci stačí ukázat, že existuje $\delta > 0$ tak, že platí:

$$\begin{aligned}0 &= \lim_{n\to\infty}\int_0^\delta \left(f(x+t) + f(x-t) - (f(x+) + f(x-))\right)D_n(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \lim_{n\to\infty}\int_0^\delta \left(\frac{f(x+t) - f(x+)}{t} + \frac{f(x-t) - f(x-)}{t}\right)\frac{t}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Z definice $\lim_{t\to 0^+} \frac{f(x+t)-f(x+)}{t}$ a $\lim_{t\to 0^+} \frac{f(x-t)-f(x-)}{t}$ jistě exxistuje $\delta > 0$ tak, že

$$\left(\frac{f(x+t)-f(x+)}{t} + \frac{f(x-t)-f(x-)}{t}\right)$$

je omezený. Dále $\frac{t}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$ je omezená na $[0,\pi]$. Tím pádem platí:

$$F(x) = \left(\frac{f(x+t)-f(x+)}{t} + \frac{f(x-t)-f(x-)}{t}\right)\frac{t}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \in L^1.$$

Podle Riemann-Lebesgueova lemmatu platí:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\delta F(t)\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right) = 0.$$

Tím je důkaz hotov. □

Věta 14.10 (Jordan-Dirichletovo kritérium)**.** Nechť $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$ a nechť $f \in BV([0,2\pi])$. Potom:

1. $\forall x \in [0,2\pi]$ konverguje Fourierova řada a $Sf(x) = \frac{f(x+)+f(x-)}{2}$.
2. Je-li f navíc spojitá na $(a,b) \subset [0,2\pi]$, pak $S_n f \rightrightarrows f$ na (a,b).

Poznámka. Je-li $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$ po částech monotónní na (a,b), nebo po částech $\mathcal{C}^1$ na (a,b), pak $\forall x \in (a,b)$ platí $Sf(x) = \frac{f(x+)+f(x-)}{2}$.

14.3 Stejnoměrná konvergence - Fejérova věta

Definice 14.11. Nechť $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ je posloupnost reálných čísel. Řekneme, že a_n konverguje k $a \in \mathbb{R}$ v Cesarově smyslu, pokud:

$$\sigma_n = \frac{a_0 + \cdots + a_n}{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} a.$$

Poznámka. Pokud platí $a_n \to a$, pak i $a_n \xrightarrow{c} a$. Opačně to ale neplatí, protipříkladem je $(-1)^n$.

Definice 14.12. Nechť $n \in \mathbb{N}_0$. Potom funkci $K_n(x) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^n D_k(x)$ nazýváme Fejérovým jádrem.

Poznámka. Platí:

1. K_n je sudá 2π-periodická funkce a $K_n(0) = \frac{n+1}{2}$.
2. $\int_{-\pi}^{\pi} K_n(x)\,\mathrm{d}x = \pi$.
3. Pro $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, máme:

$$K_n(x) = \frac{1}{2(n+1)}\left(\frac{\sin\left((n+1)\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right)^2,$$

z čehož také dostáváme nezápornost Fejérova jádra.

Definice 14.13. Nechť $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$, $x \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}_0$. Pak výraz

$$\sigma_n f(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} S_k f(x).$$

nazýváme n-tým částečný Fejérův součet f.

Poznámka. Nechť $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$, $x \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}_0$. Pak:

$$\begin{aligned} \sigma_n f(x) &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+y) D_k(y) \,\mathrm{d}y = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) K_n(t) \,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (f(x+t) + f(x-t)) K_n(t) \,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

První rovnost plyne z věty o částečných součtech Fourierovy řady. Třetí rovnost dostaneme prohozením sumy a integrálu a využitím definice Fejérova jádra.

Věta 14.14 (Fejérova věta)**.** Nechť $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$.

1. Jestliže pro nějaké $x \in \mathbb{R}$ existují vlastní limity $f(x+)$ a $f(x-)$, pak:

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n f(x) = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}.$$

2. Je-li f spojitá na (a, b), pak $\sigma_n f$ konverguje lokálně stejnoměrně k f na (a, b).

Důkaz. Postupně dokážeme:

1. Označme $s = \frac{f(x+)+f(x-)}{2}$. Podle předchozí poznámky:

$$\sigma_n f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (f(x+t) + f(x-t)) K_n(t) \,\mathrm{d}t.$$

Dále $s = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 2s K_n(t) \,\mathrm{d}t$, což plyne z faktu, že $\int_{-\pi}^{\pi} K_n(x) \,\mathrm{d}x = \pi$. Tedy:

$$\begin{aligned} \sigma_n f(x) - s &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (f(x+t) + f(x-t) - 2s) K_n(t) \,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\underbrace{\int_0^{\delta} (f(x+t) + f(x-t) - 2s) K_n(t) \,\mathrm{d}t}_{I_1} \right. \\ &\quad \left. + \underbrace{\int_{\delta}^{\pi} (f(x+t) + f(x-t) - 2s) K_n(t) \,\mathrm{d}t}_{I_2} \right). \end{aligned}$$

K $\varepsilon > 0$ najdeme $\delta > 0$ tak, že $\forall t \in (0, \delta)$ platí:

$$|f(x+t) + f(x-t) - (f(x+) + f(x-))| < \varepsilon.$$

Tím pádem zřejmě:

$$|I_1| \leq \frac{1}{\pi}\int_0^\delta \varepsilon |K_n(t)|\,\mathrm{d}t \leq \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \varepsilon K_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\varepsilon}{2},$$

kde jsme využili nezápornosti Fejérova jádra. Dále:

$$|I_2| \leq \frac{1}{\pi}\int_\delta^\pi \underbrace{|f(x+t)+f(x-t)-(f(x+)+f(x-))|}_{\in L^1}\,\mathrm{d}t\frac{1}{2(n+1)}\frac{1}{\left(\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)\right)} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Dostáváme, že $\lim_{n\to\infty}\sigma_n f(x) = \frac{f(x+)+f(x-)}{2}$.

2. Nechť $[c,d] \subset (a,b)$. Chceme ukázat, že $\sigma_n f(x) \rightrightarrows f(x)$ na $[c,d]$. Nalezneme $\gamma > 0$ tak, aby $[c-\gamma, d+\gamma] \subset (a,b)$. Ze stejnoměrné spojitosti f na $[c-\gamma, d+\gamma]$ k $\varepsilon > 0$ najdeme $\delta > 0$, $\delta < \gamma$, tak, že $\forall s,t \in [c-\gamma, d+\gamma]$ platí:

$$|s-t| < \delta \Rightarrow |f(s)-f(t)| < \varepsilon.$$

Tedy $\forall x \in [c,d]$ a $\forall t \in (0,\delta)$ platí:

$$|f(x+t)+f(x-t)-2f(x)| \leq |f(x+t)-f(x)| + |f(x-t)-f(x)| < 2\varepsilon.$$

Analogicky předchozí části:

$$|\sigma_n f(x) - f(x)| = \left|\frac{1}{\pi}\left(\underbrace{\int_0^\delta (f(x+t)+f(x-t)-2f(x))K_n(t)\,\mathrm{d}t}_{I_1}\right.\right.$$
$$\left.\left. + \underbrace{\int_\delta^\pi (f(x+t)+f(x-t)-2f(x))K_n(t)\,\mathrm{d}t}_{I_2}\right)\right|.$$

Nyní:

$$|I_1| \leq \frac{1}{\pi}\int_0^\delta 2\varepsilon K_n(t)\,\mathrm{d}t \leq \varepsilon.$$

Dále:

$$\begin{aligned}|I_2| &\leq \frac{1}{\pi}\int_\delta^\pi |f(x+t)+f(x-t)+2f(x)|\,\mathrm{d}t\frac{1}{2(n+1)}\frac{1}{\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}\\ &\leq \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |f(x+t)+f(x-t)+2M|\,\mathrm{d}t\frac{1}{2(n+1)}\frac{1}{\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}\\ &\frac{1}{\pi}\left(2\int_0^{2\pi}|f(t)|\,\mathrm{d}t + 4\pi M\right)\frac{1}{2(n+1)}\frac{1}{\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)} \xrightarrow{n\to\infty} 0.\end{aligned}$$

Tím jsme důkaz dokončili. □

Věta 14.15 (Weierstrassova věta - trigonometrická verze)**.** Nechť $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$ je spojitá na $\mathbb{R}$ a nechť $\varepsilon > 0$. Pak existuje trigonometrický polynom T splňující $\|f - T\|_{\mathcal{C}(\mathbb{R})} = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x) - T(x)| < \varepsilon$.

Důkaz. Využijeme Fejérovy věty. f je spojitá na $\mathbb{R}$, tedy speciálně na $(-\pi, 3\pi)$, a tedy $\sigma_n f \rightrightarrows f$ na $[0, 2\pi]$ a σ_n je navíc trigonometrický polynom. $\square$

Důsledek (Weierstrassova věta)**.** Nechť $f \in \mathcal{C}([a, b])$ a $\varepsilon > 0$. Potom existuje polynom P tak, že $\|f - P\|_{\mathcal{C}(\mathbb{R})} < \varepsilon$. Tedy polynomy jsou husté v $\mathcal{C}([a, b])$.

Důkaz. Z Taylorovy věty víme, že $\forall [c, d]$ a $\forall \varepsilon > 0$ existují polynomy tak, že $|\sin(x) - P(x)| < \varepsilon$ a $|\cos(x) - Q(x)| < \varepsilon$ na $[c, d]$. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $[a, b] = [0, 2\pi]$ a f je periodická. Pokud by nebyla periodická, tak vezmeme $f - cx$. Dále $\sin(x)$ na $[0, 2\pi]$ umíme aproximovat polynomem. $\sin(2x)$ na $[0, 2\pi]$ je to samé jako $\sin(x)$ na $[0, 4\pi]$, takže jej také umíme aproximovat. Induktivně můžeme aproximovat $\sin(nx)$ a analogickým argumentem bychom zjistili, že můžeme aproximovat i $\cos(nx)$. Nechť $\varepsilon > 0$. Z předchozí věty víme, že existuje trigonometrický polynom T tak, že $\|f - T\|_{\mathcal{C}(\mathbb{R})} < \varepsilon$. Nyní:

$$T = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx).$$

Najdeme polynomy P_k a Q_k tak, aby platilo:

$$|\cos(kx) - P_k| < \frac{\varepsilon}{2^k} \frac{1}{|a_k| + 1},$$
$$|\sin(kx) - Q_k| < \frac{\varepsilon}{2^k} \frac{1}{|b_k| + 1}.$$

Položme $P = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k T_k + b_k Q_k$. Jistě je to polynom a platí:

$$\begin{aligned}\|f - P\|_{\mathcal{C}(\mathbb{R})} &\le \|f - T\|_{\mathcal{C}(\mathbb{R})} + \left\| \sum_{k=1}^{n} a_k(\cos(kx) - P_k) + b_k(\sin(kx) - Q_k) \right\|_{\mathcal{C}(\mathbb{R})} \\ &\le \varepsilon + \sum_{k=1}^{n} |a_k| \frac{\varepsilon}{2^k} \frac{1}{|a_k| + 1} + |b_k| \frac{\varepsilon}{2^k} \frac{1}{|b_k| + 1} < 3\varepsilon.\end{aligned}$$

Tím je důkaz hotov. $\square$

Věta 14.16 (Fourierovy koeficienty určují funkci)**.** Nechť $f, g \in \mathcal{P}_{2\pi}$ mají stejné Fourierovy koeficienty. Potom $f = g$ skoro všude.

Důkaz. Funkce $f - g$ má nulové Fourierovy koeficienty. Tedy bez újmy na obecnosti předpokládejme $f \neq 0$, $g = 0$ a $\forall n \in \mathbb{N}_0$ nechť:

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) \,\mathrm{d}x = 0,$$
$$\int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) \,\mathrm{d}x = 0.$$

Označme:

$$\mathcal{T} = \left\{ \varphi \in L^\infty(0, 2\pi) \colon \int_0^{2\pi} f(x)\varphi(x) \,\mathrm{d}x = 0 \right\}.$$

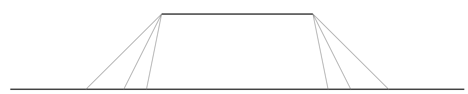
1. Je zřejmé, že $\mathcal{T}$ je lineární prostor.

2. Nechť $\varphi_n \in \mathcal{T}$, $\varphi_n \to \varphi$ skoro všude a $\forall n$ nechť $\|\varphi_n\|_\infty \leq K$. Pak $\varphi \in \mathcal{T}$. Toto dokážeme. Z Lebesgueovy věty platí, že $\varphi_n f \to \varphi f$ skoro všude a $|\varphi_n f| \leq K|f| \in L^1$, a tedy:
$$0 = \lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} \varphi_n f = \int_0^{2\pi} \lim_{n\to\infty} \varphi_n f = \int_0^{2\pi} \varphi f.$$

3. Trigonometrické polynomy jsou podmnožinou $\mathcal{T}$, tedy $\cos(nx) \in \mathcal{T}$ a $\sin(nx) \in \mathcal{T}$.

4. Nechť φ je spojitá a $\varphi(0) = \varphi(2\pi) = 0$. Podle předchozí věty existuje trigonometrický polynom $T_n \rightrightarrows \varphi$. Tyto T_n jsou stejně omezené konstantou $K = \sup|\varphi| + 1$. $T_n \in \mathcal{T}$, $T_n \to \varphi$, a tedy dle druhého bodu je $\varphi \in \mathcal{T}$.

5. Nechť $[a, b] \subset (0, 2\pi)$.



   Existuje posloupnost spojitých funkcí φ_n jako na obrázku výše, pro něž platí $\varphi_n(0) = \varphi_n(2\pi) = 0$, tak, že $\varphi_n \to \chi_{(a,b)}$ skoro všude a φ_n jsou stejně omezené konstantou $K = 1$. Tedy $\chi_{(a,b)} \in \mathcal{T}$.

6. Nechť $G \subset (0, 2\pi)$ je otevřená. Ukážeme, že $\chi_G \in \mathcal{T}$. Víme, že $G = \bigcup_{i=1}^\infty (a_i, b_i)$. Dále $\sum_{i=1}^k \chi_{(a_k,b_k)} \in \mathcal{T}$ a $\sum_{i=1}^k \chi_{(a_k,b_k)} \to \chi_G$ skoro všude. Navíc jsou tyto funkce stejně omezené konstantou $K = 1$. Tedy dle druhého bodu platí, že $\chi_G \in \mathcal{T}$.

7. Nechť $E \subset (0, 2\pi)$ je měřitelná. Dokážeme, že $\chi_E \in \mathcal{T}$. Existují množiny G_n otevřené, $E \subset G_n$ a $\lambda(G_n \setminus E) < \frac{1}{2^n}$. Platí $\chi_{G_n} \in \mathcal{T}$ a $\chi_{G_n} \to \chi_E$ skoro všude, navíc jsou tyto funkce stejně omezené konstantou $K = 1$. Dle druhého bodu tím pádem máme, že $\chi_E \in \mathcal{T}$.

8. Nechť $E_1 = \{f > 0\}$ a $E_2 = \{f < 0\}$. Platí:
$$\int_0^{2\pi} |f| = \int_{E_1} f - \int_{E_2} f = \int_0^{2\pi} \chi_{E_1} f - \int_0^{2\pi} \chi_{E_2} f = 0,$$
   kde poslední rovnost plyne z předchozího bodu. Dostáváme, že $f = 0$ skoro všude.

Tím je důkaz hotov. □

Poznámka. Obecně připouštíme komplexní funkce reálné proměnné. $\forall z \in \mathbb{C}$ platí:
$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2},$$
$$\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Trigonometrický polynom

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

lze přepsat jako

$$c_0 + \sum_{k=1}^{n} c_k \mathrm{e}^{ikx} + c_{-k} \mathrm{e}^{-ikx}.$$

K dané komplexní funkci $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$ pak dostaneme komplexní Fourierovu řadu

$$Sf(x) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \mathrm{e}^{ikx} + c_{-k} \mathrm{e}^{-ikx},$$

kde

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \mathrm{e}^{-ikx} \, \mathrm{d}x, \;\; k \in \mathbb{Z}.$$

14.4 Fourierova transformace

Definice 14.17. Nechť $f \in L^1(\mathbb{R})$. Pak Fourierova transformace funkce f je definována jako:

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \mathrm{e}^{-i\omega x} \, \mathrm{d}x.$$

Inverzní Fourierova transformace funkce f je definována jako:

$$\check{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \mathrm{e}^{i\omega x} \, \mathrm{d}x.$$

Poznámka. Platí následující:

1. Pro $f \in L^2(\mathbb{R})$ platí $\check{\hat{f}} = f$ ve smyslu rovností L^2 funkcí.

2. Existuje-li vlastní derivace v bodě $f'(x)$, pak $\check{\hat{f}}(x) = f(x)$.

3. Je-li $f \in BV$, pak $\check{\hat{f}} = \frac{f(x+)+f(x-)}{2}$, kde:

$$\check{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{K \to \infty} \int_{-K}^{K} f(x) \mathrm{e}^{i\omega x} \, \mathrm{d}x.$$

   Tato úprava integrálu je nutná, neboť se může stát, že Lebesgueův integrál neexistuje.

Definice 14.18. Nechť $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Pak konvoluce funkcí f a g je definována jako:

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y) g(y) \, \mathrm{d}y.$$

Věta 14.19 (Fourierova transformace konvoluce)**.** Nechť $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Pak $\widehat{(f * g)}(\omega) = \sqrt{2\pi}\hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega)$.

Důkaz. Nejprve ukážeme, že pokud jsou $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, pak i $f * g \in L^1(\mathbb{R})$. Zřejmě:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} |(f * g)(x)| \,\mathrm{d}x &= \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y) \,\mathrm{d}y \right| \mathrm{d}x \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |g(y)| \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x-y)| \,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y < +\infty.\end{aligned}$$

Tedy skutečně $f * g \in L^1(\mathbb{R})$. Nyní:

$$\begin{aligned}\widehat{(f * g)}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y) \,\mathrm{d}y \right) \mathrm{e}^{-i\omega x} \,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(y) \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\mathrm{e}^{-i\omega(x-y)} \,\mathrm{d}x \right) \mathrm{e}^{-i\omega y} \,\mathrm{d}y \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(y)\mathrm{e}^{-i\omega y}\hat{f}(\omega) \,\mathrm{d}y = \sqrt{2\pi}\hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega)\end{aligned}$$

Tím jsme důkaz dokončili. □

Věta 14.20 (Fourierova transformace derivace)**.** Nechť $f \in L^1(\mathbb{R})$, f a f' jsou spojité na $\mathbb{R}$, $\lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0$ a $f' \in L^1(\mathbb{R})$. Pak $\hat{f}'(\omega) = i\omega f(\omega)$.

Důkaz. Využitím per partes dostaneme:

$$\hat{f}'(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\mathrm{e}^{-i\omega x} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)i\omega\mathrm{e}^{-i\omega x} \,\mathrm{d}x = i\omega\hat{f}(\omega).$$

Tím je důkaz hotov. □

15 Souvislé a obloukově souvislé množiny

Definice 15.1. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor. Řekneme, že $A \subset P$ je obojetná, jestliže je zároveň otevřená i uzavřená.

Příklad. $\varnothing$ a P jsou vždy obojetné množiny. V metrickém prostoru $[0,1] \times (2,3)$ s eukleidovskou metrikou je množina $[0,1]$ obojetná. V diskrétním metrickém prostoru je každá množina obojetná.

Definice 15.2. Řekneme, že metrický prostor (P, ϱ) je souvislý, jestliže není sjednocením dvou disjunktních otevřených množin. Řekneme, že $A \subset P$ je souvislá, jestliže je metrický prostor (A, ϱ) souvislý.

Příklad. $\varnothing$ a jednobodové množiny jsou vždy souvislé. Metrický prostor $[0,1] \times (2,3)$ s eukleidovskou metrikou není souvislý. $\mathbb{R}$ a interval v $\mathbb{R}$ s eukleidovskou metrikou jsou souvislé. Dokážeme, že $\mathbb{R}$ je souvislá. Nechť $\mathbb{R} = G_1 \cup G_2$, kde G_1, G_2 jsou otevřené neprázdné disjunktní množiny. Víme, že G_1 může být maximálně spočetným sjednocením disjunktních otevřených intervalů. Protože $G_2 \neq \varnothing$, tak $G_1 \neq \mathbb{R}$, a tedy alespoň jeden z krajních bodů alespoň jednoho z těchto intervalů je prvkem $\mathbb{R}$. Označme jej a. Potom $a \notin G_1$, a tedy $a \in G_2$. G_2 je otevřená, a tedy existuje $r > 0$ tak, že $(a-r, a+r) \subset G_2$. a je krajním bodem některého z intervalů, takže $(a-r, a+r) \cap G_1 \neq \varnothing$. Dostáváme spor s tím, že jsou množiny G_1 a G_2 disjunktní.

Věta 15.3 (Charakterizace souvislých prostorů)**.** Nechť (P, ϱ) je metrický prostor. Následující podmínky jsou ekvivalentní:

1. P není souvislý.
2. Existují dvě uzavřené neprázdné disjunktní množiny $F_1, F_2 \subset P$ tak, že $P = F_1 \cup F_2$.
3. Existuje obojetná množina $H \subset P$ taková, že $H \neq \varnothing$ a $H \neq P$.

Důkaz. Dokážeme postupně jednotlivé implikace:

- $\underline{1 \Rightarrow 2}$: P není souvislý, a tedy $P = G_1 \cup G_2$, G_1, G_2 jsou disjunktní, otevřené a neprázdné. Položme $F_1 = P \setminus G_1 = G_2$ a $F_2 = P \setminus G_2 = G_1$. Toto jsou uzavřené neprázdné množiny, které jsou navíc disjunktní. Platí $P = F_1 \cup F_2$.
- $\underline{2 \Rightarrow 3}$: Položme $H = F_1$. Pak H je neprázdná a $H \neq P$. Navíc H je uzavřená, protože F_1 je uzavřená. Dále $P \setminus H = P \setminus F_1 = F_2$ je uzavřená, a tím pádem H je otevřená. Je tedy obojetná.
- $\underline{3 \Rightarrow 1}$: Položme $G_1 = H$ a $G_2 = P \setminus H$. Pak $G_1 \cup G_2 = P$, $G_1, G_2 \neq \varnothing$ a $G_1 \cap G_2 = \varnothing$. Dále G_1 je otevřená, protože H je otevřená a G_2 je otevřená, protože H je uzavřená.

Tím je důkaz hotov. □

Poznámka. Nechť $G \subset P$ je otevřená a $A \subset P$. Pak $A \cap G$ je otevřená v (A, ϱ).

Důkaz. Zřejmě $\forall x \in G$ existuje $r > 0$ tak, že $B(x, r) \subset G$. Dále $\forall a \in A \cap G$ existuje $r > 0$ tak, že $B(a, r) \subset G$. Z toho plyne, že $A \cap B(a, r) \subset A \cap G$, kde $A \cap B(a, r) := B_A(a, r)$ je kulička v (A, ϱ), a tedy je $A \cap G$ otevřená. □

Věta 15.4 (Vlastnosti souvislých prostorů)**.** Nechť (P, ϱ) je metrický prostor.

1. Nechť (Q, τ) je metrický prostor a $f \colon P \to Q$ je spojité. Nechť $A \subset P$ je souvislá množina. Pak $f(A)$ je souvislá v Q.

2. Nechť $A \subset P$ je souvislá a $A \subset B \subset \overline{A}$. Pak B je souvislá, speciálně $\overline{A}$ je souvislá.

3. Nechť $F \neq \varnothing$ a $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ jsou souvislé množiny v (P, ϱ). Nechť každé dvě množiny A_α, A_β, $\alpha, \beta \in I$, $\alpha \neq \beta$, splňují $A_\alpha \cap A_\beta \neq \varnothing$. Pak $A = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ je souvislá.

Důkaz. Postupně dokážeme:

1. Dokážeme sporem. Nechť $f(A) = G_1 \cup G_2$, G_1 a G_2 jsou otevřené v (Q, τ). Dále jsou disjunktní a neprázdné. Pak $A = f^{-1}(G_1) \cup f^{-1}(G_2)$, což jsou neprázdné disjunktní množiny. Podle věty o charakterizaci spojitosti jsou $f^{-1}(G_1)$ a $f^{-1}(G_2)$ otevřené. Dostáváme spor se souvislostí A.

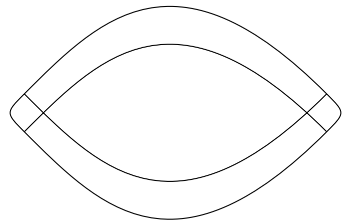
2. Nechť pro spor je $B = G_1 \cup G_2$. Tyto množiny jsou neprázdné, disjunktní a otevřené v (B, ϱ). Pak $A = (A \cap G_1) \cup (A \cap G_2)$, což je sjednocení disjunktních množin. Podle předešlé poznámky jsou tyto množiny navíc otevřené v (A, ϱ). Pokud $A \cap G_1 \neq \varnothing$ a $A \cap G_2 \neq \varnothing$, tak dostáváme spor se souvislostí A. Tedy bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $A \cap G_1 = \varnothing$, z čehož máme, že $A \subset G_2$. Víme, že existuje $x \in B \cap G_1$, a tedy $x \in \overline{A}$, protože $B \subset \overline{A}$. Dostáváme $\varrho(x, A) = 0$. Ale $B \cap G_1$ je otevřená v (B, ϱ), a tedy existuje $r > 0$ tak, že $B(x, r) \cap B \subset G_1$. Tím pádem $\varrho(x, G_2) \geq r$, a jelikož $A \subset G_2$, tak $\varrho(x, A) \geq r$. Dostáváme spor.

3. Opět postupujeme sporem. Nechť $A = G_1 \cup G_2$, kde opět máme neprázdné, disjunktní a otevřené množiny. Pak $A_\alpha = (A_\alpha \cap G_1) \cup (A_\alpha \cap G_2)$, což jsou disjunktní a otevřené množiny v (A_α, ϱ). A_α je souvislá, a tedy $A_\alpha \cap G_1 = \varnothing$ nebo $A_\alpha \cap G_2 = \varnothing$. Nechť A_{α_0} je pevná a bez újmy na obecnosti mějme $A_{\alpha_0} \subset G_1$. Pak $\forall \alpha$ platí $A_\alpha \cap A_{\alpha_0} \neq \varnothing$, z čehož plyne, že $A_\alpha \cap G_1 \neq \varnothing$. Dále $A_\alpha \subset G_1$ nebo $A_\alpha \subset G_2$. Jistě $A_\alpha \subset G_1$, a tedy $A = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \subset G_1$. Pak ale platí, že $G_2 = \varnothing$ a dostáváme spor.

Tím je důkaz hotov. □

Důsledek. Nechť f je spojité zobrazení $I = [0, 1]$ do metrického prostoru. Pak $f(I)$ je souvislá množina.

Poznámka. Uvědomme si, že $A \cap B$ není souvislá, pokud A, B jsou souvislé a $A \neq B$. Protipříkladem může být například množina na následujícím obrázku:



Definice 15.5. Řekneme, že A je komponenta P, jestliže A je maximální souvislá podmnožina P.

Věta 15.6 (Charakterizace komponent)**.** Nechť (P, ϱ) je neprázdný metrický prostor.

1. Komponenty P jsou neprázdné a uzavřené.
2. Každý bod P je obsažen v nějaké komponentě.
3. Komponenty jsou navzájem disjunktní.

Důkaz. Postupně dokážeme:

1. Jednobodové množiny jsou souvislé, a tedy neprázdná množina není maximální. Nechť A je komponenta. Pak $A \subset \overline{A}$ a podle druhého bodu předešlé věty je $\overline{A}$ souvislá. A je maximální, a tedy $A = \overline{A}$, což znamená, že A je uzavřená.
2. Nechť $x \in P$. Definujme $A = \bigcup\{M \colon M$ je souvislá a $x \in M\}$. A je neprázdná, protože $\{x\} \subset A$. Podle třetího bodu předchozí věty je A souvislá. A je maximální, neboť A je jedna z množin, přes které sjednocujeme. Jistě $x \in A$.
3. Nechť pro spor jsou A, B, $A \neq B$, komponenty a $A \cap B \neq \varnothing$. Podle třetího bodu předchozí věty je $A \cup B$ souvislá, a tedy A, B nejsou maximální.

Tím jsme větu dokázali. □

Definice 15.7. Řekneme, že metrický prostor (P, ϱ) je křivkově souvislý, jestliže $\forall x, y \in P$ existuje spojité zobrazení $\gamma \colon [0,1] \to (P, \varrho)$ takové, že $\gamma(0) = x$ a $\gamma(1) = y$. Řekneme, že $A \subset P$ je křivkově souvislá, jestliže je metrický prostor (A, ϱ) křivkově souvislý.

Věta 15.8 (Vztah mezi souvislostí a křivkovou souvislostí)**.** Každá křivkově souvislá množina v metrickém prostoru je souvislá.

Důkaz. Důkaz provedeme sporem. Nechť (A, ϱ) je křivkově souvislý, ale není souvislý. Tedy $A = G_1 \cup G_2$, což jsou otevřené, neprázdné a disjunktní množiny. Nalezneme $x \in G_1$ a $y \in G_2$. Podle předpokladu existuje $\gamma \colon [0,1] \to (A, \varrho)$ tak, že $\gamma(0) = x$ a $\gamma(1) = y$. Nyní $[0,1] = \gamma^{-1}(G_1) \cup \gamma^{-1}(G_2)$. Ze spojitosti γ plyne, že jsou tyto množiny otevřené. Zřejmě jsou disjunktní a neprázdné. Dostáváme, že $[0,1]$ není souvislý, ale to je spor. □

Věta 15.9 (Souvislost a otevřené množiny v $\mathbb{R}^n$)**.** Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená. Pak G je souvislá právě tehdy, když je křivkově souvislá.

Důkaz. Levá implikace ihned plyne z předešlé věty. Dokažme tedy pravou. Nechť G je otevřená a souvislá. Zvolme $x \in G$ libovolně. Definujme:

$$A = \{y \in G \colon \text{existuje spojitá křivka z } x \text{ do } y\}.$$

Chceme, aby $A = G$, tedy všechny body lze spojit. Ukážeme, že A je otevřená. Nechť $y \in A$. Pak existuje $r > 0$ tak, že $B(y, r) \subset G$. Každý bod $z \in B(y, r)$ lze spojit s x, například tak, že spojíme x s y a y se z úsečkou. Tedy $B(y, r) \subset A$ a A je tedy otevřená. Nyní ukážeme, že A je uzavřená. Nechť $y \in \overline{A}$. Jistě $B(y, r) \subset G$ a existuje $z \in A \cap B(y, r)$ tak, že x lze spojit se z křivkou a z s y úsečkou. Tedy $y \in A$. Pak $A = \overline{A}$ a A je tím pádem uzavřená. Nyní $G \setminus A$ je otevřená a G je navíc souvislá, a tedy $A = \varnothing$ nebo $G \setminus A = \varnothing$, ale v A se nacházi přinejmenším bod x, takže $G \setminus A = \varnothing$, a tedy $A = G$. $\square$

16 Teorie míry a integrálu

Definice 16.1. Nechť X je množina. Symbolem $\mathcal{P}(X)$ značíme množinu $\{A,\ A \subset X\}$. Nechť $\mathscr{S} \subset \mathcal{P}(X)$. Množinová funkce je zobrazení $\tau \colon \mathscr{S} \to [0, +\infty]$.

Definice 16.2. Řekneme, že $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ (to je systém množin) je σ-algebra na X, jestliže:

1. $\varnothing \in \mathcal{A}$.
2. Nechť $A \in \mathcal{A}$. Pak $A^c = X \setminus A \in \mathcal{A}$.
3. Nechť $A_i \in \mathcal{A}$, $i \in \mathbb{N}$. Pak $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}$.

Poznámka. Podívejme se na následující poznámky:

1. Nechť $A, B \in \mathcal{A}$. Pak $A \cup B \in \mathcal{A}$. Pak říkáme, že $\mathcal{A}$ je algebra.
2. Je-li $\mathcal{A}$ algebra na X, pak $A, B \in \mathcal{A}$ implikuje, že $A \cap B \in \mathcal{A}$, neboť $A \cap B = (A^c \cup B^c)^c$. Dále $A \setminus B \in \mathcal{A}$, protože $A \setminus B = A \cap B^c$. Podobně se dokáže, že σ-algebry jsou uzavřené na spočetné množinové operace.
3. Každá σ-algebra je algebra, protože $A \cup B = A \cup B \cup \varnothing \cup \varnothing \cup \dots$.

Příklad. Uveďme několik příkladů:

1. $\{\varnothing, X\}$ a $\mathcal{P}(X)$ jsou σ-algebry.
2. $\mathcal{A} = \{\varnothing, \{1\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$ je σ-algebra na $X = \{1,2,3\}$.
3. $\mathcal{A} = \{A \subset \mathbb{N},\ A \text{ nebo } A^c \text{ je konečná množina}\}$ je algebra, ale není to σ-algebra, neboť pro $A_i = \{2i,\ i \in \mathbb{N}\}$ není $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i = \{2,4,6,\dots\}$ konečná množina.

Věta 16.3 (O průniku σ-algeber)**.** Nechť $\mathcal{A}_\alpha$, $\alpha \in I$, kde I je libovolná (i nekonečná) indexová množina, jsou σ-algebry. Pak $\bigcap_{\alpha\in I} \mathcal{A}_\alpha$ je σ-algebra.

Důkaz. Tvrzení plyne přímo z definice. □

Důsledek. Nechť $\mathscr{S} \subset \mathcal{P}(X)$. Pak existuje nejmenší σ-algebra $\sigma\mathscr{S}$ na X, která obsahuje systém $\mathscr{S}$.

Důkaz. Je to právě σ-algebra tvaru:

$$\sigma\mathscr{S} = \bigcap \{\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X),\ \mathcal{A} \text{ je } \sigma\text{-algebra},\ \mathscr{S} \subset \mathcal{A}\}.$$

Tím je důkaz hotov. □

Definice 16.4. Je-li $\mathscr{S} \subset \mathcal{P}(X)$ a $\mathcal{A} = \sigma\mathscr{S}$, pak $\mathscr{S}$ se nazývá generátor σ-algebry $\mathcal{A}$.

Definice 16.5. Nechť (X, ϱ) je metrický prostor a $\mathcal{G}$ je systém všech otevřených podmnožin množiny X. Pak σ-algebru $\mathcal{B}(X) = \sigma\mathcal{G}$ (tedy nejmenší σ-algebra obsahující $\mathcal{G}$) nazýváme σ-algebrou borelovských množin na X.

Poznámka. Do $\mathcal{B}(X)$ patří všechny otevřené a uzavřené množiny, protože uzavřené množiny nejsou nic jiného než doplňky otevřených. Dále zde patří také spočetný průnik otevřených množin a spočetné sjednocení uzavřených množin.

Definice 16.6. Nechť X je množina a $\mathcal{A}$ je σ-algebra na X. Pak dvojicí $(X, \mathcal{A})$ nazýváme měřitelným prostorem. Množiny $A \in \mathcal{A}$ se nazývají $\mathcal{A}$-měřitelné, nebo pouze měřitelné.

Definice 16.7. Nechť $(X, \mathcal{A})$ je meřitelný prostor. Pak zobrazení $\mu\colon \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ splňující:

1. $\mu(\varnothing) = 0$,
2. Nechť $A_i \in \mathcal{A}$, $i \in \mathbb{N}$, jsou po dvou disjunktní, pak $\mu(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(A_i)$

se nazývá míra. Trojice $(X, \mathcal{A}, \mu)$ se nazývá prostor s mírou.

Příklad. Uveďme nějaké příklady míry:

1. Nulová míra - $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$ a $\mu(A) = 0\ \forall A \in \mathcal{A}$.
2. Aritmetická míra - $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$ a $\mu(A) = \begin{cases} \operatorname{card} A, & \text{je-li } A \text{ konečná,} \\ +\infty, & \text{je-li } A \text{ nekonečná.} \end{cases} \quad \forall A \in \mathcal{A}.$
3. Diracova míra δ_a - $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$, $a \in X$ je pevný bod a $\delta_a = \begin{cases} 1, & a \in A, \\ 0, & a \notin A. \end{cases} \quad \forall A \in \mathcal{A}.$

Věta 16.8 (Vlastnosti míry)**.** Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou. Pak platí:

1. Nechť $A, B \in \mathcal{A}$ a $A \cap B = \varnothing$. Pak $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$.
2. Nechť $A, B \in \mathcal{A}$ a $A \subset B$. Pak $\mu(A) \leq \mu(B)$.
3. Nechť $A_i \in \mathcal{A}$, $i \in \mathbb{N}$. Pak $\mu(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i) \leq \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(A_i)$.
4. Nechť $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$. Pak $\mu(A_i) \nearrow \mu(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i)$. Toto značení znamená, že $\mu(A_i)$ je neklesající a limitně se blíží $\mu(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i)$.
5. Nechť $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ a $\mu(A_i) < +\infty$. Pak $\mu(A_i) \searrow \mu(\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i)$ (nerostoucí).

Důkaz. Postupně dokážeme:

1. Jistě $A \cup B = A \cup B \cup \varnothing \cup \varnothing \cup \ldots$. Můžeme tedy psát:
$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) + \mu(\varnothing) + \mu(\varnothing) + \cdots = \mu(A) + \mu(B).$$
2. Zřejmě $B = A \cup (B \setminus A)$. Pak platí:
$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A),$$
kde $\mu(B \setminus A) \geq 0$, a tedy $\mu(B) \geq \mu(A)$. Z rovnosti výše také plyne, že pokud máme $A, B \in \mathcal{A}$, $A \subset B$ a $\mu(A) < +\infty$, tak platí:
$$\mu(B) - \mu(A) = \mu(B \setminus A).$$
Tuto vlastnost použijeme později v důkazu.

3. Nejprve upravíme:

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup (A_2 \setminus A_1) \cup \left(A_3 \setminus \bigcup_{i=1}^{2} A_i \right) \cup \dots .$$

Z toho dostáváme:

$$\mu \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) = \mu(A_1) + \mu(A_2 \setminus A_1) + \mu \left(A_3 \setminus \bigcup_{i=1}^{2} A_i \right) + \dots .$$

Tedy:

$$\mu \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

4. $\forall k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$ platí $A_k = \bigcup_{i=1}^{k} A_i = A_1 \cup (A_2 \setminus A_1) \cup \dots \cup (A_k \setminus A_{k-1})$. Dále:

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup (A_2 \setminus A_1) \cup \dots \cup (A_k \setminus A_{k-1}) \cup (A_{k+1} \setminus A_k) \cup \dots .$$

Zřejmě platí:

$$\mu(A_k) = \mu(A_1) + \sum_{i=2}^{k} \mu(A_i \setminus A_{i-1}).$$

Dále:

$$\mu \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) = \mu(A_1) + \sum_{i=2}^{\infty} \mu(A_i \setminus A_{i-1}).$$

Z předchozích dvou rovností plyne, že $\mu(A_k) \nearrow \mu \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right)$.

5. $\forall i \in \mathbb{N}$ položíme $B_i = A_1 \setminus A_i$. Pak $B_1 \subset B_2 \subset \dots$, $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = A_1 \setminus \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$. Ze čtvrtého bodu této věty platí:

$$\begin{aligned} \mu(A_1) - \mu(A_i) = \mu(A_1 \setminus A_i) = \mu(B_i) \nearrow \mu \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \right) &= \mu \left(A_1 \setminus \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \right) \\ &= \mu(A_1) - \mu \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \right), \end{aligned}$$

kde jsme využili odvozené vlastnosti v druhé části důkazu. Dostáváme, že $\mu(A_1) - \mu(A_i) \nearrow \mu(A_1) - \mu \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \right)$. Tedy $-\mu(A_i) \nearrow -\mu \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \right)$, protože $\mu(A_1) < +\infty$. Z toho nakonec dostáváme:

$$\mu(A_i) \searrow \mu \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \right).$$

Věta je tímto dokázána. $\square$

Definice 16.9. Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou. Řekneme, že množina $N \subset X$ je nulová, jestliže existuje $A \in \mathcal{A}$ tak, že $N \subset A$ a $\mu(A) = 0$. $\mathscr{N}$ značí množinu všech nulových množin. Prostor $(X, \mathcal{A}, \mu)$ nazveme úplný, jestliže $\mathscr{N} \subset \mathcal{A}$. $\mathcal{A}_0 = \sigma(\mathcal{A} \cup \mathscr{N})$ je σ-algebra a nazveme ji zúplněním σ-algebry $\mathcal{A}$ vzhledem k míře μ.

Poznámka. Existují prostory s mírou, které nejsou úplné. Nechť $X = \{1, 2, 3\}$ a $\mathcal{A} = \{\varnothing, \{1\}, \{2, 3\}, X\}$. Dále $\mu = \delta_1$. Pak $\{2\} \notin \mathcal{A}$, ale $\{2\} \in \mathscr{N}$, protože $\{2\} \subset \{2, 3\}$ a $\delta_1(\{2, 3\}) = 0$.

Věta 16.10 (Zúplnění míry)**.** Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou. Pak platí:

1. $\mathcal{A}_0 = \{E \subset X,\ \text{existuje } A, B \in \mathcal{A},\ A \subset E \subset B,\ \mu(B \setminus A) = 0\}$.
2. Míru μ lze jednoznačně rozšířit na $\mathcal{A}_0$ a rozšířenou míru označujeme μ_0.
3. Prostor $(X, \mathcal{A}_0, \mu_0)$ je úplný.

Důkaz. Postupně dokážeme jednotlivá tvrzení:

1. Označme:

$$\tilde{\mathcal{A}}_0 = \{E \subset X,\ \exists A, B \in \mathcal{A},\ A \subset E \subset B,\ \mu(B \setminus A) = 0\}.$$

   Dokážeme, že $\tilde{\mathcal{A}}_0$ je σ-algebra.

   (a) $E = \varnothing \in \tilde{\mathcal{A}}_0$, neboť volba $A = B = \varnothing \in \mathcal{A}$ dává $A \subset E \subset B$ a $\mu(B \setminus A) = \mu(\varnothing \setminus \varnothing) = 0$.

   (b) Je-li $E \in \tilde{\mathcal{A}}_0$, pak existuje $A, B \in \mathcal{A}$, což dává, že i $A^c, B^c \in \mathcal{A}$. Dále $A \subset E \subset B$, což dává $B^c \subset E^c \subset A^c$. Navíc $\mu(B \setminus A) = 0$. Jelikož $A^c \setminus B^c = B \setminus A$, tak $\mu(A^c \setminus B^c) = \mu(B \setminus A) = 0$. Tím pádem $E^c \in \tilde{\mathcal{A}}_0$.

   (c) Nechť $A_i \in \tilde{\mathcal{A}}_0$ $\forall i \in \mathbb{N}$. Pak existuje $A_i, B_i \in \mathcal{A}$ tak, že $A_i \subset E_i \subset B_i$ a $\mu(B_i \setminus A_i) = 0$. Pak $\bigcup_i A_i \subset \bigcup_i E_i \subset \bigcup_i B_i$, kde $\bigcup_i A_i, \bigcup_i B_i \in \mathcal{A}$. Zřejmě:

$$\mu\left(\bigcup_i B_i \setminus \bigcup_i A_i\right) \leq \mu\left(\bigcup_i (B_i \setminus A_i)\right) \leq \sum_i \mu(B_i \setminus A_i) = 0.$$

   Tedy $\bigcup_i E_i \in \tilde{\mathcal{A}}_0$.

   Dokázali jsme, že $\tilde{\mathcal{A}}_0$ je σ-algebra. Platí $\mathcal{A} \cup \mathscr{N} \subset \tilde{\mathcal{A}}_0$, protože:

   (a) Je-li $N \in \mathscr{N}$, pak existuje $A \in \mathcal{A}$ tak, že $N \subset A$ a $\mu(A) = 0$. Pak $\varnothing \subset N \subset A$, $\varnothing, A \in \mathcal{A}$ a $\mu(A \setminus \varnothing) = \mu(A) = 0$, a tedy $N \in \tilde{\mathcal{A}}_0$, z čehož dostáváme, že $N \subset \tilde{\mathcal{A}}_0$. Takže $\mathscr{N} \subset \tilde{\mathcal{A}}_0$.

   (b) Je-li $A \in \mathcal{A}$, pak $A \subset A \subset A$ a $\mu(A \setminus A) = \mu(\varnothing) = 0$, a tedy $A \in \tilde{\mathcal{A}}_0$. Dostáváme, že $\mathcal{A} \subset \tilde{\mathcal{A}}_0$.

Dále:

$$\mathcal{A}_0 = \sigma(\mathcal{A} \cup \mathcal{N}) \subset \sigma(\tilde{\mathcal{A}}_0) = \tilde{\mathcal{A}}_0 \Rightarrow \mathcal{A}_0 \subset \tilde{\mathcal{A}}_0.$$

Zbývá dokázat opačnou inkluzi, a sice, že $\tilde{\mathcal{A}}_0 \subset \mathcal{A}_0$. Nechť $E \in \tilde{\mathcal{A}}_0$, a tedy existuje $A, B \in \mathcal{A}$ tak, že $A \subset E \subset B$ a $\mu(B \setminus A) = 0$. Platí:

$$E = A \cup (E \setminus A) \subset A \cup (B \setminus A) \subset \mathcal{A} \cup \mathcal{N},$$

protože $A \in \mathcal{A}$ a $E \setminus A \in \mathcal{N}$. Tedy $E \in \sigma(\mathcal{A} \cup \mathcal{N}) = \mathcal{A}_0$. Tím pádem $\tilde{\mathcal{A}}_0 = \mathcal{A}_0$.

2. Nechť $E \in \mathcal{A}_0$. Pak existuje $A, B \in \mathcal{A}$ tak, že $A \subset E \subset B$ a $\mu(B \setminus A) = 0$. Definujeme $\mu_0(E) = \mu(A)$. Ověříme, že tato definice je korektní. Je-li $A_i, B_i \in \mathcal{A}$, $A_i \subset E \subset B_i$, $\mu(B_i \setminus A_i) = 0$, $i = 1, 2$, pak $A_1 = (A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \setminus A_2)$, což jsou disjunktní množiny, a tedy $\mu(A_1) = \mu(A_1 \cap A_2) + \mu(A_1 \setminus A_2) = \mu(A_1 \cap A_2)$, protože $A_1 \setminus A_2 \subset B_2 \setminus A_2$ a $\mu(B_2 \setminus A_2) = 0$. Analogicky bychom dostali $\mu(A_2) = \mu(A_1 \cap A_2)$. Z toho plyne, že $\mu(A_1) = \mu(A_2)$, což dokazuje korektnost definice. Ověříme, že μ_0 je míra:

   (a) Je zřejmé, že $\mu_0 \geq 0$. $\mu_0(\underbrace{\varnothing}_{\varnothing = E \in \mathcal{A}_0}) = 0$, protože $\underbrace{\varnothing}_{A \in \mathcal{A}} \subset \underbrace{\varnothing}_{E} \subset \underbrace{\varnothing}_{B \in \mathcal{A}}$ a $\mu(\underbrace{\varnothing \setminus \varnothing}_{B \setminus A}) = 0$. Tedy $\mu_0(\underbrace{\varnothing}_{E}) = \mu(\underbrace{\varnothing}_{A}) = 0$.

   (b) Je-li $E_i \in \mathcal{A}_0$ $\forall i \in \mathbb{N}$ a $E_i \cap E_j = \varnothing$ pro $i \neq j$, pak existuje $A_i, B_i \in \mathcal{A}$ tak, že $A_i \subset E_i \subset B_i$ a $\mu(B_i \setminus A_i) = 0$ $\forall i \in \mathbb{N}$. Pak $\bigcup_i A_i \subset \bigcup_i E_i \subset \bigcup_i B_i$, kde $\bigcup_i A_i, \bigcup_i B_i \in \mathcal{A}$ a $\bigcup_i E_i \in \mathcal{A}_0$. Dále $\bigcup_i B_i \setminus \bigcup_i A_i \subset \bigcup_i (B_i \setminus A_i)$. Tedy:

   $$\mu\left(\bigcup_i B_i \setminus \bigcup_i A_i\right) \leq \mu\left(\bigcup_i (B_i \setminus A_i)\right) \leq \sum_i \mu(B_i \setminus A_i) = 0.$$

   Proto $\mu_0\left(\bigcup_i E_i\right) = \mu\left(\bigcup_i A_i\right) = \sum_i \mu(A_i) = \sum_i \mu_0(E_i)$, protože $A_i \cap A_j \subset E_i \cap E_j = \varnothing$ pro $i \neq j$. Takže $\mu_0\left(\bigcup_i E_i\right) = \sum_i \mu_0(E_i)$.

   Dokázali jsme, že μ_0 je míra na $\mathcal{A}_0$. Míra μ_0 je rozšířením míry μ z $\mathcal{A}$ na $\mathcal{A}_0$, neboť je-li $A \in \mathcal{A}$, tak $A \subset A \subset A$ a $\mu(A \setminus A) = 0$. Tedy $\mu_0(A) = \mu(A)$. Toto rozšíření je jednoznačné. Toto tvrzení také dokážeme. Nechť $E \in \mathcal{A}_0$. Pak existuje $A, B \in \mathcal{A}$ tak, že $A \subset E \subset B$ a $\mu(B \setminus A) = 0$. Proto $\underbrace{\mu_0(A)}_{\mu(A)} \leq \mu_0(E) \leq \underbrace{\mu_0(B)}_{\mu(B)}$. Ovšem $\mu(B) = \mu(A \cup (B \setminus A)) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) = \mu(A)$. Tedy číslo $\mu_0(E)$ musí být rovno $\mu(A)$.

3. Dokážeme, že prostor $(X, \mathcal{A}_0, \mu_0)$ je úplný. Nechť $M \subset X$ je nulová množina v tomto prostoru. Pak existuje $N \in \mathcal{A}_0$ tak, že $M \subset N$ a $\mu_0(N) = 0$. Jelikož $N \in \mathcal{A}_0$, tak existuje $A, B \in \mathcal{A}$ tak, že $A \subset N \subset B$ a $\mu(B \setminus A) = 0$. Pak $\mu_0(A) \leq \mu_0(N) = 0$, a tedy $\mu(A) = 0$. Dále $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) = 0$. Tudíž $\varnothing \subset M \subset N \subset B$, což dává $\varnothing \subset M \subset B$, a přitom $\mu(B \setminus \varnothing) = \mu(B) = 0$. Tedy $M \in \mathcal{A}_0$ a také $\mu_0(M) = 0$, protože $\mu_0(M) \leq \mu_0(B) = \mu(B) = 0$.

Tím je důkaz věty hotov. □

Definice 16.11. Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou. Míru μ nazveme:

1. borelovskou, jestliže X je metrický prostor a $\mathcal{A} = \mathcal{B}(X)$,
2. konečnou, jestliže $\mu(X) < +\infty$,
3. pravděpodobnostní, jestliže $\mu(X) = 1$,
4. σ-konečnou, jestliže existují $X_i \subset X$, $i \in \mathbb{N}$, tak, že $\forall i$ platí $\mu(X_i) < +\infty$ a $X = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} X$.

Příklad. Prostor s mírou $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \delta_0)$ je prostor s borelovskou pravděpodobnostní mírou, protože $\delta(\mathbb{R}) = 1$, neboť $0 \in \mathbb{R}$.

Věta 16.12 (O míře λ_B^n)**.** Existuje právě jedna borelovská míra λ_B^n na prostoru $\mathbb{R}^n$ taková, že platí:

$$\lambda_B^n((a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \cdots \times (a_n, b_n)) = (b_1 - a_1) \times (b_2 - a_2) \times \cdots \times (b_n - a_n),$$

pokud $-\infty < a_i < b_i < +\infty$, $i = 1, \ldots, n$.

Důkaz. Důkaz bude v teorii míry a integrálu 2. □

Definice 16.13. Zúplnění míry λ_B^n nazveme Lebesgueovu míru v $\mathbb{R}^n$. Budeme ji značit λ^n.

Poznámka. Platí následující:

1. Lebesgueova míra je σ-konečná.
2. Množinu $\mathcal{B}_0(\mathbb{R}^n) = \sigma(\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \cup \mathscr{N})$ nazýváme σ-algebrou lebesgueovsky měřitelných množin. Platí:
$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subsetneq \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^n) \subsetneq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n).$$
3. Lebesgueova míra je regulární v následujícím smyslu: $\forall E \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^n)$ a $\forall \varepsilon > 0$ existuje otevřená množina G a uzavřená množina F tak, že $F \subset E \subset G$ a $\mu(G \setminus F) < \varepsilon$.

Definice 16.14. Nechť X, Y jsou množiny a $f\colon X \to Y$. Je-li $\mathscr{S} \subset \mathcal{P}(Y)$, pak $f^{-1}(\mathscr{S}) = \{f^{-1}(S), S \in \mathscr{S}\}$.

Věta 16.15 (O zobrazení $f\colon X \to Y$)**.** Nechť X, Y jsou množiny a $f\colon X \to Y$. Pak:

1. Je-li $\mathcal{M}$ σ-algebra na Y, pak $f^{-1}(\mathcal{M})$ je σ-algebra na X.
2. Je-li $\mathscr{S} \subset \mathcal{P}(Y)$, pak $f^{-1}(\sigma\mathscr{S}) = \sigma(f^{-1}(\mathscr{S}))$.

Důkaz. Postupně dokážeme jednotlivá tvrzení:

1. Plyne z faktu, že $X \setminus f^{-1}(B) = f^{-1}(Y \setminus B)$ a $\bigcup_{i=1}^{\infty} f^{-1}(B_i) = f^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right)$, kde $B, B_1, B_2, \dots \subset Y$.

2. Je zřejmé, že $f^{-1}(\mathscr{S}) \subset f^{-1}(\sigma\mathscr{S})$, a tedy $\sigma f^{-1}(\mathscr{S}) \subset \sigma f^{-1}(\sigma\mathscr{S}) = f^{-1}(\sigma\mathscr{S})$. Pro důkaz opačné inkluze uvažujme:
$$\mathcal{A} = \{B \subset Y, f^{-1}(B) \in f^{-1}(\sigma\mathscr{S})\}.$$
Lze ukázat, že $\mathcal{A}$ je σ-algebra. Dále jistě $\mathscr{S} \subset \mathcal{A}$, a tedy také $\sigma\mathscr{S} \subset \mathcal{A}$. Tím pádem $f^{-1}(\sigma\mathscr{S}) \subset f^{-1}(\mathcal{A}) \subset \sigma f^{-1}(\mathscr{S})$, kde poslední inkluze plyne z definice $\mathcal{A}$.

Tím je důkaz hotov. □

16.1 Měřitelné funkce

Definice 16.16. Nechť $(X, \mathcal{A})$ a $(Y, \mathcal{M})$ jsou měřitelné prostory. Zobrazení $f\colon X \to Y$ nazveme měřitelné (vzhledem k $\mathcal{A}$,$\mathcal{M}$), jestliže $f^{-1}(\mathcal{M}) \subset \mathcal{A}$. Jestliže některý z prostorů X, Y je metrický prostor, pak za příslušnou σ-algebru bereme σ-algebru borelovských podmnožin, pokud není řečeno jinak. Měřitelné zobrazení mezi dvěma metrickými prostory se nazývá borelovsky měřitelné (říkáme také borelovské).

Poznámka. Platí:

1. Snadno se ověří, že složení dvou měřitelných zobrazení je měřitelné zobrazení.

2. Z předchozí věty plyne: Jsou-li $(X, \mathcal{A})$, $(Y, \mathcal{M})$ měřitelné prostory, pak zobrazení $f\colon X \to Y$ je měřitelné právě tehdy, když $f^{-1}(\mathscr{S}) \subset \mathcal{A}$, kde $\mathscr{S} \subset \mathcal{P}(Y)$ je generátor σ-algebry $\mathcal{M}$. Speciálně tedy platí: Je-li $(X, \mathcal{A})$ měřitelný prostor a Y je metrický prostor, pak zobrazení $f\colon X \to Y$ je měřitelné právě tehdy, když $f^{-1}(G) \in \mathcal{A}$ pro všechny otevřené množiny $G \subset Y$.

Důsledek. Každé spojité zobrazení mezi dvěma metrickými prostory je měřitelné (borelovsky).

Věta 16.17 (Generátory $\mathcal{B}^n = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$)**.** Borelovská σ-algebra $\mathcal{B}^n$ je generována:

1. otevřenými intervaly $(a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n)$, kde $-\infty < a_i < b_i < +\infty$, $i = 1, \ldots, n$,

2. systémem $\mathscr{S} = \{(-\infty, a_1) \times \cdots \times (-\infty, a_n), a_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, n\}$. Speciálně $\mathcal{B}^1 = \sigma\{(-\infty, a), a \in \mathbb{R}\}$.

Důkaz. Postupně dokážeme:

1. Toto tvrzení plyne z faktu, že každou otevrřenou množinu $G \subset \mathbb{R}^n$ lze vyjádřit jako spočetné sjednocení otevřených intervalů.

2. Stačí ukázat, že všechny otevřené intervaly leží v $\sigma\mathscr{S}$. Toto dokážeme pro $\mathbb{R}^2$, případ obecné dimenze by byl analogický. Pro $I = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2)$ máme:
$$I = ((-\infty, b_1) \times (-\infty, b_2)) \setminus ((-\infty, a_1] \times (-\infty, b_2)) \setminus ((-\infty, b_1) \times (-\infty, a_2]),$$
kde platí:
$$(-\infty, a_1] \times (-\infty, b_2) = \bigcap_{k=1}^{\infty} \left(-\infty, a_1 + \frac{1}{k}\right) \times (-\infty, b_2) \in \sigma\mathscr{S}.$$
Analogicky $(-\infty, b_1) \times (-\infty, a_2] \in \sigma\mathscr{S}$.

Tím je důkaz hotov. □

Poznámka. Věta neudává všechny způsoby generování borelovských σ-algeber. Jako generátor lze vzít také uzavřené nebo po částech uzavřené intervaly. Stačí také vzít intervaly s racionálními koncovými body.

Věta 16.18 (O měřitelných zobrazeních)**.** Platí následující:

1. Jsou-li $f\colon (X,\mathcal{A}) \to \mathbb{R}^n$ a $g\colon (X,\mathcal{A}) \to \mathbb{R}^m$ měřitelná zobrazení, pak i zobrazení $(f,g)\colon (X,\mathcal{A}) \to \mathbb{R}^{n+m}$ je měřitelné.
2. Jsou-li $f,g\colon (X,\mathcal{A}) \to \mathbb{R}^n$ měřitelná zobrazení, pak i zobrazení $f \pm g$ jsou měřitelná.
3. Jsou-li $f,g\colon (X,\mathcal{A}) \to \mathbb{R}$ měřitelné funkce, pak také funkce fg, $\max\{f,g\}$ a $\min\{f,g\}$ jsou měřitelné.

Důkaz. Každý otevřený interval $I \subset \mathbb{R}^{n+m}$ lze napsat jako $I = U \times V$, kde $U \subset \mathbb{R}^n$ a $V \subset \mathbb{R}^m$. Pak:

$$(f,g)^{-1}(U \times V) = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) \in \mathcal{A},$$

a tedy je (f,g) měřitelné. Měřitelnost $f+g$ plyne z faktu, že $f+g = + \circ (f,g)$. Sčítání $+\colon (x,y) \mapsto x+y$ je totiž spojité a (f,g) je měřitelné. Měřitelnost ostatních zobrazení se ukáže analogicky. □

Poznámka. Uveďme následující poznámky:

1. Prostor $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty,+\infty\}$ je metrický prostor například s metrikou $\varrho^* = |\varphi(x) - \varphi(y)|\ \forall x,y \in \mathbb{R}^*$, kde $\varphi(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+|x|}, & \forall x \in \mathbb{R}, \\ 1, & x = +\infty, \\ -1, & x = -\infty. \end{cases}$ Metrika ϱ^* se nazývá redukovaná a má následující vlastnosti:
   - v množině $\mathbb{R}$ je ekvivalentní s euklidovskou metrikou,
   - konvergence v prostoru $(\mathbb{R}^*, \varrho^*)$ splývá s konvergencí zavedenou v $\mathbb{R}^*$ pomocí okolí bodů.
2. $\mathcal{B}^* = \mathcal{B}(\mathbb{R}^*) = \sigma(\{[-\infty,a), a \in \mathbb{R}\})$. To plyne z následujících faktů:
   (a) $[-\infty,a)$ je otevřený interval v $\mathbb{R}^*$ $\forall a \in \mathbb{R}$.
   (b) $[a,+\infty] = \mathbb{R}^* \setminus [-\infty,a)$, $\forall a \in \mathbb{R}$.
   (c) $(a,+\infty] = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [a_n,+\infty]$, $\forall a \in \mathbb{R}$, kde $a_n \searrow a$, $a_n \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}$.
   (d) $(\alpha,\beta) = [-\infty,\beta) \cap (\alpha,+\infty]$, $\alpha < \beta$, $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$.
   (e) Každá otevřená množina $G \subset \mathbb{R}^*$ lze psát jako spočetné sjednocení intervalů typu $[-\infty,a)$, (α,β), $(b,+\infty]$, kde $a,b,\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ a $\alpha < \beta$.

Z uvedených faktů plyne tato věta:

Věta 16.19 (O měřitelných funkcích)**.** Nechť $(X, \mathcal{A})$ je měřitelný prostor. Pak platí:

1. $f\colon (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}$ je měřitelná funkce právě tehdy, když $f^{-1}((-\infty, a)) \in \mathcal{A}\ \forall a \in \mathbb{R}$.
2. $f\colon (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}^*$ je měřitelná funkce právě tehdy, když $f^{-1}([-\infty, a)) \in \mathcal{A}\ \forall a \in \mathbb{R}$.

Důsledek. Nechť $f, g\colon (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}^*$ jsou měřitelné funkce. Pak:

1. Množiny $\{x \in X, f(x) < g(x)\}$, $\{x \in X, f(x) \leq g(x)\}$ a $\{x \in X, f(x) = g(x)\}$ jsou měřitelné.
2. $\max\{f, g\}$ a $\min\{f, g\}$ jsou měřitelné funkce. Speciálně funkce $f^+ = \max\{f, 0\}$ a $f^- = \max\{-f, 0\}$ jsou měřitelné.

Věta 16.20 (O měřitelných funkcí podruhé)**.** Jsou-li funkce $f_n\colon (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, měřitelné, pak i funkce $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$, $\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n$, $\limsup_{n\to\infty} f_n$ a $\liminf_{n\to\infty} f_n$ jsou měřitelné.

Důkaz. Označme $g = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$. Pak pro libovolné $a \in \mathbb{R}^*$ platí:

$$g^{-1}([-\infty, a]) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X, f_n(x) \leq a\} \in \mathcal{A},$$

a tedy je g měřitelná. Nechť $h = \limsup_{n\to\infty} f_n$. Pro libovolné $a \in \mathbb{R}^*$ platí:

$$\begin{aligned} h^{-1}([-\infty, a]) &= \{x \in X, \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0\colon f_n(x) \leq a + \varepsilon\} \\ &= \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n_0=1}^{\infty} \bigcap_{n=n_0}^{\infty} \left\{x \in X, f_n(x) \leq a + \frac{1}{k}\right\} \in \mathcal{A}. \end{aligned}$$

Tím pádem je h měřitelná. Analogicky se ověřím případ infima a limes inferior. $\square$

Definice 16.21. Funkce $s\colon X \to [0, \infty)$ se nazývá jednoduchá, jestliže $s(X)$ je konečná množina. Dále platí:

$$s(X) = \sum_{\alpha\in s(X)} \alpha \chi_{s=\alpha}.$$

Součet na pravé straně nazýváme kanonickým tvarem jednoduché funkce s.

Věta 16.22 (O nezáporné měřitelné funkci)**.** Nechť $f\colon (X, \mathcal{A}) \to [0, \infty]$ je měřitelná funkce. Pak existuje posloupnost jednoduchých nezáporných funkcí $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tak, že $s_n \nearrow f$. Jestliže navíc je f omezená, pak $s_n \rightrightarrows f$.

Důkaz. Pro $n \in \mathbb{N}$ a $i \in \{1, 2, \dots, n2^n\}$ definujeme $E_{n,i} = f^{-1}\left(\left[\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n}\right)\right)$ a $F_n = f^{-1}([n, +\infty])$. Dále definujme:

$$s_n = \sum_{i=1}^{n2^n} \frac{i-1}{2^n} \chi_{E_{n,i}} + n\chi_{F_n}.$$

Množiny $E_{n,i}$ a F_n jsou měřitelné, a tedy s_n je měřitelná funkce. Je zřejmé, že s_n jsou jednoduché, nezáporné funkce a platí $s_n \leq s_{n+1}$. Je-li $x \in X$ takové, že $f(x) < +\infty$, pak pro dostatečně velká $n \in \mathbb{N}$ platí $f(x) - \frac{1}{2^n} \leq s_n(x) \leq f(x)$. Je-li $x \in X$ takové, že $f(x) = +\infty$, pak $s_n(x) = n\ \forall n \in \mathbb{N}$. Z uvedeného plyne, že $\forall x \in X$ platí $s_n(x) \to f(x)$. Je také zřejmé, že $s_n \rightrightarrows f$, pokud je funkce omezená, neboť pak $\forall x \in X$ a $\forall n \in \mathbb{N}$ máme $|s_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{2^n}$. $\square$

16.2 Abstraktní Lebesgeův integrál

Úmluva. V teorii integrálu chceme integrovat i přes množiny, které nemají konečnou míru. Proto budeme předpokládat, že $\forall a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ platí $a_1 \cdot a_2 = 0$, jestliže alespoň jeden činitel je 0. Tedy i $0 \cdot \infty = 0$ a $0 \cdot (-\infty) = 0$

Definice 16.23. Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou.

1. Je-li $s\colon (X, \mathcal{A}) \to [0, \infty]$ jednoduchá měřitelná funkce, zapíšeme ji v kanonickém tvaru $s = \sum_{j=1}^k \alpha_j \chi_{E_j}$, tedy $\alpha_j \geq 0$ a $E_j = \{x \in X, s(x) = \alpha_j\}$, a definujeme:

$$\int_X s \,\mathrm{d}\mu = \int_X s(x) \,\mathrm{d}\mu(x) = \sum_{j=1}^k \alpha_j \mu(E_j).$$

2. Je-li $f\colon (X, \mathcal{A}) \to [0, \infty]$ měřitelná funkce, pak definujeme:

$$\int_X f \,\mathrm{d}\mu = \sup \left\{ \int_X s \,\mathrm{d}\mu, 0 \leq s \leq f, s \text{ je jednoduchá měřitelná funkce} \right\}.$$

3. Je-li $f\colon (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}^*$, pak definujeme:

$$\int_X f \,\mathrm{d}\mu = \int_X f^* \,\mathrm{d}\mu = \int_X f^+ \,\mathrm{d}\mu - \int_X f^- \,\mathrm{d}\mu,$$

   má-li pravá strana smysl.

Poznámka. Vyslovme následující:

1. Je-li $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou a f, g jsou nezáporné měřitelné funkce na X splňující $0 \leq f \leq g$ na X, pak:

$$0 \leq \int_X f \,\mathrm{d}\mu \leq \int_X g \,\mathrm{d}\mu.$$

2. Je-li $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou a $E \in \mathcal{A}$, pak $\mathcal{A}_E = \{A \cap E, A \in \mathcal{A}\}$ je σ-algebra na E a $(E, \mathcal{A}_E, \mu)$ je prostor s mírou, a tedy $\int_E f \,\mathrm{d}\mu$ je definován. Je-li f měřitelná funkce na X a $E \in \mathcal{A}$, pak platí:

$$\int_X (f\chi_E) \,\mathrm{d}\mu = \int_E f \,\mathrm{d}\mu.$$

Lemma. Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou a s je jednoduchá, nezáporná a měřitelná funkce na X. Definujeme-li:

$$\varphi(A) = \int_A s \,\mathrm{d}\mu \ \forall A \in \mathcal{A},$$

pak φ je míra na $\mathcal{A}$.

Důkaz. Je zřejmé, že $\varphi \geq 0$. Nechť $s = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \chi_{E_j}$ je kanonický tvar funkce s. Je-li $A \in \mathcal{A}$, pak:

$$\varphi(A) = \int_A s \,\mathrm{d}\mu = \int_X \chi_A s \,\mathrm{d}\mu = \int_X \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \chi_{E_j \cap A} \,\mathrm{d}\mu = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \mu(E_j \cap A).$$

Tedy $\varphi(\varnothing) = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \mu(E_j \cap \varnothing) = 0$. Nechť $A_i \in \mathcal{A}\ \forall i \in \mathbb{N}$, $A_i \cap A_j = \varnothing$ pro $i \neq j$. Nechť $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. Pak:

$$\begin{aligned}\varphi(A) &= \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \mu(E_j \cap A) = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_j \cap A_i) = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \mu(E_j \cap A_i) \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \mu(E_j \cap A_i) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \varphi(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi(A_i).\end{aligned}$$

Dokázali jsme, že φ je míra na $\mathcal{A}$. □

Věta 16.24 (Leviho věta)**.** Je-li $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou a f_n, $n \in \mathbb{N}$, jsou nezáporné měřitelné funkce na X splňující $f_n \nearrow f$, pak:

$$\int_X f_n \,\mathrm{d}\mu \nearrow \int_X f \,\mathrm{d}\mu.$$

Můžeme také psát:

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu = \int_X \lim_{n\to\infty} f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

Důkaz. Protože $f_n \leq f_{n+1}$, tak $\int_X f_n \,\mathrm{d}\mu \leq \int_X f_{n+1} \,\mathrm{d}\mu$, a tedy existuje $\alpha \in [0, \infty]$ tak, že $\int_X f_n \,\mathrm{d}\mu \to \alpha$. Funkce f je měřitelná na X, protože limita pro $n \to \infty$ z měřitelných funkcí je opět měřitelná funkce. Protože $f_n \leq f$, tak $\int_X f_n \,\mathrm{d}\mu \leq \int_X f \,\mathrm{d}\mu$. Z toho plyne, že $\alpha \leq \int_X f \,\mathrm{d}\mu$. Dokážeme nyní opačnou nerovnost. Nechť s je libovolná jednoduchá měřitelná funkce splňující $0 \leq s \leq f$ a nechť $c \in (0, 1)$. $\forall n \in \mathbb{N}$ definujeme:

$$E_n = \{x \in X, f_n(x) \geq cs(x)\}.$$

Množiny E_n jsou měřitelné, $E_1 \subset E_2 \subset \dots$ a $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_n$. Tuto rovnost dokážeme. Nechť $x \in X$. Je-li $f(x) = 0$, pak $s(x) = 0$, a tedy $x \in E_1$. Je-li $f(x) > 0$, pak $f(x) > cs(x)$, a tedy existuje $n \in \mathbb{N}$ tak, že $f_n(x) > cs(x)$. Z toho dostáváme, že $x \in E_n$. Dále platí:

$$\int_X f_n \,\mathrm{d}\mu \geq \int_{E_n} f_n \,\mathrm{d}\mu \geq c \int_{E_n} s \,\mathrm{d}\mu,$$

protože $f_n \geq cs$ v E_n. Protože funkce $\varphi(A) = \int_A s \,\mathrm{d}\mu$ je míra na $\mathcal{A}$, tak $c \int_{E_n} s \,\mathrm{d}\mu \to c \int_X s \,\mathrm{d}\mu$. Dále $\int_X f_n \,\mathrm{d}\mu \to \alpha$. Tím pádem platí:

$$\alpha \geq c \int_X s \,\mathrm{d}\mu.$$

Limitní přechod pro $c \nearrow 1$ dá $\alpha \geq \int_X s \, \mathrm{d}\mu$. Odtud dostaneme:

$$\alpha \geq \sup_{0 \leq s \leq f} \int_X s \, \mathrm{d}\mu = \int_X f \, \mathrm{d}\mu.$$

Z toho ihned vidíme, že $\alpha \geq \int_X f \, \mathrm{d}\mu$. Nakonec máme $\int_X f_n \, \mathrm{d}\mu \to \int_X f \, \mathrm{d}\mu$. □

Věta 16.25 (Fatouovo lemma)**.** Je-li $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou a f_n, $n \in \mathbb{N}$, jsou nějaké nezáporné měřitelné funkce na X, pak:

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n \, \mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu.$$

Důkaz. Nechť $g_n(x) = \inf\{f_k(x), k \geq n\}$, $x \in X$, $n \in \mathbb{N}$. Pak g_n jsou dle věty o měřitelných funkcích podruhé měřitelné funkce a platí:

$$g_n \nearrow g = \lim_{n\to\infty} g_n = \liminf_{n\to\infty} f_n.$$

Podle Leviho věty platí $\int_X g_n \, \mathrm{d}\mu \nearrow \int_X g \, \mathrm{d}\mu$. Jelikož $\forall n \in \mathbb{N}$ je $g_n \leq f_n$, tak $\int_X g_n \, \mathrm{d}\mu \leq \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu$. Limitním přechodem dostáváme:

$$\liminf_{n\to\infty} \int_X g_n \, \mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu,$$

kde také platí:

$$\liminf_{n\to\infty} \int_X g_n \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X g_n \, \mathrm{d}\mu = \int_X g \, \mathrm{d}\mu = \int_X \liminf_{n\to\infty} f_n \, \mathrm{d}\mu.$$

Dostáváme tedy:

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n \, \mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu.$$

Důkaz je hotov. □

Definice 16.26. Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou, $E \in \mathcal{A}$ a $x \in X$. Nechť $V(x)$ je nějaká vlastnost, kterou bod x může, ale nemusí mít. Řekneme, že $V(x)$ platí μ-skoro všude na E, jestliže existuje $N \in \mathcal{A}$, $N \subset E$ a $\mu(N) = 0$ (jedná se tedy o nulovou množinu) tak, že $V(x)$ platí $\forall x \in E \setminus N$. Je-li $E = X$, pak místo μ-skoro všude na E píšeme pouze μ-skoro všude. Nehrozí-li nedrozumění, o jakou míru se jedná, pak místo μ-skoro všude píšeme pouze skoro všude.

Lemma 16.27. Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou a f, g jsou měřitelné funkce na X takové, že $f = g$ skoro všude. Pak:

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu = \int_X g \, \mathrm{d}\mu,$$

jakmile má jedna strana rovnosti smysl.

Důkaz. Předpokládejme, že f i g jsou nezáporné funkce. Je-li $s \leq f$ libovolná měřitelná jednoduchá funkce, pak $s' = s\chi_{\{f=g\}}$ je rovněž jednoduchá měřitelná funkce splňující $s' \leq g$ a $\int s \,\mathrm{d}\mu = \int s' \,\mathrm{d}\mu$. Musí tedy být $\int f \,\mathrm{d}\mu \leq \int g \,\mathrm{d}\mu$. Obrácená nerovnost platí ze symetrie. Pro funkce, které nejsou nezáporné využijeme linearity integrálu a faktu $f = f^+ - f^-$. □

Definice 16.28. Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou, $D \in \mathcal{A}$, $\mu(D^c) = 0$ a $f\colon D \to \mathbb{R}^*$. Řekneme, že f je měřitelná na X, jestliže pro každou otevřenou množinu $G \subset \mathbb{R}$ platí $f^{-1}(G) \cap D \in \mathcal{A}$. Pro měřitelnou funkci f pak definujeme $\int_X f \,\mathrm{d}\mu = \int_X \tilde{f} \,\mathrm{d}\mu$, kde $\tilde{f} = f$ na D a $\tilde{f} = 0$ na D^c.

Definice 16.29. Označíme:

$$\mathscr{L}^*(\mu) = \left\{ f\colon (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}^*, f \text{ je měřitelná na } X, \int_X f \,\mathrm{d}\mu \text{ existuje} \right\}.$$

$$\mathscr{L}^1(\mu) = \left\{ f \in \mathscr{L}^*(\mu), \int_X f \,\mathrm{d}\mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

Věta 16.30 (Linearita integrálu)**.** Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou, $f, g \in \mathscr{L}^*(\mu)$ a $\lambda \in \mathbb{R}$. Pak:

$$\int_X \lambda f \,\mathrm{d}\mu = \lambda \int_X f \,\mathrm{d}\mu,$$

$$\int_X f + g \,\mathrm{d}\mu = \int_X f \,\mathrm{d}\mu + \int_X g \,\mathrm{d}\mu,$$

má-li pravá strana smysl.

Důkaz. Nechť f, g jsou nezáporné měřitelné jednoduché funkce. Můžeme tyto funkce zapsat jako $f = \sum_{i=1}^k \alpha_i \chi_{E_i}$ a $g = \sum_{j=1}^l \beta_j \chi_{F_j}$. Pak platí:

$$f + g = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l (\alpha_i + \beta_j) \chi_{E_i \cap F_j}.$$

Toto je opět jednoduchá měřitelná funkce. Tím pádem platí:

$$\int_X (f + g) \,\mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l (\alpha_i + \beta_j) \chi_{E_i \cap F_j}.$$

Z aditivity míry plyne, že $\mu(E_i) = \sum_{j=1}^l \mu(E_i \cap F_j)$ pro $j = 1, \ldots, l$ a $\mu(F_j) = \sum_{i=1}^k \mu(E_i \cap F_j)$ pro $i = 1, \ldots, k$, a proto platí:

$$\int_X f \,\mathrm{d}\mu + \int_X g \,\mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l (\alpha_i + \beta_j) \chi_{E_i \cap F_j} = \int_X (f + g) \,\mathrm{d}\mu.$$

Předpokládejme nyní, že f a g jsou nezáporné měřitelné funkce. Pak existují jednoduché funkce s_n, t_n takové, že $s_n \nearrow f$ a $t_n \nearrow g$. Dle Leviho věty platí $\int_X s_n \,\mathrm{d}\mu \nearrow \int_X f \,\mathrm{d}\mu$ a

$\int_X t_n \,\mathrm{d}\mu \nearrow \int_X g \,\mathrm{d}\mu$. Opět z Leviho věty platí $\int_X s_n + t_n \,\mathrm{d}\mu \nearrow \int_X f + g \,\mathrm{d}\mu$. Dále $\int_X s_n + t_n \,\mathrm{d}\mu = \int_X s_n \,\mathrm{d}\mu + \int_X t_n \,\mathrm{d}\mu$. Limitním přechodem bychom dostali požadovanou rovnost. Nechť $f, g \in \mathscr{L}^*(\mu)$ jsou libovolné. Platí následující:

$$f + g = (f+g)^+ - (f+g)^- = (f^+ - f^-) + (g^+ - g^-).$$

Tím pádem:

$$(f+g)^+ + f^- + g^- = (f+g)^- + f^+ + g^+.$$

Všechny tyto funkce jsou nezáporné, a tedy můžeme psát:

$$\int_X (f+g)^+ \,\mathrm{d}\mu + \int_X f^- \,\mathrm{d}\mu + \int_X g^- \,\mathrm{d}\mu = \int_X (f+g)^- \,\mathrm{d}\mu + \int_X f^+ \,\mathrm{d}\mu + \int_X g^+ \,\mathrm{d}\mu.$$

Aby měl součet $\int_X f \,\mathrm{d}\mu + \int_X g \,\mathrm{d}\mu$ smysl, musí být buď $\int_X f^+ \,\mathrm{d}\mu < \infty$ a $\int_X g^+ \,\mathrm{d}\mu < \infty$, nebo $\int_X f^- \,\mathrm{d}\mu < \infty$ a $\int g^- \,\mathrm{d}\mu < \infty$. Uvažujme druhou variantu. Pak z $(f+g)^- \leq f^- + g^-$ plyne $\int_X f^- + g^- \,\mathrm{d}\mu < \infty$. Odečtením všech integrálů ze záporných částí ve výše uvedené rovnosti dostaneme požadovaný vztah $\int_X f + g \,\mathrm{d}\mu = \int_X f \,\mathrm{d}\mu + \int_X g \,\mathrm{d}\mu$. V případě první varianty bychom odečetli integrály z kladných částí. □

Poznámka. Má-li druhá rovnost z předchozí věty smysl, pak nemůžeme dostat případ, kdy jedna z funkcí f, g je rovna $+\infty$ a druhá $-\infty$ na množině kladné míry. Odtud plyne, že součet $f + g$ je definován skoro všude.

Důsledek. Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou a f_n, $n \in \mathbb{N}$, nezáporné měřitelné funkce na X. Pak:

$$\int_X \sum_{n=1}^{\infty} f_n \,\mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

Důkaz. Nechť $k \in \mathbb{N}$. Pak:

$$\int_X \sum_{n=1}^{k} f_n \,\mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{k} \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

Zde stačí vyjít z předchozí věty. Pro konečné k stačí tedy pouze využít linearity. Použitím limitního přechodu pro $k \to \infty$ a Leviho věty dostaneme dané tvrzení. □

Věta 16.31 (Zobecnění Leviho věty)**.** Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou a f_n, $n \in \mathbb{N}$, jsou měřitelné funkce na X splňující $f_n \nearrow f$ a $\int_X f_1 > -\infty$. Pak:

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu = \int_X f \,\mathrm{d}\mu.$$

Důkaz. Je-li $\int f_1 \,\mathrm{d}\mu = \infty$, tvrzení zřejmě platí. Nechť tedy $\int_X f_1 \,\mathrm{d}\mu \in \mathbb{R}$. Protože $0 \leq f_n - f_1 \nearrow f - f_1$, tak podle Leviho věty platí $\int_X f_n - f_1 \,\mathrm{d}\mu \nearrow \int f - f_1 \,\mathrm{d}\mu$. Z linearity integrálu dostaneme, že $\int_X f_n \,\mathrm{d}\mu \nearrow \int_X f \,\mathrm{d}\mu$. □

Důsledek. Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou a f_n, $n \in \mathbb{N}$, jsou měřitelné funkce splňující $f_n \searrow f$ a $\int_X f_1 < \infty$. Pak:

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu = \int_X f \,\mathrm{d}\mu.$$

Důkaz. Aplikace předchozí věty na posloupnost $\{-f_n\}$. □

Věta 16.32 (Lebesgueova věta)**.** Je-li $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou a f_n, $n \in \mathbb{N}$, jsou měřitelné funkce takové, že $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ skoro všude na X a existuje $g \in \mathscr{L}^1(\mu)$ taková, že $|f_n| \leq g$ skoro všude $\forall n \in \mathbb{N}$, pak $f \in \mathscr{L}^1(\mu)$ a platí:

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu = \int_X f \, \mathrm{d}\mu.$$

Důkaz. Předefinujeme funkce f_n, f na množině

$$\{x, f_n(x) \not\to f(x)\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x, |f_n(x)| > g(x)\}$$

nulové míry tak, aby předpoklady platily $\forall x \in X$. Je-li:

$$\begin{aligned} g_n &= \inf\{f_n, f_{n+1}, \dots\}, \\ h_n &= \sup\{f_n, f_{n+1}, \dots\}, \end{aligned}$$

kde $n \in \mathbb{N}$, pak $\forall n \in \mathbb{N}$ platí:

$$-g \leq g_n \leq f_n \leq h_n \leq g.$$

Odtud plyne, že $g_n, f_n, h_n \in \mathscr{L}^1(\mu)$ a $-g \leq \lim_{n\to\infty} f_n \leq g$, kde $\lim_{n\to\infty} f_n = f$, a tedy i $f \in \mathscr{L}^1(\mu)$. Protože $g_n \nearrow f$, $h_n \searrow f$ pro $n \to \infty$, tak podle zobecněné Leviho věty a předchozího důsledku platí $\int_X g_n \, \mathrm{d}\mu \to \int_X f \, \mathrm{d}\mu$ a $\int_X h_n \, \mathrm{d}\mu \to \int_X f \, \mathrm{d}\mu$. Protože

$$\int_X g_n \, \mathrm{d}\mu \leq \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu \leq \int_X h_n \, \mathrm{d}\mu,$$

tak $\int_X f_n \, \mathrm{d}\mu \to \int_X f \, \mathrm{d}\mu$. □

Důsledek. Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou a f_n, $n \in \mathbb{N}$, jsou měřitelné funkce na X takové, že $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje skoro všude. Jestliže existuje $g \in \mathscr{L}^1(\mu)$ tak, že $\left|\sum_{n=1}^{k} f_n\right| \leq g$ skoro všude $\forall k \in \mathbb{N}$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \in \mathscr{L}^1(\mu)$ a platí:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu = \int_X \sum_{n=1}^{\infty} f_n \, \mathrm{d}\mu.$$

Důkaz. Aplikace Lebesgueovy věty na posloupnost částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$. □

Věta 16.33 (Další vlastnosti měřitelných funkcí a integrálu)**.** Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou. Platí:

1. Je-li f nezáporná měřitelná funkce na X a $\int_X f \, \mathrm{d}\mu = 0$, pak $f = 0$ skoro všude.
2. Je-li $f \in \mathscr{L}^1(\mu)$ a $\int_E f \, \mathrm{d}\mu = 0$ pro každou měřitelnou množinu $E \in \mathcal{A}$, pak $f = 0$ skoro všude.

3. Je-li f měřitelná, pak $\int_X f \,\mathrm{d}\mu \in \mathbb{R}$ právě tehdy, když $\int_X |f| \,\mathrm{d}\mu \in \mathbb{R}$.
4. Je-li $f \in \mathscr{L}^1(\mu)$, pak $\left|\int_X f \,\mathrm{d}\mu\right| \leq \int_X |f| \,\mathrm{d}\mu$.
5. Je-li $f \in \mathscr{L}^1(\mu)$, pak f je konečná skoro všude.

Důkaz. Postupně dokážeme jednotlivá tvrzení:

1. Označme $A_n = \left\{x \in X, f(x) \geq \frac{1}{n}\right\}$. Jistě $A_n \in \mathcal{A}$ a $\chi_{A_n} \leq nf$. Tím pádem platí:
$$\mu(A_n) = \int_X \chi_{A_n} \,\mathrm{d}\mu \leq n \int_X f \,\mathrm{d}\mu = 0.$$
Jelikož $\{f > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, tak platí $\mu(\{f > 0\}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = 0$.
2. Nechť $E_+ = \{f > 0\}$. Pak dle předpokladu platí:
$$\int_X f^+ \,\mathrm{d}\mu = \int_{E_+} f \,\mathrm{d}\mu = 0.$$
Dále protože $f^+ \geq 0$, tak platí $f^+ = 0$ skoro všude podle prvního bodu věty. Podobně pro $E_- = \{f < 0\}$ odvodíme $f^- = 0$ skoro všude. Pak tedy $f = 0$ skoro všude.
3. Zřejmě $|f| = f^+ + f^-$. Pokud $\int_X |f| \,\mathrm{d}\mu \in \mathbb{R}$, pak také $\int_X f \,\mathrm{d}\mu \in \mathbb{R}$, neboť $|f| \geq f^+$ a $|f| \geq f^-$. Naopak pokud jsou f^+ a f^- integrovatelné, pak je integrovatelný i jejich součet $|f|$.
4. Platí:
$$\left|\int_X f \,\mathrm{d}\mu\right| = \left|\int_X f^+ \,\mathrm{d}\mu - \int_X f^- \,\mathrm{d}\mu\right| \leq \int_X f^+ \,\mathrm{d}\mu + \int_X f^- \,\mathrm{d}\mu = \int_X |f| \,\mathrm{d}\mu.$$
5. Triviální.

Tím je důkaz hotov. □

16.3 Lebesgueův integrál v $\mathbb{R}$

Úmluva. Restrikcí míry λ^1 na interval $I \subset \mathbb{R}$ opět značíme symbolem λ^1. Je-li $I\colon (a,b) \subset \mathbb{R}$, $a < b$, pak $\int_a^b f \,\mathrm{d}\lambda^1 = \int_{(a,b)} f \,\mathrm{d}\lambda^1$.

Věta 16.34 (Vztah Riemannova a Lebesgueova integrálu)**.** Je-li $-\infty < a < b < +\infty$ a $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ taková, že $(R)\int_a^b f(x) \,\mathrm{d}x$ existuje, pak $\int_a^b f \,\mathrm{d}\lambda^1 \in \mathbb{R}$ a platí:
$$\int_a^b f \,\mathrm{d}\lambda^1 = (R)\int_a^b f(x) \,\mathrm{d}x.$$

Věta 16.35 (Vztah Newtonova a Lebesgueova integrálu)**.** Nechť $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ a $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ je spojitá a nezáporná. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

1. $(N)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ existuje.
2. $\int_a^b f\,\mathrm{d}\lambda^1 \in \mathbb{R}$.

Platí-li jedna z podmínek, pak:

$$(N)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f\,\mathrm{d}\lambda^1.$$

16.4 Integrál závislý na parametru

Věta 16.36 (O limitě integrálu závislém na parametru)**.** Nechť $(X,\mathcal{A},\mu)$ je prostor s mírou, (T,ϱ) je metrický prostor, $M \subset T$, $t_0 \in M'$ (množina hromadných bodů M) a $f\colon X \times T \to \mathbb{R}$. Nechť platí:

1. Pro μ-skoro všechna $x \in X$ existuje $\lim_{t\to t_0, t\in M} f(x,t) = \varphi(x)$.
2. $\forall t \in M$ je funkce $f(\cdot,t)$[4] μ-měřitelná.
3. Existuje $g \in \mathscr{L}^1(\mu)$ tak, že $|f(x,t)| \leq g(x)$ pro μ-skoro všechna $x \in X$ a $\forall t \in M \setminus \{t_0\}$.

Pak:

$$\lim_{t\to t_0, t\in M} \int_X f(x,t)\,\mathrm{d}\mu = \int_X \varphi(x)\,\mathrm{d}\mu.$$

Tedy je možné zaměnit limitu a integrál. Navíc $\varphi \in \mathscr{L}^1(\mu)$.

Důkaz. Nechť $t_n \in M, n \in \mathbb{N}$, $t_n \neq t_0$ a $t_n \to t_0$. Z Heineho věty stačí ověřit, že $\lim_{n\to\infty} \int_X f(x,t_n)\,\mathrm{d}\mu = \int_X \varphi(x)$. Víme, že $f(x,t_n) \to \varphi(x)$ pro μ-skoro všechna $x \in X$. Dále $|f(x,t_n)| \leq g(x)$ pro μ-skoro všechna $x \in X$ a $\forall n \in \mathbb{N}$. Rovnost výše tedy plyne z aplikace Lebesgueovy věty, jejíž předpoklady jsme ověřili a jsou splněny, na $f_n(x) = f(x,t_n)$. Dále platí, že $\varphi \in \mathscr{L}^1(\mu)$, opět z Lebesgueovy věty. □

Věta 16.37 (O spojitosti integrálu závislém na parametru)**.** Nechť $(X,\mathcal{A},\mu)$ je prostor s mírou, (T,ϱ) je metrický prostor, $M \subset T$ a $f\colon X \times T \to \mathbb{R}$. Nechť platí:

1. Pro μ-skoro všechna $x \in X$ jsou funkce $f(x,\cdot)$ spojité na M.
2. $\forall t \in M$ je funkce $f(\cdot,t)$ μ-měřitelná.
3. Existuje $g \in \mathscr{L}^1(\mu)$ tak, že $|f(x,t)| \leq g(x)$ pro μ-skoro všechna $x \in X$ a $\forall t \in M$.

Pak funkce $F(t) = \int_X f(x,t)\,\mathrm{d}\mu$, $t \in M$, je spojitá na M.

Důkaz. Dle Heineho věty stačí dokázat: Je-li $t_0 \in M \cap M'$, pak $\lim_{t\to t_0, t\in M} F(t) = F(t_0)$, tedy:

$$\lim_{t\to t_0, t\in M} \int_X f(x,t)\,\mathrm{d}\mu = \int_X f(x,t_0)\,\mathrm{d}\mu,$$

což plyne z předešlé věty. Dle prvního bodu totiž existuje $\lim_{t\to t_0, t\in M} f(x,t) = f(x,t_0)$ pro μ-skoro všechna $x \in X$. □

[4] Jedná se o zápis, kdy máme funkci proměnné x a t je pevné.

Věta 16.38 (O derivaci integrálu zavislém na parametru)**.** Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou, $I \subset \mathbb{R}$ je otevřený interval a $f\colon X \times I \to \mathbb{R}$. Nechť platí:

1. $\forall t \in I$ je funkce $f(\cdot, t)$ μ-měřitelná.
2. Existuje $N \in \mathcal{A}$, $\mu(N) = 0$ tak, že $\forall x \in X \setminus N$ a $\forall t \in I$ existuje konečná derivace $\frac{\partial f}{\partial t}(x, t)$.
3. Existuje $g \in \mathscr{L}^1(\mu)$ tak, že $\forall x \in X \setminus N$ a $\forall t \in I$ platí $\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x, t)\right| \leq g(x)$.
4. Integrál $F(t) = \int_X f(x, t) \,\mathrm{d}\mu$, $t \in I$ konverguje alespoň pro jednu hodnotu $t \in I$.

Pak integrál výše konverguje $\forall t \in I$ a navíc platí:

$$F'(t) = \frac{\partial}{\partial t} \int_X f(x, t) \,\mathrm{d}\mu = \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \,\mathrm{d}\mu,$$

a to $\forall t \in I$.

Důkaz. Nechť $t, t+h \in I$. Pak $\forall x \in X \setminus N$ dle Lagrangeovy věty (věta o přírustku funkce) platí:

$$|f(x, t+h) - f(x, t)| = \left|h \frac{\partial f}{\partial t}(x, t + \xi h)\right| \leq |h| g(x),$$

kde $\xi \in (0, 1)$. Speciálně je-li $t \in I$ a t_0 onen bod, pro který integrál výše konverguje, tak $\forall x \in X \setminus N$ platí:

$$\begin{aligned} |f(x, t)| &\leq |f(x, t) - f(x, t_0) + f(x, t_0)| \leq |f(x, t_0)| + |f(x, t) - f(x, t_0)| \\ &\leq |f(x, t_0)| + |t - t_0| g(x). \end{aligned}$$

Odtud plyne, že integrál konverguje $\forall t \in I$, protože $\int_X f(x, t_0) \,\mathrm{d}\mu$ je z předpokladu konečný a $\int_X |t - t_0| g(x) \,\mathrm{d}\mu$ také. Dále jestliže $t, t+h \in I$, $h \neq 0$, tak:

$$\frac{F(t+h) - F(t)}{h} = \int_X \frac{f(x, t+h) - f(x, t)}{h} \,\mathrm{d}\mu.$$

Jelikož $\forall x \in X \setminus N$ a $\forall t, t+h \in I$ platí:

$$\left|\frac{f(x, t+h) - f(x, t)}{h}\right| \leq \left|\frac{\partial f}{\partial t}(x, t + \xi h)\right| \leq g(x),$$

kde $h \neq 0$, tak podle věty o limitě integrálu závislém na parametru dostáváme:

$$\lim_{h \to 0} \int_X \frac{f(x, t+h) - f(x, t)}{h} \,\mathrm{d}\mu = \int_X \lim_{h \to 0} \frac{f(x, t+h) - f(x, t)}{h} \,\mathrm{d}\mu = \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \,\mathrm{d}\mu.$$

Nakonec:

$$F'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{F(t+h) - F(t)}{h} = \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \,\mathrm{d}\mu.$$

Tím je důkaz hotov. $\square$

16.5 d-systémy

Definice 16.39. Systém $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(X)$ nazveme d-systém, popřípadě také říkáme Dynkinův systém, jestliže platí:

1. $\varnothing \in \mathcal{D}$.
2. Jestliže $D \in \mathcal{D}$, pak $D^c \in \mathcal{D}$.
3. Jestliže $\forall n \in \mathbb{N}$ je $D_n \in \mathcal{D}$, $D_n \cap D_m = \varnothing$, $n \neq m$, pak $\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n \in \mathcal{D}$.

Poznámka. Uveďme několik poznámek:

1. Každá σ-algebra je d-systém, ale ne naopak.
2. Protože $\varnothing \in \mathcal{D}$, tak d-systém je uzavřen na konečné sjednocení disjunktních množin.
3. Je-li $A, B \in \mathcal{D}$, $A \subset B$, tak $B \setminus A \in \mathcal{D}$, neboť platí:
$$B \setminus A = X \setminus ((X \setminus B) \cup A) \in \mathcal{D},$$
protože sjednocení disjunktních množin patří do $\mathcal{D}$.
4. Jsou-li μ a ν dvě míry na $(X, \mathcal{A})$ splňující $\mu(X) = \nu(X) < +\infty$, pak
$$\mathcal{D} = \{A \in \mathcal{A}, \mu(A) = \nu(A)\}$$
je d-systém, neboť:
   (a) Nechť $\varnothing \in \mathcal{A}$. Jistě $\mu(\varnothing) = 0 = \nu(\varnothing)$, a tedy $\varnothing \in \mathcal{D}$.
   (b) Jestliže $A \in \mathcal{D}$, pak $A \in \mathcal{A}$ a $\mu(A) = \nu(A)$. Zřejmě:
$$\mu(X \setminus A) = \mu(X) - \mu(A) = \nu(X) - \nu(A) = \nu(X \setminus A) \Rightarrow A^c \in \mathcal{D}.$$
   (c) Nechť $\forall n \in \mathbb{N}$ je $A_n \in \mathcal{D}$, $A_n \cap A_m = \varnothing$, $n \neq m$. Pak platí:
$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n) = \nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{D}.$$

   Dokázali jsme, že $\mathcal{D}$ je d-systém. Později ukážeme, že tento systém není σ-algebra.

Věta 16.40 (O průniku d-systémů)**.** Nechť $\mathcal{D}_n$, $n \in I$, I je libovolná množina indexů, jsou d-systémy na X. Pak $\bigcap_{\alpha \in I} \mathcal{D}_\alpha$ je d-systém.

Důsledek. Je-li $\mathscr{S} \subset \mathcal{P}(X)$, pak existuje nejmenší d-systém $d\mathscr{S}$ obsahující systém $\mathscr{S}$.

Důkaz. Platí:
$$d\mathscr{S} = \bigcap\{\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(X), \mathscr{S} \subset \mathcal{D}, \mathcal{D} \text{ je } d\text{-systém}\}.$$
$\mathscr{S}$ je v každém d-systému $\mathcal{D}$, tedy je i v průniku. Dále průnik je dle předchozí věty také d-systém. $\square$

Poznámka. Je-li $\mathscr{S} \subset \mathcal{P}(X)$, pak $d\mathscr{S} \subset \sigma\mathscr{S}$.

Definice 16.41. Systém $\mathscr{S} \subset \mathcal{P}(X)$ nazveme π-systém, jestliže systém $\mathscr{S}$ je uzavřen na konečné průniky množin z $\mathscr{S}$.

Nyní uvedeme dvě pomocná tvrzení, které pak využijeme k důkazu následující věty.

Tvrzení. Je-li d-systém $\mathcal{D}$ na X zároveň π-systémem, pak $\mathcal{D}$ je σ-algebra na X.

Důkaz. Je třeba dokázat následující:

$$A_n \in \mathcal{D}\ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{D}.$$

Důkaz rozložíme do několika kroků:

1. Dokážeme, že $A, B \in \mathcal{D}$ implikuje, že $A \setminus B \in \mathcal{D}$. Platí:

   $$A \setminus B = A \setminus (A \cap B) \in \mathcal{D},$$

   protože $\mathcal{D}$ je π-systém, a tedy $A \cup B \in \mathcal{D}$. Dále dle třetí části předminulé poznámky je $A \setminus (A \cap B) \in \mathcal{D}$.

2. Jestliže $A, B \in \mathcal{D}$, pak $A \cup B \in \mathcal{D}$, neboť

   $$A \cup B = (A \setminus B) \cup B \in \mathcal{D},$$

   protože $A \setminus B \in \mathcal{D}$ dle předchozího a $(A \setminus B) \cap B = \varnothing$. Dále d-systém je uzavřen na konečné sjednocení disjunktních množin, a tedy $(A \setminus B) \cup B \in \mathcal{D}$.

3. Z předchozího plyne, že d-systém $\mathcal{D}$ je uzavřen na konečné sjednocení.

4. Nechť $\forall n \in \mathbb{N}$ je $A_n \in \mathcal{D}$. Položíme $A_0 = \varnothing$. Pak:

   $$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)\right)}_{\tilde{A}_n \in \mathcal{D}} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \tilde{A}_n \in \mathcal{D}.$$

   Je důležité, že $\tilde{A}_n$ jsou disjunktní, tedy $\tilde{A}_n \cap \tilde{A}_m = \varnothing$ pro $n \neq m$. Sjednocení disjunktních množin patří do d-systému.

Tímto jsme dokázali toto pomocné tvrzení. □

Tvrzení. Je-li $\mathscr{S} \subset \mathcal{P}(X)$ π-systém, pak $d\mathscr{S}$ je π-systém.

Důkaz. Označme $\mathcal{D} = \{D \in d\mathscr{S}, D \cap S \in d\mathscr{S}\ \forall S \in \mathscr{S}\}$. Dokážeme, že $\mathcal{D}$ je d-systém. Toto tvrzení dokážeme v několika krocích:

1. $\varnothing \in \mathcal{D}$, neboť $\varnothing \in d\mathscr{S}$ a $\varnothing \cap S = \varnothing \in d\mathscr{S}\ \forall S \in \mathscr{S}$.

2. $D \in \mathcal{D}$, tedy $D \in d\mathscr{S}$ a $D \cap S \in d\mathscr{S}$ $\forall S \in \mathscr{S}$. Pak $\forall S \in \mathscr{S}$ platí:
$$D^c \cap S = ((X \setminus D) \cap S) = (X \cap S) \setminus (D \cap S) = S \setminus (D \cap S) \in d\mathscr{S}.$$
Jelikož $D \in d\mathscr{S}$, tak $D^c \in d\mathscr{S}$. Nakonec máme, že $D^c \in \mathcal{D}$.

3. Jestliže $D_n \in \mathcal{D}$, $n \in \mathbb{N}$, $D_n \cap D_m = \varnothing$, $n \neq m$, pak $D_n \in d\mathscr{S}$ a $D_n \cap S \in d\mathscr{S}$ $\forall S \in \mathscr{S}$. Jelikož $D_n \in d\mathscr{S}$, tak $\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n \in d\mathscr{S}$, což plyne ze třetí vlastnosti d-systému. Dále $\forall S \in \mathscr{S}$ platí:
$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n\right) \cap S = \bigcup_{n=1}^{\infty} (D_n \cap S) \in d\mathscr{S},$$
protože $D_n \cap S \in d\mathscr{S}$, jelikož $(D_n \cap S) \cap (D_m \cap S) = \varnothing$, $m \neq n$. Toto platí, protože $D_n \cap S \subset D_n$, $D_m \cap S \subset D_m$ a $D_n \cap D_m = \varnothing$, $m \neq n$. Nakonec dostaneme, že $\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n \in \mathcal{D}$.

Dokázali jsme, že $\mathcal{D}$ je d-systém. Dále také platí, že $\mathscr{S} \subset \mathcal{D}$, neboť $\forall D \in \mathscr{S}$ máme $D \in d\mathscr{S}$ a přitom $D \cap S \in \mathscr{S}$ $\forall S \in \mathscr{S}$, protože $\mathscr{S}$ je π-systém. Odtud $D \cap S \in d\mathscr{S}$ $\forall S \in \mathscr{S}$, protože $\mathscr{S} \subset d\mathscr{S}$. Tedy $D \in \mathcal{D}$. Z inkluze $\mathscr{S} \subset D$ plyne, že $d\mathscr{S} \subset d\mathcal{D} = \mathcal{D}$, protože $\mathcal{D}$ je d-systém. Navíc z definice systému $\mathcal{D}$ máme $\mathcal{D} \subset d\mathscr{S}$. Celkem tedy $\mathcal{D} = d\mathscr{S}$, což znamená:
$$\forall D \in d\mathscr{S} : D \cap S \in d\mathscr{S} \ \forall S \in \mathscr{S}.$$
Toto tvrzení budeme ještě potřebovat, označme jej proto $(*)$. Je-li $D \in d\mathscr{S}$ pevné a $\mathcal{D}_D = \{E \in \mathcal{P}(X), E \cap D \in d\mathscr{S}\}$, pak $\mathcal{D}_D$ je d-systém. Dokážeme v několika krocích:

1. $\varnothing \in \mathcal{D}_D$, neboť $\varnothing \in \mathcal{P}(X)$ a $\varnothing \cap D = \varnothing \in d\mathscr{S}$.

2. $E \in \mathcal{D}_D$ implikuje, že $E \cap D \in d\mathscr{S}$, a tedy:
$$(X \setminus E) \cap D = (X \cap D) \setminus (E \cap D) = D \setminus (E \cap D) \in d\mathscr{S},$$
což plyne z předminulé poznámky. Ukázali jsme, že $E^c \cap D \in d\mathscr{S}$, a tedy $E^c = (X \setminus E) \in \mathcal{D}_D$.

3. Nechť $\forall n \in \mathbb{N}$ je $E_n \in \mathcal{D}_D$ a $E_n \cap E_m = \varnothing$ pro $n \neq m$. Pak $\forall n \in \mathbb{N}$ platí $E_n \cap D \in d\mathscr{S}$. Pak platí:
$$\left(\bigcup_n E_n\right) \cap D = \bigcup_n (E_n \cap D) \in d\mathscr{S},$$
a tedy $\bigcup_n E_n \in \mathcal{D}_D$.

Dokázali jsme, že $\mathcal{D}_D$ je d-systém. Z $(*)$ plyne, že $\mathscr{S} \subset \mathcal{D}_D$ $\forall D \in d\mathscr{S}$, protože $d\mathscr{S} \subset d\mathcal{D}_D = \mathcal{D}_D$. Dostáváme tedy, že $\forall D \in d\mathscr{S}$ je $d\mathscr{S} \subset \mathcal{D}_D$. To znamená, že $\forall E \in d\mathscr{S}$ platí $E \cap D \in d\mathscr{S}$ $\forall D \in d\mathscr{S}$, a tedy je $d\mathscr{S}$ uzavřený na průniky dvou množin. Z toho snadno dostaneme, že $d\mathscr{S}$ je uzavřený i na průniky konečného počtu množin. Dostáváme, že $d\mathscr{S}$ je skutečně π-systém. $\square$

Věta 16.42 (O rovnosti $d\mathscr{S} = \sigma\mathscr{S}$)**.** Je-li $\mathscr{S} \subset \mathcal{P}(X)$ π-systém, pak $d\mathscr{S} = \sigma\mathscr{S}$.

Důkaz. Protože $\mathscr{S} \subset \mathcal{P}(X)$ je π-systém, tak dle předchozího tvrzení je $d\mathscr{S}$ také π-systém. $d\mathscr{S}$ je také d-systém a dle předminulého tvrzení tím pádem také σ-algebra na X. Proto $\sigma\mathscr{S} \subset d\mathscr{S}$, protože $\sigma\mathscr{S}$ je nejmenší σ-algebra obsahující $\mathscr{S}$. Opačná inkluze platí triviálně z předchozí poznámky. □

Příklad. Nechť $(X, \mathcal{A}) = (\mathbb{R}^1, \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^1))$ a na tomto prostoru uvažujme Lebesgueovu míru λ^1. Nechť $E = (-1, 1)$ a $\mathcal{A}_E = \{A \cap E, A \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^1)\}$. Pak $(E, \mathcal{A}_E, \lambda^1)$ je prostor s mírou a $\lambda^1(E) = 2 < +\infty$. Nechť jsou míry μ a ν definovány následovně:

$$\mu(A) = \lambda^1(\{x \in A, x > 0\})\ \forall A \in \mathcal{A}_E,$$
$$\nu(A) = \lambda^1(\{x \in A, x < 0\})\ \forall A \in \mathcal{A}_E.$$

Nechť $\mathcal{D} = \{A \in \mathcal{A}_E, \mu(A) = \nu(A)\}$. Již víme, že se jedná o d-systém (na E). Zvolme $A = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ a $B = \left(-1, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(0, \frac{1}{2}\right)$. Pak $A, B \in \mathcal{A}_E$ a platí:

$$\mu(A) = \mu\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2},\ \nu(A) = \nu\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$
$$\mu(B) = \mu\left(-1, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(0, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2},\ \nu(B) = \frac{1}{2}.$$

Tedy $A, B \in \mathcal{D}$. Dále:

$$A \cup B = \left(-1, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \in \mathcal{A}_E.$$

Ovšem $\mu(A \cup B) = \frac{1}{2}$ a $\nu(A \cup B) = 1$, a tedy $A \cup B \notin \mathcal{D}$. Tím pádem $\mathcal{D}$ není σ-algebra.

Věta 16.43 (O jednoznačnosti míry)**.** Nechť $\mathscr{S} \subset \mathcal{P}(X)$ je π-systém a μ, ν jsou dvě míry na $\sigma\mathscr{S}$ splňující $\mu(S) = \nu(S)\ \forall S \in \mathscr{S}$. Jestliže existují množiny $X_n \subset \mathscr{S}$ tak, že $X_n \nearrow X$ a $\mu(X_n) < +\infty\ \forall n \in \mathbb{N}$, pak $\mu = \nu$ na $\sigma\mathscr{S}$.

Důkaz. Předpokládejme nejprve, že $\mu(X) < +\infty$. Již víme, že systém

$$\mathcal{D} = \{A \in \sigma\mathscr{S}, \mu(A) = \nu(A)\}$$

je d-systém. Dle předpokladu je $\mathscr{S} \subset \mathcal{D}$. Tedy $d\mathscr{S} \subset d\mathcal{D} = \mathcal{D}$. Z předchozí věty víme, že $d\mathscr{S} = \sigma\mathscr{S}$. Tedy $\sigma\mathscr{S} = d\mathscr{S} \subset \mathcal{D} \subset \sigma\mathscr{S}$, kde poslední inkluze plyne z definice $\mathcal{D}$. Dostáváme, že $d\mathscr{S} = \sigma\mathscr{S} = \mathcal{D}$. Tedy $\mu(A) = \nu(A)$ na $\sigma\mathscr{S}$. Nyní předpokládejme, že $\mu(X) = +\infty$. Pak definujeme:

$$\mathcal{D}_n = \{A \in \sigma\mathscr{S}, \mu(A \cap X_n) = \nu(A \cap X_n)\}\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Lze ověřit, že $\mathcal{D}_n$ je skutečně d-systém, který navíc obsahuje $\mathscr{S}$, neboť $S \cap X_n \in \mathscr{S}\ \forall n \in \mathbb{N}$, protože $\mathscr{S}$ je π-systém. Dále $\forall n \in \mathbb{N}$ platí:

$$\sigma\mathscr{S} = d\mathscr{S} \subset d\mathcal{D}_n = \mathcal{D}_n \subset \sigma\mathscr{S}.$$

Dostáváme, že $d\mathscr{S} = \sigma\mathscr{S} = \mathcal{D}_n$. Z vlastností míry pak $\forall A \in \sigma\mathscr{S}$ dostaneme:

$$\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A \cap X_n) = \lim_{n\to\infty} \nu(A \cap X_n) = \nu(A).$$

Tím je důkaz hotov. □

16.6 Součin měr a Fubiniova věta

Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$, respektive $(Y, \mathcal{B}, \nu)$, je prostor se σ-konečnou mírou μ, respektive ν.

Definice 16.44. Součin $A \times B \subset X \times Y$, kde $A \in \mathcal{A}$ a $B \in \mathcal{B}$ nazveme měřitelným obdélníkem. Symbolem $\mathcal{O}$ označíme systém všech měřitelných obdélníků. Dále definujeme součinovou σ-algebru $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ předpisem $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = \sigma\mathcal{O}$. Pro $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ a $x \in X$, $y \in Y$ definujeme řezy E_x, E^y množiny E předpisy:

$$\begin{aligned} E_x &= \{y \in Y, [x, y] \in E\}, \\ E^y &= \{x \in X, [x, y] \in E\}. \end{aligned}$$

Věta 16.45 (O součinové σ-algebře $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$)**.** Větu rozdělíme do šesti bodů:

- Je-li $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, pak:
  1. $\forall x \in X$ platí $E_x \in \mathcal{B}$,
  2. $\forall y \in Y$ platí $E^y \in \mathcal{A}$,
  3. funkce $x \mapsto \nu(E_x)$ je měřitelná na $(X, \mathcal{A})$,
  4. funkce $y \mapsto \mu(E^y)$ je měřitelná na $(Y, \mathcal{B})$.
- Je-li funkce $f\colon (X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) \to \mathbb{R}^*$ měřitelná, pak:
  1. $\forall x \in X$ je funkce $y \overset{f_x}{\longmapsto} f(x, y)$ měřitelná na $(Y, \mathcal{B})$,
  2. $\forall y \in Y$ je funkce $x \overset{f^y}{\longmapsto} f(x, y)$ měřitelná na $(X, \mathcal{A})$.

Důkaz. Dokážeme pouze první, třetí a páté tvrzení. Zbytek lze dokázat analogicky. Začneme prvním tvrzením:

1. $\forall x \in X$ je množina $\mathcal{E} = \{E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, E_x \in \mathcal{B}\}$ σ-algebra. Dokážeme:
   (a) $\varnothing \in \mathcal{E}$, protože $\varnothing_x = \varnothing \in \mathcal{B}$.
   (b) Jestliže $E \in \mathcal{E}$, pak $E_x \in \mathcal{B}$, a tedy platí:
   $$(E^c)_X = (X \times Y \setminus E)_x = Y \setminus E_x \in \mathcal{B},$$
   neboť $E_x \in \mathcal{B}$. Dostáváme, že $E^c \in \mathcal{E}$.
   (c) $E_n \in \mathcal{E}\ \forall n \in \mathbb{N}$ implikuje $(E_n)_x \in \mathcal{B}\ \forall n \in \mathbb{N}$. Platí tedy:
   $$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)_x = \bigcup_{i=1}^{\infty} (E_n)_x \in \mathcal{B}$$
   Máme $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{E}$.

Ověřili jsme, že $\mathcal{E}$ je σ-algebra. Dále $\mathcal{O} \subset \mathcal{E}$. Toto také ověříme. Jestliže $E \in \mathcal{O}$, tak $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Také $E = A \times B$, kde $A \in \mathcal{A}$ a $B \in \mathcal{B}$. Pro $x \in X$ je $E_x = (A \times B)_x$. To se rovná B, pokud $x \in A$, nebo $\varnothing$, pokud $x \notin A$. Dostáváme, že $E_x \in \mathcal{B}$. Jelikož tedy $\mathcal{O} \subset \mathcal{E}$, tak platí:

$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = \sigma\mathcal{O} \subset \sigma\mathcal{E} = \mathcal{E} \subset \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}.$$

Tedy $\mathcal{E} = \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ a důkaz první části je hotov.

2. Nechť $Y_0 \in \mathcal{B}$ a $\nu(Y_0) < +\infty$. Nechť

$$\mathcal{D} = \{E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, x \mapsto \nu(E_x \cap Y_0) \text{ je měřitelná na } (X, \mathcal{A})\}.$$

Dokážeme-li, že $\mathcal{O} \subset \mathcal{D}$, $\mathcal{D}$ je d-systém a $\mathcal{O}$ je π-systém, pak platí:

$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = \sigma\mathcal{O} = d\mathcal{O} \subset d\mathcal{D} = \mathcal{D} \subset \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}.$$

Pak $\mathcal{D} = \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, a tedy $\forall E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ je $x \mapsto \nu(E_x \cap Y_0)$ měřitelná na $(X, \mathcal{A})$. Dokážeme tedy postupně jednotlivé výroky:

(a) Dokážeme, že $\mathcal{O} \subset \mathcal{D}$. Je-li $E \subset \mathcal{O}$, pak $E = A \times B$, kde $A \in \mathcal{A}$ a $B \in \mathcal{B}$. E_x se rovná B, pokud $x \in A$ a $\varnothing$, pokud $x \notin A$. Dostáváme, že $E_x \cap Y_0$ je rovno $B \cap Y_0$, pokud $x \in A$ a $\varnothing$, pokud $x \notin A$. Tedy platí:

$$\nu(E_x \cap Y_0) = \nu(B \cap Y_0)\chi_A(x).$$

Funkce $x \mapsto \nu(E_x \cap Y_0)$ je na $(X, \mathcal{A})$ měřitelná, neboť $A \in \mathcal{A}$. Tedy $\mathcal{O} \subset \mathcal{D}$.

(b) Dokážeme, že $\mathcal{D}$ je d-systém.

i. $\varnothing \in \mathcal{D}$, neboť $\varnothing \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ a funkce $x \mapsto \nu(\varnothing_x \cap Y_0) = \nu(\varnothing) = 0 \ \forall x \in X$. Funkce je tedy měřitelná.

ii. $E \in \mathcal{D}$ implikuje, že $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ a funkce $x \mapsto \nu(E \cap Y_0)$ je měřitelná. Protože platí:

$$(E^c)_x \cap Y_0 = (X \times Y \setminus E)_x \cap Y_0 = (Y \setminus E_x) \cap Y_0 = Y_0 \mathrm{e}_x \cap Y_0,$$

neboť $Y_0 \subset Y$. Takže:

$$\nu((E^c)_x \cap Y_0) = \nu(Y_0) \setminus \nu(E_x \cap Y_0).$$

Funkce $x \mapsto \nu((E^c)_x \cap Y_0)$ je rozdílem dvou měřitelných funkcí $x \mapsto \nu(Y_0)$ a $x \mapsto \nu(E_x \cap Y_0)$, tedy je měřitelná.

iii. Nechť $E_n \in \mathcal{D} \ \forall n \in \mathbb{N}$ a $E_n \cap E_m = \varnothing$ pro $n \neq m$. Pak $E_n \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ a funkce $x \mapsto \nu((E_n)_x \cap Y_0)$ jsou měřitelné na $(X, \mathcal{A})$. Platí:

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)_x \cap Y_0 = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (E_n)_x\right) \cap Y_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} ((E_n)_x \cap Y_0).$$

Dostali jsme sjednocení disjunktních množin. Tedy platí:

$$\nu\left(\bigcup_n (E_n)_x \cap Y_0\right) = \sum_n \nu((E_n)_x \cap Y_0) = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \nu((E_n)_x \cap Y_0).$$

Funkce $x \mapsto \nu\left(\bigcup_n (E_n)_x\right) \cap Y_0$ je limitou pro $k \to \infty$ měřitelných funkcí $x \mapsto \sum_{n=1}^{k} \nu((E_n)_x \cap Y_0)$, a tedy je sama měřitelná. Dostáváme, že $\bigcup_n E_n \in \mathcal{D}$.

Dokázali jsme, že $\mathcal{D}$ je d-systém.

(c) Dokážeme, že $\mathcal{O}$ je π-systém. Je-li $E_i \in \mathcal{O}$, $i = 1, 2$, pak $E_i = A_i \times B_i$, kde $A_i \in \mathcal{A}$ a $B_i \in \mathcal{B}$. Tedy:

$$E_1 \cap E_2 = (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2) \in \mathcal{O},$$

protože $(A_1 \cap A_2) \in \mathcal{A}$ a $(B_1 \cap B_2) \in \mathcal{B}$. $\mathcal{O}$ je π-systém.

Dokázali jsme náš pomocný výrok. Protože ν je σ-konečná míra, tak existují množiny $Y_n \subset Y$ takové, že $\nu(Y_n) < +\infty$ a $\nu(Y_n) \nearrow \nu(Y)$. Pak platí:

$$\nu(E_x) = \lim_{n\to\infty} \nu(E_x \cap Y_n),$$

a tedy funkce $x \mapsto \nu(E_x)$ je měřitelná na $(X, \mathcal{A})$, neboť je limitní funkcí $x \mapsto \nu(E_x \cap Y_n)$, které jsou dle pomocného výroku výše měřitelné na $(X, \mathcal{A})$.

3. Nechť $a \in \mathbb{R}^*$ a $E = \{[x, y] \in X \times Y, f(x, y) < a\}$. Protože je f měřitelná funkce, tak $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Dále $\forall x \in X$ platí $\{y \in Y, f_x(y) < a\} = E_x \in \mathcal{B}$ dle prvního tvrzení. Tudíž $\forall x \in X$ je funkce f_x měřitelná na $(Y, \mathcal{B})$.

Důkaz je tímto hotov. □

Věta 16.46 (Existence a jednoznačnost součinové míry)**.** Existuje právě jedna míra $\mu \otimes \nu$ na $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, které říkáme součinová míra, splňující:

$$(\mu \otimes \nu)(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) = \mu(A)\nu(B)\ \forall A \in \mathcal{A}\ \forall B \in \mathcal{B}.$$

Pro tuto míru platí:

$$E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \Rightarrow (\mu \otimes \nu)(E) = \int_X \nu(E_x)\,\mathrm{d}\mu(x) = \int_Y \mu(E^y)\,\mathrm{d}\nu(y).$$

Důkaz. Nejprve dokážeme existenci této míry. $\forall E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ definujeme:

$$(\mu \otimes \nu)(E) = \int_X \nu(E_x)\,\mathrm{d}\mu(x).$$

Pak $\mu \otimes \nu$ je míra, neboť:

1. $(\mu \otimes \nu)(\varnothing) = \int_X \nu(\varnothing_x)\,\mathrm{d}\mu(x) = \int_X 0\,\mathrm{d}\mu(x) = 0.$

2. Je-li $E_n \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, $n \in \mathbb{N}$ a $E_m \cap E_n = \varnothing$ pro $n \neq m$, pak platí:

$$\begin{aligned}(\mu \otimes \nu)\left(\bigcup_n E_n\right) &= \int_X \nu\left(\left(\bigcup_n E_n\right)_x\right) \mathrm{d}\mu(x) = \int_X \nu\left(\bigcup_n (E_n)_x\right) \mathrm{d}\mu(x) \\ &= \int_X \left(\sum_n \nu((E_n)_x)\right) \mathrm{d}\mu(x) = \sum_n \int_X \nu((E_n)_x)\, \mathrm{d}\mu(x) \\ &= \sum_n (\mu \otimes \nu)(E_n),\end{aligned}$$

   neboť integrály jsou nezáporné funkce a míra je nezáporná, a tedy můžeme prohodit sumu a integrál dle Leviho věty.

Z definice $\mu \otimes \nu$ na $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ dostáváme, že $\forall A \in \mathcal{A}$ a $\forall B \in \mathcal{B}$ platí:

$$\begin{aligned}(\mu \otimes \nu)(A \times B) &= \int_X \nu((A \times B)_x)\, \mathrm{d}\mu(x) = \int_X \nu(B)\chi_A(x)\, \mathrm{d}\mu(x) \\ &= \nu(B) \int_A \mathrm{d}\mu(x) = \nu(B)\mu(A).\end{aligned}$$

Zbývá nám dokázat jednoznačnost. Předpokládejme, že τ je míra na $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ splňující $\tau(A \times B) = \mu(A)\nu(B)\ \forall A \in \mathcal{A}\ \forall B \in \mathcal{B}$. Tedy $\tau = \mu \otimes \nu$ na $\mathcal{O}$. $\mathcal{O}$ je π-systém. Protože μ a ν jsou σ-konečné míry, tak existují množiny $X_n \in \mathcal{A}$, $\mu(X_n) < +\infty\ \forall n \in \mathbb{N}$, $X_n \nearrow X$ a množiny $Y_n \in \mathcal{B}$, $\nu(Y_n) < +\infty\ \forall n \in \mathbb{N}$ a $Y_n \nearrow Y$. Pak pro množiny $X_n \times Y_n$ platí $X_n \times Y_n \in \mathcal{O}$, $(\mu \otimes \nu)(X_n \times Y_n) < +\infty\ \forall n \in \mathbb{N}$ a $X_n \times Y_n \nearrow X \times Y$. Z věty o jednoznačnosti míry pak plyne $\tau = \mu \otimes \nu$ na $\sigma\mathcal{O}$, tedy na $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. □

Poznámka. Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ a $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ jsou prostory s úplnými mírami. Poznemenejme, že pak míra $\mu \otimes \nu$ nemusí být úplná, jak ukážeme v následujícím příkladu.

Příklad. Předpokládejme, že existuje $A \in \mathcal{A}$, $A \neq \varnothing$ splňující $\mu(A) = 0$. Nechť existuje $B \subset Y$, $B \notin \mathcal{B}$. Pak $A \times B \subset A \times Y$, $(\mu \otimes \nu)(A \times Y) = \mu(A)\nu(Y) = 0$, protože $\mu(A) = 0$. Ovšem $A \times B \notin \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ dle prvního bodu věty o součinové algebře, protože $(A \times B)_x = B$, jestliže $x \in A$, ale $B \notin \mathcal{B}$. Tedy $A \times B$ není $(\mu \otimes \nu)$-měřitelná. Přitom ale je $A \times B$ nulová množina, jak jsme ukázali výše. Tedy $\mu \otimes \nu$ není úplná míra.

Věta 16.47 (Fubinova věta)**.** Pro každou funkci $f \in \mathscr{L}^*(\mu \otimes \nu)$ platí:

1. Funkce $x \mapsto \int_Y f(x, y)\, \mathrm{d}\nu(y)$ je měřitelná na X.

2. Funkce $y \mapsto \int_X f(x, y)\, \mathrm{d}\mu(x)$ je měřitelná na Y.

3. Platí:

$$\begin{aligned}\int_{X \times Y} f(x, y)\, \mathrm{d}(\mu \otimes \nu) &= \int_X \left(\int_Y f(x, y)\, \mathrm{d}\nu(y)\right) \mathrm{d}\mu(x) \\ &= \int_Y \left(\int_X f(x, y)\, \mathrm{d}\mu(x)\right) \mathrm{d}\nu(y).\end{aligned}$$

Důkaz. Důkaz rozdělíme na několik částí:

1. Je-li $f = \chi_E$, kde $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, pak třetí dokazovaná vlastnost plyne z předešlé věty, neboť:

$$\begin{aligned}\int_{X\times Y} \chi_E(x,y)\,\mathrm{d}(\mu\otimes\nu) = (\mu\otimes\nu)(E) &= \int_X \nu(E_x)\,\mathrm{d}\mu(x)\\ &= \int_X \left(\int_Y \chi_E(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y)\right)\,\mathrm{d}\mu(x),\end{aligned}$$

protože:

$$\nu(E_x) = \int_Y \chi_{E_x}(y)\,\mathrm{d}\nu(y) = \int_Y \chi_E(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y)\ \forall x \in X.$$

Podobně dostaneme:

$$\begin{aligned}\int_{X\times Y} \chi_E(x,y)\,\mathrm{d}(\mu\otimes\nu) = (\mu\otimes\nu)(E) &= \int_Y \nu(E^y)\,\mathrm{d}\nu(y)\\ &= \int_Y \left(\int_X \chi_E(x,y)\,\mathrm{d}\mu(x)\right)\,\mathrm{d}\nu(y).\end{aligned}$$

Tedy třetí tvrzení platí pro $f = \chi_E$, kde $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$.

2. Pro jednoduchou měřitelnou funkci $s = \sum_{i=1}^k \alpha_i \chi_{E_i}$ na $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$ platí:

$$\begin{aligned}\int_{X\times Y} s(x,y)\,\mathrm{d}(\mu\otimes\nu) &= \sum_{i=1}^k \alpha_i(\mu\otimes\nu)(E_i)\\ &= \sum_{i=1}^k \alpha_i \int_X \left(\int_Y \chi_{E_i}(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y)\right)\,\mathrm{d}\mu(x)\\ &= \int_X \left(\int_Y s(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y)\right)\,\mathrm{d}\mu(x).\end{aligned}$$

Z uvedeného také plyne, že funkce $x \mapsto \int_Y s(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y)$ je měřitelná na X. Pro jednoduchou funkci jsme dokázali první rovnost ve třetím tvrzení této věty. Druhá by se dokázala analogicky.

3. Buď $f \geq 0$ měřitelná na $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$. Víme, že existuje posloupnost jednoduchých měřitelných funkcí $\{s_n\}$ tak, že $s_n \nearrow f$. Pak podle Leviho věty platí:

$$\int_Y s_n(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y) \nearrow \int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y)\ \forall x \in X.$$

Jelikož jsou integrály na levé straně dle předchozího měřitelné funkce, jsou měřitelné funkce i integrály na pravé straně. Další aplikací Leviho věty dostaneme:

$$\int_X \left(\int_Y s_n(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y)\right)\,\mathrm{d}\mu(x) \nearrow \int_X \left(\int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y)\right)\,\mathrm{d}\mu(x).$$

Dle již dokázaného platí:

$$\int_X \left(\int_Y s_n(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y) \right) \mathrm{d}\mu(x) = \int_{X\times Y} s_n(x,y)\,\mathrm{d}(\mu\otimes\nu).$$

Tento integrál navíc dle Leviho věty konverguje k $\int_{X\times Y} f(x,y)\,\mathrm{d}(\mu\otimes\nu)$. Tedy platí:

$$\int_{X\times Y} f(x,y)\,\mathrm{d}(\mu\otimes\nu) = \int_X \left(\int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y) \right) \mathrm{d}\mu(x).$$

Druhou rovnost bychom dokázali analogicky.

4. Pro $f = f^+ - f^- \in \mathscr{L}^*(\mu\otimes\nu)$ dané tvrzení plyne z příslušných tvrzení pro f^+ a f^-, což jsou nezáporné měřitelné funkce, a z linearity integrálu.

Důkaz věty je tímto dokončen. $\square$

Příklad. Nechť $X = (0,\infty) = Y$ a $\mu = \nu$ je lebesgueova míra λ^1 na $(0,\infty)$. Dále

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & x > 0, y \geq x, \\ -1, & x > 0, y \in (0,\infty). \end{cases}$$

Věta 16.48 (Fubiniova věta pro zúplněnou součinovou míru)**.** Nechť $(X,\mathcal{A},\mu)$ a $(Y,\mathcal{B},\nu)$ jsou prostory s úplnými σ-konečnými mírami. Je-li $f \in \mathcal{L}^*((\mu\otimes\nu)_0)$, pak:

1. Funkce $x \overset{f_x}{\longmapsto} f(x,y)$ je měřitelná na X pro ν-skoro všechna $y \in Y$ a funkce $y \overset{f^y}{\longmapsto} f(x,y)$ je měřitelná na Y pro μ-skoro všechna $x \in X$.

2. Funkce $x \mapsto \int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y)$ je měřitelná na X a funkce $y \mapsto \int_X f(x,y)\,\mathrm{d}\mu(x)$ je měřitelná na Y.

3. Platí:

$$\int_{X\times Y} f\,\mathrm{d}((\mu\otimes\nu)_0) = \int_X \left(\int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y) \right) \mathrm{d}\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f(x,y)\,\mathrm{d}\mu(x) \right) \mathrm{d}\nu(y).$$

Důkaz. Důkaz vynecháme. K důkazu bychom využili Fubiniovu větu a následující dvě lemmata. $\square$

Lemma. Nechť $(Z,\mathcal{C},\varrho)$ je prostor s mírou a $(Z,\mathcal{C}_0,\varrho_0)$ jeho zúplnění. Je-li $f\colon (Z,\mathcal{C}_0) \to \mathbb{R}^*$ ϱ_0-měřitelná funkce, pak existuje ϱ-měřitelná funkce $g\colon (Z,\mathcal{C}) \to \mathbb{R}^*$ tak, že $f = g$ ϱ-skoro všude na Z.

Lemma. Nechť $(X,\mathcal{A},\mu)$ a $(Y,\mathcal{B},\nu)$ jsou prostory s úplnými σ-konečnými mírami. Nechť $h\colon (X\times Y, (\mathcal{A}\otimes\mathcal{B})_0) \to \mathbb{R}^*$ je $(\mu\otimes\nu)_0$-měřitelná funkce a $h(x,y) = 0$ $((\mu\otimes\nu)_0)$-skoro všude na $X\times Y$. Pak pro μ-skoro všechna $x \in X$ platí $h(x,y) = 0$ pro ν-skoro všechna $y \in Y$. Tedy pro μ-skoro všechna $x \in X$ je funkce $y \overset{h_x}{\longmapsto} h(x,y)$ rovna 0 pro ν-skoro všechna $y \in Y$. Speciálně, funkce h_x je měřitelná na $(Y,\mathcal{B},\nu)$ pro μ-skoro všechna $x \in X$. Obdobné tvrzení platí pro h^y.

Věta 16.49 (O míře $\lambda^p \otimes \lambda^q$)**.** Nechť $p, q \in \mathbb{N}$. Pak:

1. $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{p+q}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^p) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^q)$.
2. $\lambda^{p+q} = (\lambda^p \otimes \lambda^q)_0$.

Důkaz. Postupně dokážeme:

1. Nejprve si uvědomme, že každý otevřený $(p+q)$-kvádr (to je kartézský součin otevřených intervalů) je kartézským součinem otevřeného p-kvádru a otevřeného q-kvádru. Nechť $\mathcal{Q}^k$ značí systém všech otevřených k-kvádrů. Pak:
$$\begin{aligned}\mathcal{B}^{p+q} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^{p+q}) &= \sigma\{U \times V, U \in \mathcal{Q}^p, V \in \mathcal{Q}^q\} \subset \sigma\{A \times B, A \in \mathcal{B}^p, B \in \mathcal{B}^q\}\\ &= \mathcal{B}(\mathbb{R}^p) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^q) = \mathcal{B}^p \otimes \mathcal{B}^q.\end{aligned}$$
Pro druhou inkluzi stačí ukázat, že $A \times B \in \mathcal{B}^{p+q}$ kdykoliv $A \in \mathcal{B}^p$ a $B \in \mathcal{B}^q$. Označme:
$$\mathcal{A}_1 = \{A \in \mathcal{B}^p, A \times V \in \mathcal{B}^{p+q} \text{ kdykoliv } V \in \mathcal{Q}^q\}.$$
Zřejmě $\mathcal{Q}^p \subset \mathcal{A}_1$ a lze ukázat, že $\mathcal{A}_1$ je σ-algebra. Platí tedy $\mathcal{A}_1 = \mathcal{B}^p$. Dále označme:
$$\mathcal{A}_2 = \{B \in \mathcal{B}^q, A \times B \in \mathcal{B}^{p+q} \text{ kdykoliv } A \in \mathcal{B}^p\}$$
Platí $\mathcal{Q}^q \subset \mathcal{A}_2$, protože $\mathcal{A}_1 = \mathcal{B}^p$ a $\mathcal{A}_2$ je opět σ-algebra, a tedy $\mathcal{A}_2 = \mathcal{B}^q$. σ-algebra $\mathcal{B}^{p+q}$ tedy obsahuje všechny měřitelné obdélníky v $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$, a musí tedy obsahovat i $\mathcal{B}^p \otimes \mathcal{B}^q$.
2. Míry λ^{p+q} a $(\lambda^p \otimes \lambda^q)_0$ se shodují na otevřených kvádrech z $\mathcal{Q}^{p+q}$. Systém $\mathcal{Q}^{p+q}$ je uzavřen na konečné průniky, generuje $\mathcal{B}^{p+q}$ a existuje posloupnost otevřených kvádrů $Q_i \nearrow \mathbb{R}^{p+q}$ konečné míry, tedy λ^{p+q} a $(\lambda^p \otimes \lambda^q)_0$ se shodují na $\mathcal{B}^{p+q}$ podle věty o jednoznačnosti míry.

Tím je věta dokázána. □

Připomeňme, že lebesgueovu míru v $\mathbb{R}^n$ značíme λ^n a platí $\lambda^n = (\lambda^n_B)_0$, kde λ^n_B je borelovská míra v $\mathbb{R}^n$.

Věta 16.50 (Fubiniova věta pro λ^{p+q})**.** Nechť $f \in \mathcal{L}^*(\lambda^{p+q})$, $p, q \in \mathbb{N}$. Pak:
$$\int_{\mathbb{R}^{p+q}} f \,\mathrm{d}\lambda^{p+q} = \int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^q} f(x,y) \,\mathrm{d}\lambda^q(y) \right) \mathrm{d}\lambda^p(x) = \int_{\mathbb{R}^q} \left(\int_{\mathbb{R}^p} f(x,y) \,\mathrm{d}\lambda^p(x) \right) \mathrm{d}\lambda^q(y).$$

Důkaz. Věta je důsledkem předchozí věty a Fubiniovy věty pro zúplněnou součinovou míru. □

Definice 16.51. Je-li $p, q \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}^p$ a $y \in \mathbb{R}^q$, pak definujeme projekce předpisem $\pi_1(x,y) = x$ a $\pi_2(x,y) = y$.

Důsledek. Nechť $p, q \in \mathbb{N}$, $A \in \mathcal{B}_0^{p+q} = (\mathcal{B}(\mathbb{R}^{p+q}))_0$. Jestliže $f \in \mathcal{L}^*(\lambda^{p+q})$ a množiny $\pi_1 A$ a $\pi_2 A$ jsou měřitelné, pak platí:
$$\int_A f \,\mathrm{d}\lambda^{p+q} = \int_{\pi_1 A} \left(\int_{A_x} f(x,y) \,\mathrm{d}\lambda^q(y) \right) \mathrm{d}\lambda^p(x) = \int_{\pi_2 A} \left(\int_{A^y} f(x,y) \,\mathrm{d}\lambda^p(x) \right) \mathrm{d}\lambda^q(y).$$

Poznámka. Je-li $p, q \in \mathbb{N}$, pak místo $\mathrm{d}\lambda^p(x)$ obvykle píšeme $\mathrm{d}x$, místo $\mathrm{d}\lambda^q(y)$ pak $\mathrm{d}y$ a místo $\mathrm{d}\lambda^{p+q}(x, y)$ píšeme $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

Lemma 16.52. Lebesgueova míra λ^n je translačně invariantní, to znamená, že $\lambda^n(B + z) = \lambda^n(B)\ \forall B \in \mathcal{B}_0^n\ \forall z \in \mathbb{R}^n$.

Důkaz. Dané tvrzení plyne z věty o jednoznačnosti míry, neboť míry λ^n a μ, kde μ je dána předpisem $\mu(B) = \lambda^n(B + z)\ \forall B \in \mathcal{B}_0^n$ a libovolné pevné $z \in \mathbb{R}^n$, se shodují na systému $\mathscr{S}$, který tvoří $\varnothing$ a otevřené intervaly v $\mathbb{R}^n$ (je to π-systém). □

Věta 16.53 (O obrazu míry)**.** Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou, $(Y, \mathcal{B})$ je měřitelný prostor a $\varphi\colon (X, \mathcal{A}) \to (Y, \mathcal{B})$ měřitelné zobrazení. Pak množinová funkce daná předpisem $(\varphi(\mu))(B) = \mu(\varphi^{-1}(B))\ \forall B \in \mathcal{B}$ je míra na $(Y, \mathcal{B})$. Tomuto říkáme obraz míry μ při zobrazení φ. Pro každou měřitelnou funkci f na Y platí:

$$\int_Y f\,\mathrm{d}\varphi(\mu) = \int_X (f \circ \varphi)\,\mathrm{d}\mu,$$

pokud má alespoň jedna strana smysl.

Důkaz. Snadno se dá ověřit, že množinová funkce $\varphi(\mu)$ daná předpisem výše splňuje všechny vlastnosti míry. Rovnost integrálů se také dokáže snadno. Nejprve pro případ $f = \chi_B$, kde $B \in \mathcal{B}$. V tomto případě máme:

$$\int_X (\chi_B \circ \varphi)\,\mathrm{d}\mu = \int_X \chi_{\varphi^{-1}(B)}\,\mathrm{d}\mu = \mu(\varphi^{-1}(B)) = (\varphi(\mu))(B) = \int_X \chi_B\,\mathrm{d}\varphi(\mu).$$

Dále bychom postupovali důkaz této rovnosti pro jednoduché a nezáporné funkce. Nakonec bychom dokázali pro obecnou funkci pomocí $f = f^+ - f^-$. □

Věta 16.54. Nechť $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je invertibilní lineární zobrazení.

1. Je-li $\nu(A) = \lambda^n(L(A))\ \forall A \in \mathcal{B}^n = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, pak ν je míra a platí $\nu = |\det L|\lambda^n$.
2. Je-li $\mu(A) = |\det L|\lambda_B^n(A)\ \forall A \in \mathcal{B}^n$, pak $L(\mu) = \lambda_B^n$ a pro $f \in \mathscr{L}^*(\lambda_B^n)$ platí:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f\,\mathrm{d}\lambda^n = \int_{\mathbb{R}^n} (f \circ L)|\det L|\,\mathrm{d}\lambda^n.$$

Důkaz. Každé lineární zobrazení z prostoru $\mathbb{R}^n$ do prostoru $\mathbb{R}^n$ je spojité. Protože L je invertibilní, existuje L^{-1}, které je opět lineární a spojité. Odtud dostáváme, že zobrazení $L^{-1}\colon (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n) \to (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$ je měřitelné. Dále platí:

$$(L^{-1}(\lambda^n))(A) = \lambda^n(L(A)) = \nu(A)\ \forall A \in \mathcal{B}^n.$$

Tedy $\nu = L^{-1}(\lambda^n)$, což je míra na $\mathcal{B}^n$ dle předchozí věty. Nyní musíme ověřit, že $\nu = |\det L|\lambda^n$. Z lineární algebry víme, že zobrazení L lze vyjádřit jako složení konečně mnoha elementárních lineárních zobrazení jednoho z následujících typů:

1. $L_1(x_1, \ldots, x_n) = (\alpha x_1, x_2, \ldots, x_n)\ \forall x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, kde $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$.

2. $L_2(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots, x_n)\ \forall x \in \mathbb{R}^n$.
3. $L_3(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_1 + x_2, x_2, \ldots, x_n)\ \forall x \in \mathbb{R}^n$.

Protože determinant složeného lineárního zobrazení L je roven součinu determinantů jednotlivých složek, což jsou elementární lineární zobrazení, tak stačí dané tvrzení dokázat pro zobrazení uvedené výše.

1. Nechť $\nu(A) = \lambda^n(L_1(A))$, $A \in \mathcal{B}^n$. ν se shoduje s mírou $|\det L_1|\lambda^n$ na otevřených intervalech v $\mathbb{R}^n$. Dle věty o jednoznačnosti míry dostáváme $\lambda^n(L_1(A)) = |\det L_1|\lambda^n(A)$. λ^n totiž intervalům v $\mathbb{R}^n$ přiřazuje jejich objem. Determinant v absolutní hodnotě v $\mathbb{R}^n$ je objem n-rozměrného rovnoběžnostěnu. Zobrazení zachovává všechny složky vektoru až na první, kterou prodlužuje, nebo zkracuje. $\lambda^n(L_1(A))$ se tedy jistě shoduje s $|\det L_1|\lambda^n(A)$ na otevřených intervalech.

2. Nechť $\nu(A) = \lambda^n(L_2(A))$, $A \in \mathcal{B}^n$. Jako v minulém bodě snadno nahlédneme, že míra ν se s mírou $|\det L_2|\lambda^n$ shoduje na otevřených intervalech. Dle věty o jednoznačnosti míry se tyto míry rovnají.

3. Nechť $\nu(A) = \lambda^n(L_3(A))$, $A \in \mathcal{B}^n$. Definujme projekci π_{n-1} prostoru $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^{n-1}$ předpisem $\pi_{n-1}(x_1, \ldots, x_n) = (x_2, \ldots, x_n)\ \forall x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Pak podle Fubiniovy věty máme:

$$\lambda^n(L_3(A)) = \int_{\pi_{n-1}(L_3(A))} \lambda^1((L_3(A))_{(x_2,\ldots,x_n)})\,\mathrm{d}\lambda^{n-1}(x_2, \ldots, x_n).$$

   Pro řez $(L_3(A))_{(x_2,\ldots,x_n)}$ platí $(L_3(A))_{(x_2,\ldots,x_n)} = A_{(x_2,\ldots,x_n)} + x_2$, a protože míra λ^1 je translačně invariantní, tak:

$$\lambda^1((L_3(A))_{(x_2,\ldots,x_n)}) = \lambda^1(A_{(x_2,\ldots,x_n)}).$$

   Dále $\pi_{n-1}(L_3(A)) = \pi_{n-1}(A)$. Tedy $\forall A \in \mathcal{B}^n$ platí:

$$\lambda^n(L_3(A)) = \int_{\pi_{n-1}(A)} \lambda^1(A_{(x_2,\ldots,x_n)})\,\mathrm{d}\lambda^{n-1}(x_2, \ldots, x_n) = \lambda^n(A) = \underbrace{|\det L_3|}_{1}\lambda^n(A).$$

Tím jsme první část věty dokázali. Nyní přejdeme ke druhému. Nechť $\mu = |\det L|\lambda^n_B$. Pak $\forall A \in \mathcal{B}^n$ platí:

$$(L(\mu))(A) = \mu(L^{-1}(A)) = |\det L|\lambda^n_B(L^{-1}(A)) = |\det L||\det L^{-1}|\lambda^n_B(A) = \lambda^n_B.$$

Tedy $L(\mu) = \lambda^n_B$. Podle předchozí věty platí:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f\,\mathrm{d}(L(\mu)) = \int_{\mathbb{R}^n} (f \circ L)\,\mathrm{d}\mu.$$

Nakonec:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f\,\mathrm{d}\lambda^n_B = \int_{\mathbb{R}^n} (f \circ L)|\det L|\,\mathrm{d}\lambda^n_B.$$

Tím jsme větu dokázali. □

Lemma. Nechť $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ zobrazení splňující Lipschitzovu podmínku, to znamená, že existuje $C \in [0, +\infty)$ tak, že $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ platí $\|T(x) - T(y)\| \leq C\|x - y\|$. Je-li $A \subset \mathbb{R}^n$ lebesgueovsky měřitelná množina, pak také $T(A)$ je lebesgueovsky měřitelná množina.

Použitím tohoto lemmatu a metody důkazu předchozí věty lze dokázat následující:

Věta 16.55. Je-li $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ invertibilní lineární zobrazení, pak platí:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \,\mathrm{d}\lambda^n = \int_{\mathbb{R}^n} (f \circ L) |\det L| \,\mathrm{d}\lambda^n,$$

má-li alespoň jedna strana smysl.

Je-li $G \subset \mathbb{R}^n$ otevřená množina a $T\colon G \to \mathbb{R}^n$ je zobrazení třídy $\mathcal{C}^1$ na G, pak zobrazení $T(x) - T(x_0)$ lze lokálně aproximovat lineárním zobrazením, jehož matice je $T'(x_0) = \left(\frac{\partial T_i}{\partial x_j}(x_0)\right)_{i,j=1}^n$ a jejíž determinant je jakobián $J_T(x_0)$.

Věta 16.56 (O substituci)**.** Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina a $\varphi\colon G \to \mathbb{R}^n$ je difeomorfismus. Jestliže $f\colon \varphi(G) \to \mathbb{R}$ je lebesgueovsky měřitelná funkce, pak:

$$\int_G f(\varphi(x))|J_\varphi(x)| \,\mathrm{d}x = \int_{\varphi(G)} f(y) \,\mathrm{d}y,$$

má-li alespoň jedna strana smysl.

Důsledek. Je-li navíc $M \subset \varphi(G)$ lebesgueovsky měřitelná množina, pak:

$$\int_{\varphi^{-1}(M)} f(\varphi(x))|J_\varphi(x)| \,\mathrm{d}x = \int_M f(y) \,\mathrm{d}y.$$

Lemma. Platí $\lambda^n(\mathbb{R}^{n-1}) = 0$.

Důkaz. Množina $\mathbb{R}^{n-1}$ je λ^n-měřitelná, neboť je uzavřená v $\mathbb{R}^n$. Dále také platí $\mathbb{R}^{n-1} \subset \bigcup_{k=1}^\infty I_{k,\varepsilon}$, kde $\varepsilon > 0$ a $\forall k \in \mathbb{N}$ definujeme $I_{k,\varepsilon}$ následovně:

$$I_{k,\varepsilon} = (-k, k)^{n-1} \times \left(\frac{-\varepsilon}{(2k)^{n-1}} \frac{1}{2^k}, \frac{\varepsilon}{(2k)^{n-1}} \frac{1}{2^k} \right).$$

Pak platí:

$$\lambda^n(\mathbb{R}^{n-1}) \leq \sum_{k=1}^\infty \lambda^n(I_{k,\varepsilon}) = \sum_{k=1}^\infty (2k)^{n-1} \frac{2\varepsilon}{(2k)^{n-1}} \frac{1}{2^k} = \sum_{k=1}^\infty \frac{\varepsilon}{2^{k-1}} = 2\varepsilon.$$

Protože $\varepsilon > 0$ je libovolné, tak $\lambda^n(\mathbb{R}^{n-1}) = 0$. □

Polární souřadnice v $\mathbb{R}^2$: Zobrazení $g\colon [0, +\infty) \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ dané předpisem $g(r, \alpha) = [x, y]$, kde $x = r\cos(\alpha)$ a $y = r\sin(\alpha)$ zobrazuje množinu $g\colon [0, +\infty) \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ na $\mathbb{R}^2$. Toto zobrazení je difeomorfismus na množině $G = (0, +\infty) \times (0, 2\pi)$ a platí $J_g(r, \alpha) = r$, $g(G) = \mathbb{R}^2 \setminus N$, kde $N = \{[x, 0] \in \mathbb{R}^2, x \geq 0\}$, což je uzavřená polopřímka a $\lambda^2(N) = 0$.

Sférické souřadnice v $\mathbb{R}^3$: Zobrazení $g\colon [0, +\infty) \times [0, 2\pi] \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}^3$ dané předpisem $g(r, \alpha, \theta) = [r\cos(\alpha)\cos(\theta), r\sin(\alpha)\cos(\theta), r\sin(\theta)]$ zobrazuje množinu $[0, +\infty) \times [0, 2\pi] \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ na $\mathbb{R}^3$. Toto zobrazení je difeomorfismus na množině $G = (0, +\infty) \times (0, 2\pi) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ a platí $J_g(r, \alpha, \theta) = r^2 \cos(\theta)$, $g(G) = \mathbb{R}^3 \setminus N$, kde $N = \{[x, 0, z] \in \mathbb{R}^3, x \in [0, +\infty)\}$, což je uzavřená polorovina, a tedy $\lambda^3(N) = 0$.

16.7 Radon-Nikodymova věta, Lebesgueův rozklad míry

Lemma (O míře s hustotou f)**.** Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou a f je nezáporná měřitelná funkce na X. Definujeme-li $\forall A \in \mathcal{A}$:

$$\nu(A) = \int_A f \,\mathrm{d}\mu,$$

pak ν je míra na $\mathcal{A}$ a pro měřitelnou funkci $g\colon (X, \mathcal{A}) \to [0, \infty]$ platí:

$$\int_X g \,\mathrm{d}\nu = \int_X gf \,\mathrm{d}\mu.$$

Platí-li první rovnost, pak říkáme, že míra ν má hustotu f vzhledem k míře μ.

Důkaz. Nejprve dokážeme, že ν je míra. Jistě $\nu \geq 0$. Dále:

$$\nu(\varnothing) = \int_\varnothing f \,\mathrm{d}\mu = \int_X f\chi_\varnothing \,\mathrm{d}\mu = 0.$$

Je-li $A = \bigcup_{i=1}^\infty A_j$, kde $A_j \in \mathcal{A}$ a $A_j \cap A_i = \varnothing$ pro $i \neq j$, pak:

$$\begin{aligned}\nu(A) &= \int_A f \,\mathrm{d}\mu = \int_X f\chi_A \,\mathrm{d}\mu = \int_X f \left(\sum_{j=1}^\infty \chi_{A_j}\right) \mathrm{d}\mu = \sum_{j=1}^\infty \int_X f\chi_{A_j} \,\mathrm{d}\mu \\ &= \sum_{j=1}^\infty \int_{A_j} f \,\mathrm{d}\mu = \sum_{j=1}^\infty \nu(A_j).\end{aligned}$$

ν je skutečně míra na $\mathcal{A}$. Nyní přejdeme k dokazování druhé části věty. Nechť nejprve $g = \chi_E$, kde $E \in \mathcal{A}$. Pak:

$$\int_X g \,\mathrm{d}\nu = \int_X \chi_E \,\mathrm{d}\nu = \nu(E) = \int_E f \,\mathrm{d}\mu = \int_X \chi_E f \,\mathrm{d}\mu = \int_X gf \,\mathrm{d}\mu.$$

Z linearity integrálu a předchozího dostáváme, že tato rovnost platí i v případě, kdy je g jednodcuhá, nezáporná, měřitelná funkce na X. Je-li $g\colon (X, \mathcal{A}) \to [0, \infty]$ měřitelná funkce, pak existují nezáporné, jednoduché, měřitelné funkce g_n splňující $g_n \nearrow g$. Z předchozího a Leviho věty bychom snadno dostali dokazovanou rovnost. $\square$

Poznámka. Je-li g měřitelná funkce na X, pak z rovnosti $g = g^+ - g^-$ a z předchozího lemmatu plyne, že rovnost $\int_X g \,\mathrm{d}\nu = \int_X gf \,\mathrm{d}\mu$ platí, jakmila má jedna strana smysl.

Definice 16.57. Nechť μ, ν jsou míry na $(X, \mathcal{A})$. Řekneme, že míra ν je absolutně spojitá vzhledem k míře μ, jestliže $\forall A \in \mathcal{A}$ platí, že pokud $\mu(A) = 0$, pak i $\nu(A) = 0$. Tento fakt zapisujeme $\nu \ll \mu$.

Poznámka. Pro míru ν z předchozího lemmatu platí $\nu \ll \mu$. Toto si dokážeme. Nechť $A \in \mathcal{A}$ a $\mu(A) = 0$. Je-li $f = \chi_E$, kde $E \in \mathcal{A}$, pak:

$$\nu(A) = \int_A f \,\mathrm{d}\mu = \int_A \chi_E \,\mathrm{d}\mu = \int_X \chi_A\chi_E \,\mathrm{d}\mu = \int_X \chi_{A\cap E} \,\mathrm{d}\mu = \mu(A \cap E) \leq \mu(A) = 0.$$

Je-li f jednoduchá, nezáporná, měřitelná funkce na X, pak z linarity integrálu a předchozího dostáváme $\nu(A) = 0$. Je-li f nezáporná, měřitelná funkce na X, pak existuje posloupnost $\{f_n\}$ jednoduchých, nezáporných, měřitelných funkcí, pro které je $f_n \nearrow f$. Z Leviho věty dostaneme:

$$\nu_n(A) = \int_A f_n \,\mathrm{d}\mu \nearrow \int_A f \,\mathrm{d}\mu = \nu(A),$$

a tedy $\nu(A) = 0$.

Věta 16.58 (Charakterizace faktu $\nu \ll \mu$ pro konečné míry)**.** Nechť ν, μ jsou konečné míry na $(X, \mathcal{A})$. Pak $\nu \ll \mu$ práve tehdy, když platí:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall A \in \mathcal{A}\colon \mu(A) < \delta \Rightarrow \nu(A) < \varepsilon.$$

Důkaz. Postupně dokážeme jednotlivé implikace:

1. Levá implikace: Nechť $A \in \mathcal{A}$ a $\mu(A) = 0$. Volbou $\varepsilon = \frac{1}{k}$, $k \in \mathbb{N}$ dostaneme:

$$\forall k \in \mathbb{N}\ \exists \delta_k > 0\ \forall A \in \mathcal{A}\colon \mu(A) < \delta_k \Rightarrow \nu(A) < \frac{1}{k}.$$

   Protože $\mu(A) = 0 < \delta_k\ \forall k \in \mathbb{N}$, tak $\nu(A) < \frac{1}{k}\ \forall k \in \mathbb{N}$, a tedy $\nu(A) = 0$.

2. Pravá implikace: Nechť $\nu \ll \mu$ a předpokládejme, že výrok ve větě neplatí. Tedy:

$$\exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists A \in \mathcal{A}\colon \mu(A) < \delta \wedge \nu(A) \geq \varepsilon.$$

   Volme $\delta = \frac{1}{2^n}$, $n \in \mathbb{N}$. Pak platí, že existuje $A_n \in \mathcal{A}$ tak, že $\forall n \in \mathbb{N}$ platí $\mu(A_n) < \frac{1}{2^n}$ a $\nu(A_n) \geq \varepsilon$. Položme $B_k = \bigcup_{n=k+1}^{\infty} A_n$, $k \in \mathbb{N}$. Pak $B_1 \supset B_2 \supset \ldots$, $\mu(B_1) \leq \mu(X) < +\infty$ a $\nu(B_1) \leq \nu(X) < +\infty$, protože jsou μ a ν konečné míry. Platí tedy:

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) = \lim_{k\to\infty} \mu(B_k),$$
$$\nu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) = \lim_{k\to\infty} \nu(B_k).$$

   Dále také:

$$\mu(B_k) = \mu\left(\bigcup_{n=k+1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=k+1}^{\infty} \mu(A_n) \leq \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{k+1}} \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^k}.$$

   Z toho dostáváme, že $\lim_{k\to\infty} \mu(B_k) = 0$. Nyní $\forall k \in \mathbb{N}$ máme:

$$\nu(B_k) = \nu\left(\bigcup_{n=k+1}^{\infty} A_n\right) \geq \nu(A_{k+1}) \geq \varepsilon.$$

   Dostáváme, že $\lim_{l\to\infty} \nu(A_n) \geq \varepsilon$. Nakonec pro $B = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_k$ máme $\mu(B) = 0$ a $\nu(B) \geq \varepsilon$, což je spor s tím, že $\nu \ll \mu$.

Věta je tímto dokázána. □

Lemma. Jestliže μ, ν jsou konečné míry na $(X, \mathcal{A})$ takové, že $\nu(A) \leq \mu(A)\ \forall A \in \mathcal{A}$, pak existuje měřitelná funkce f na X splňující $0 \leq f \leq 1$ μ-skoro všude a $\nu(A) = \int_A f \, \mathrm{d}\mu\ \forall A \in \mathcal{A}$.

Důkaz. Nechť $\forall g \in L^2(\mu)$ je:

$$Jg = \int_X g^2 \, \mathrm{d}\mu - 2 \int_X g \, \mathrm{d}\nu.$$

Funkcionál je skutečně dobře definován. Nechť $c = \inf_{g \in L^2(\mu)} Jg$. Neboť $\nu \leq \mu$, tak platí:

$$Jg \geq \int_X g^2 \, \mathrm{d}\mu - 2 \int_X |g| \, \mathrm{d}\mu = \int_X (|g| - 1)^2 \, \mathrm{d}\mu - \mu(X) \geq -\mu(X) > -\infty.$$

Tedy $c \geq -\mu(X) > -\infty$. Naším cílem je dokázat, že existuje $f \in L^2(\mu)$ tak, že $J(f) = c$.

1. Pro $A \in \mathcal{A}$ pevné a $t \in \mathbb{R}$ položme $g(t) = J(f + t\chi_A)$. Funkce g má minimum v bodě $t = 0$, a tedy $g'(0) = 0$, pokud existuje $g'(0)$. Protože:

$$\begin{aligned} g'(0) &= \lim_{t \to 0} \frac{J(f + t\chi_A) - J(f)}{t} = \lim_{t \to 0} \left(\frac{1}{t} \left(\int_X (f + t\chi_A)^2 \, \mathrm{d}\mu - 2 \int_X (f + t\chi_A) \, \mathrm{d}\nu \right) \right. \\ &\quad \left. - \left(\int_X f^2 \, \mathrm{d}\mu - 2 \int_X f \, \mathrm{d}\nu \right) \right) = \lim_{t \to 0} \left(\int_X (2f\chi_A + t\chi_A) \, \mathrm{d}\mu - 2 \int_X \chi_A \, \mathrm{d}\nu \right) \\ &= 2 \left(\int_A f \, \mathrm{d}\mu - \nu(A) \right), \end{aligned}$$

   tak $0 = g'(0) = 2\left(\int_A f \, \mathrm{d}\mu - \nu(A)\right)$. Dostáváme, že $\nu(A) = \int_A f \, \mathrm{d}\mu\ \forall A \in \mathcal{A}$.

2. Dále:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_X (f - 1)^+ \, \mathrm{d}\mu = \int_{\{f > 1\}} (f - 1) \, \mathrm{d}\mu = \int_{\{f > 1\}} f \, \mathrm{d}\mu - \mu(\{f > 1\}) \\ &= \nu(\{f > 1\}) - \mu(\{f > 1\}) \leq 0, \end{aligned}$$

   protože $\nu \leq \mu$. Z toho dostáváme, že $(f - 1)^+ = 0$ μ-skoro všude, a tedy $f \leq 1$ μ-skoro všude. Analogicky dostaneme:

$$0 \leq \int_X f^- \, \mathrm{d}\mu = \int_{\{f < 0\}} (-f) \, \mathrm{d}\mu = -\nu(\{f < 0\}) \leq 0,$$

   a tedy $f^- = 0$ μ-skoro všude. Z toho plyne, že $f \geq 0$ μ skoro všude. Nakonec dostáváme, že $0 \leq f \leq 1$.

3. Zbývá dokázat, že existuje $f \in L^2(\mu)$ tak, že $J(f) = c$. $\forall g, h \in L^2(\mu)$ platí:

$$Jg + Jh = \int_X (g^2 + h^2) \, \mathrm{d}\mu - 2 \int_X (g + h) \, \mathrm{d}\nu.$$

Dále:

$$-2J\left(\frac{g+h}{2}\right) = -2\int_X \left(\frac{g+h}{2}\right)^2 \mathrm{d}\mu + 4\int_X \frac{g+h}{2}\,\mathrm{d}\nu$$
$$= -\int_X \frac{(g+h)^2}{2}\,\mathrm{d}\mu + 2\int_X (g+h)\,\mathrm{d}\nu.$$

Tyto dvě rovnice sečteme a dostaneme:

$$Jg + Jh - 2J\left(\frac{g+h}{2}\right) = \int_X (g^2+h^2)\,\mathrm{d}\mu - \int_X \frac{(g+h)^2}{2}\,\mathrm{d}\mu = \int_X \frac{(g-h)^2}{2}\,\mathrm{d}\mu$$
$$= \frac{1}{2}\|g-h\|^2_{L^2(\mu)}.$$

Z toho, že $c = \inf_{g\in L^2(\mu)} Jg$ dostáváme, že existuje $\{f_n\} \subset L^2(\mu)$ tak, že $Jf_n \to c$ pro $n \to \infty$. Zvolme $g = f_m$ a $h = f_n$. Pak:

$$\|f_m - f_n\|^2_{L^2(\mu)} = 2\left(Jf_m + Jf_n - 2J\left(\frac{f_m+f_n}{2}\right)\right) \leq 2(Jf_m + Jf_n - 2c),$$

což jde k 0 pro $m, n \to \infty$. $\{f_n\}$ je tedy cauchyovská posloupnost v prostoru $L^2(\mu)$. Protože je prostor $L^2(\mu)$ úplný, tak existuje $f \in L^2(\mu)$ tak, že $f_n \to f \in L^2(\mu)$. Z toho snadno dostaneme, že $\|f_n\|_{L^2(\mu)} \to \|f\|_{L^2(\mu)}$, protože $\|\cdot\|_{L^2(\mu)}$ je spojitá funkce na $L^2(\mu)$. Dále:

$$\left|\int_X f_n\,\mathrm{d}\nu - \int_X f\,\mathrm{d}\nu\right| \leq \int_X |f_n - f|\,\mathrm{d}\nu \leq (\mu(x))^{\frac{1}{2}}\|f_n - f\|_{L^2(\mu)} \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

kde poslední nerovnost plyne z Hölderovy nerovnosti. Nyní $Jf_n \to Jf$, což dává $Jf_n \to c$.

Důkaz je tímto hotov. □

Věta 16.59 (Radon-Nikodymova věta)**.** Jsou-li μ, ν σ-konečné míry na $(X, \mathcal{A})$ splňující $\nu \ll \mu$, pak existuje nezáporná měřitelná funkce f na X tak, že $\forall A \in \mathcal{A}$ platí:

$$\nu(A) = \int_A f\,\mathrm{d}\mu.$$

Funkce f se nazývá hustota a zapisuje se někdy ve tvaru $f = \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}$.

Důkaz. Na začátek předpokládejme, že míry jsou konečné. Dle předchozího lemmatu, aplikovaného na míry ν, $\mu + \nu$, splňující $\nu \leq \mu + \nu$, existuje měřitelná funkce h na X, $0 \leq h \leq 1$ μ-skoro všude, tak, že platí:

$$\nu(A) = \int_A h\,\mathrm{d}(\mu+\nu) = \int_A h\,\mathrm{d}\mu + \int_A h\,\mathrm{d}\nu \ \forall A \in \mathcal{A}.$$

Dále:

$$\nu(\{h=1\}) = \int_{\{h=1\}} h\,\mathrm{d}(\nu+\mu) = \mu(\{h=1\}) + \nu(\{h=1\}),$$

a tedy $\mu(\{h = 1\}) = 0$. Protože $\nu \ll \mu$, tak i $\nu(\{h = 1\}) = 0$. Proto $h < 1$ $(\mu + \nu)$-skoro všude. Můžeme psát:

$$\int_X \chi_A \,\mathrm{d}\nu = \int_X \chi_A h \,\mathrm{d}\mu + \int_X \chi_A h \,\mathrm{d}\nu,$$

protože $\int_X \chi_A \,\mathrm{d}\nu = \nu(A)$. Tedy:

$$\int_X \chi_A (1-h) \,\mathrm{d}\nu = \int_X \chi_A h \,\mathrm{d}\mu.$$

Odtud a z linearity integrálu pak plyne, že platí:

$$\int_X g(1-h) \,\mathrm{d}\nu = \int_X gh \,\mathrm{d}\mu,$$

a to pro všechny jednodcuhé, nezáporné, μ-měřitelné funkce g na X. Pomocí Leviho věty lze ukázat, že tato rovnost platí pro všechny nezáporné μ-měřitelné funkce g na X. Volbou $g = \frac{1}{1-h}\chi_A$, $A \in \mathcal{A}$, pak dostaneme:

$$\int_X \chi_A \,\mathrm{d}\nu = \int_X \frac{h}{1-h} \chi_A \,\mathrm{d}\mu.$$

Z toho pak snadno dostáváme, že $\nu(a) = \int_A f \,\mathrm{d}\mu \ \forall A \in \mathcal{A}$, kde $f = \frac{h}{1-h}$ je hledaná hustota $\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}$. Jsou-li μ, ν σ-konečné míry, pak nalezneme posloupnosti $\{E_i\}, \{F_j\} \subset \mathcal{A}$ po dvou disjunktních množin tak, aby $\mu(E_i) < +\infty \ \forall i \in \mathbb{N}$, $\nu(F_j) < +\infty \ \forall j \in \mathbb{N}$, $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i = X = \bigcup_{j=1}^{\infty} F_j$. Položíme-li $D_{ij} = E_i \cap F_j$, $i, j \in \mathbb{N}$, pak $X = \bigcup_{i,j=1}^{\infty} D_{ij}$ a pro konečné míry $\nu|_{D_{ij}}, \mu|_{D_{ij}}$, což označuje restrikce daných měr na D_{ij}, splňující $\nu|_{D_{ij}} \ll \mu|_{D_{ij}}$, určíme dle předešlé části příslušnou hustotu $f_{ij} = \frac{\mathrm{d}\nu|_{D_{ij}}}{\mathrm{d}\mu|_{D_{ij}}}$. Hledaná hustota $f = \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}$ je pak definována tak, že je-li $x \in X$, pak existuje právě jedno $i \in \mathbb{N}$ a právě jedno $j \in \mathbb{N}$ tak, že $x \in D_{ij}$, a položíme $f(x) = f_{ij}(x)$. □

Definice 16.60. Řekneme, že míry ν, μ na měřitelném prostoru $(X, \mathcal{A})$ jsou navzájem singulární, píšeme $\mu \perp \nu$, jestliže existuje $S \in \mathcal{A}$ tak, že $\mu(S) = 0$ a $\nu(X \setminus S) = 0$.

Poznámka. Jestliže $\nu \perp \mu$ a S je množina splňující $\mu(S) = 0$ a $\nu(X \setminus S) = 0$, pak $\forall A \in \mathcal{A}$ platí $\nu(A) = \nu(A \cap S)$ a $\mu(A) = \mu(A \cap (X \setminus S))$. První rovnost můžeme snadno ověřit:

$$\nu(A) = \nu((A \cap S) \cup (A \setminus S)) = \nu(A \cap S) + \nu(A \setminus S) = \nu(A \cap S),$$

kde $\nu(A \setminus S) = 0$, protože $A \setminus S \subset X \setminus S$. Druhá rovnost se dokáže analogicky.

Příklad. Nechť $(X, \mathcal{A}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}_0^1)$, $\mu = \lambda^1$, $\nu = \delta_0$. Pak $\mu \perp \delta_0$, neboť pro $S = \{0\}$ máme $\mu(S) = \lambda^1(S) = 0$ a $\nu(X \setminus S) = \nu((-\infty, 0) \cup (0, \infty)) = 0$.

Věta 16.61 (Lebesgueův rozklad míry)**.** Nechť μ je míra na $(X, \mathcal{A})$ a ν je σ-konečná míra na $(X, \mathcal{A})$. Pak existuje rozklad $\nu = \nu_a + \nu_s$ na σ-konečné míry ν_a, ν_s takový, že $\nu_a \ll \mu$, $\nu_s \perp \mu$, přičemž míry ν_a a ν_s jsou určeny jednoznačně.

Důkaz. Předpokládejme nejprve, že ν je konečná míra.

1. Budeme se nejdříve zabývat existencí rozkladu. Nechť $\mathscr{N}_\mu = \{B \in \mathcal{A}, \mu(B) = 0\}$. Pak $c = \sup\{\nu(B), B \in \mathscr{N}_\mu\} \leq \nu(X) < +\infty$. Nechť $\{B_j\} \subset \mathscr{N}_\mu$ je taková posloupnost, že $\lim_{j\to\infty} \nu(B_j) = c$. Označíme-li $N = \bigcup_{j=1}^\infty B_j$, pak $\mu(N) \leq \sum_{j=1}^\infty \mu(B_j) = 0$, a tedy $\mu(N) = 0$, z čehož dostáváme, že $N \in \mathscr{N}_\mu$. Dále $\forall i \in \mathbb{N}$ platí:
$$c \geq \nu(N) = \nu\left(\bigcup_{j=1}^\infty B_j\right) \geq \nu(B_i) \xrightarrow{i\to\infty} c,$$
a tedy $\nu(N) = c$. Definujme $\nu_s(A) = \nu(A \cap N)$ $\forall A \in \mathcal{A}$. Pak:
$$\nu_s(X \setminus N) = \nu((X \setminus N) \cap N) = \nu(\varnothing) = 0.$$
Dále víme, že $\mu(N) = 0$. Dostáváme, že $\nu_s \perp \mu$. Definujeme $\nu_a = \nu - \nu_s$. Pak $\forall A \in \mathcal{A}$ platí:
$$\nu_a(A) = \nu(A) - \nu_s(A) = \nu(A) - \nu(A \cap N) = \nu(A \setminus N) = \nu(A \cap N^c).$$
Dokážeme, že $\nu_a \ll \mu$. Nechť $\mu(A) = 0$. Pak $N \cup (A \cap N^c) \in \mathscr{N}_\mu$. Kdyby $\nu(A \cap N^c) > 0$, pak by muselo platit:
$$\nu(N \cup (A \cap N^c)) = \nu(N) + \nu(A \cap N^c) > c,$$
což je spor s definicí čísla c. Dostáváme, že $\nu(A \cap N^c) = 0$, a tedy $\nu(A) = 0$. Pak skutečně $\nu_a \ll \mu$.

2. Nyní dokážeme jednoznačnost rozkladu. Nechť $\nu = \nu_a + \nu_s$ a $\nu = \tilde{\nu}_a + \tilde{\nu}_s$, kde $\nu_s \perp \mu$, $\tilde{\nu}_s \perp \mu$, $\nu_a \ll \mu$ a $\tilde{\nu}_a \ll \mu$. Z tohoto plyne, že existuje $N \in \mathcal{A}$ tak, že $\mu(N) = 0$ a $\nu_s(N^c) = 0$. Dále existuje $\tilde{N} \in \mathcal{A}$ tak, že $\mu(\tilde{N}) = 0$ a $\tilde{\nu}_s(\tilde{N}^c) = 0$. Nechť $N_0 = N \cup \tilde{N}$. Pak $\mu(N_0) \leq \mu(N) + \mu(\tilde{N}) = 0$, a tedy $\mu(N_0) = 0$. Tím pádem $\nu_a(N_0) = 0$ a $\tilde{\nu}_a(N_0) = 0$. Dále platí:
$$\nu_s(N_0^c) = \nu_s(X \setminus N_0) \leq \nu_s(N^c) = 0,$$
protože $X \setminus N_0 \subset X \setminus N = N^c$. Analogicky:
$$\tilde{\nu}_s(N_0^c) = \tilde{\nu}_s(X \setminus N_0) \leq \tilde{\nu}_s(\tilde{N}^c) = 0,$$
protože $X \setminus N_0 \subset X \setminus \tilde{N} = \tilde{N}^c$. Tedy $\forall A \in \mathcal{A}$ platí:
$$\nu_s(A) = \nu_s(A \cap N_0) = \nu(A \cap N_0) - \nu_a(A \cap N_0) = \nu(A \cap N_0).$$
Analogicky:
$$\tilde{\nu}_s(A) = \tilde{\nu}_s(A \cap N_0) - \tilde{\nu}_a(A \cap N_0) = \nu(A \cap N_0).$$
Odtud dostáváme, že $\nu_s = \tilde{\nu}_s$, což také dává, že $\nu_a = \tilde{\nu}_a$.

Předpokládejme nyní, že ν je σ-konečná míra. Pak existuje posloupnost $\{D_k\} \subset \mathcal{A}$ po dvou disjunktních množin tak, že $X = \bigcup_{k=1}^\infty D_k$. Označme $\mathcal{A}_k = \{A \cap D_k, A \in \mathcal{A}\}$ a aplikujeme postup z první části na měřitelné prostory $(D_k, \mathcal{A}_k)$ a restrikce měr μ, ν na $\mathcal{A}_k$, $k \in \mathbb{N}$. Nechť $N_1, N_2, \ldots$ jsou μ-nulové množiny zkonstruované jako množina N v předešlé části a nechť $N = \bigcup_{k=1}^\infty N_k$. Pak míry ν_s, ν_a definované předpisem $\nu_s(A) = \nu(A \cap N)$ a $\nu_a(A) = \nu(A \cap N^c)$ $\forall A \in \mathcal{A}$ tvoří Lebesgueův rozklad míry. Dokážeme:

1. Jistě:
$$\nu(N) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} N_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(N_k) = 0.$$
Dále:
$$\nu_s(X \setminus N) = \nu((X \setminus N) \cap N) = \nu(\emptyset) = 0,$$
a tedy $\nu_s \perp \mu$.

2. Je-li $\mu(A) = 0$ a označíme-li $A_k = A \cap D_k$, $k \in \mathbb{N}$, pak $\mu(A_k) = 0$, a tedy $(\nu|_{D_k})_a(A_k) = 0$ $\forall k \in \mathbb{N}$, protože $(\nu|_{D_k})_a \ll \mu|_{D_k}$. Dále platí:
$$\nu_a(A) = \nu(A \cap N^c) = \sum_{k=1}^{\infty} \nu(A \cap D_k \cap N^c).$$
Jelikož:
$$\begin{aligned} D_k \cap N^c = D_k \cap (X \setminus N) = D_k \cap \left(X \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} N_j\right) = D_k \cap \bigcap_{j=1}^{\infty} (X \setminus N_j) \\ \subset D_k \cap (X \setminus N_k) = D_k \setminus N_k, \end{aligned}$$
tak:
$$\begin{aligned} \nu_a(A) &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \nu(A \cap D_k \cap (D_k \setminus N_k)) = \sum_{k=1}^{\infty} \nu(A_k \cap (D_k \setminus N_k)) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (\nu|_{D_k})(A_k \cap (D_k \setminus N_k)) = \sum_{k=1}^{\infty} (\nu|_{D_k})_a(A_k) = 0. \end{aligned}$$
Tedy $\nu_a \ll \mu$.

Jednoznačnost rozkladu $\nu = \nu_s + \nu_a$ plyne z faktu, že $\forall A \in \mathcal{A}$ platí:
$$\begin{aligned} \nu(A) &= \sum_{k=1}^{\infty} \nu|_{D_k}(A \cap D_k), \\ \nu_s(A) &= \sum_{k=1}^{\infty} (\nu|_{D_k})_s(A \cap D_k), \\ \nu_a(A) &= \sum_{k=1}^{\infty} (\nu|_{D_k})_a(A \cap D_k \setminus N_k), \end{aligned}$$
a lokální rozklady $\nu|_{D_k} = (\nu|_{D_k})_s + (\nu|_{D_k})_a$, $k \in \mathbb{N}$, jsou určeny jednoznačně. □

Definice 16.62. Nechť μ je konečná borelovská míra na $\mathbb{R}$. Pak $F_\mu(x) = \mu((-\infty, x])$, $x \in \mathbb{R}$, nazýváme distribuční funkcí míry μ.

Lemma (O distribuční funkci)**.** Distribuční funkce F_μ splňuje:

1. F_μ je neklesající.
2. $F_\mu(-\infty) = \lim_{x\to-\infty} F_\mu(x) = 0$, $F_\mu(\infty) = \lim_{x\to\infty} F_\mu(x) < \infty$.
3. F_μ je zprava spojitá.

Důkaz. Dokážeme jednotlivé body:

1. Je-li $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$, pak:
$$F_\mu(x) = \mu((-\infty, x]) \le \mu((-\infty, y]) = F_\mu(y).$$
2. Obě limity existují, neboť je funkce dle předchozího bodu neklesající. $\forall n \in \mathbb{N}$ platí:
$$\begin{aligned} F_\mu(-\infty) &= \lim_{n\to\infty} F_\mu(-n) = \lim_{n\to\infty} \mu((-\infty, -n]) = \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} (-\infty, -n]\right) \\ &= \mu(\varnothing) = 0. \end{aligned}$$
Analogicky:
$$F_\mu(\infty) = \lim_{n\to\infty} F_\mu(n) = \lim_{n\to\infty} \mu((-\infty, n]) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (-\infty, n]\right) = \mu(\mathbb{R}) < \infty,$$
protože je míra konečná.
3. Je-li $x \in \mathbb{R}$, pak $(-\infty, x] = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(-\infty, x + \frac{1}{n}\right]$, a tedy:
$$\begin{aligned} F_\mu(x^+) &= \lim_{n\to\infty} F_\mu\left(x + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \mu\left(\left(-\infty, x + \frac{1}{n}\right]\right) = \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(-\infty, x + \frac{1}{n}\right]\right) \\ &= \mu((-\infty, x]) = F_\mu(x). \end{aligned}$$

Tímto jsme lemma dokázali. □

Věta 16.63 (O Lebesgue-Stieltjesově míře)**.** Nechť $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je funkce splňující:

1. F je neklesající.
2. $F(-\infty) = \lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$, $F(\infty) = \lim_{x\to\infty} F(x) < \infty$.
3. F je zprava spojitá.

Pak existuje právě jedna konečná borelovská míra na $\mathbb{R}$, které říkáme Lebesgue-Stieltjesova míra příslušná k funkci F, taková, že $F_\mu = F$.

Důkaz. Důkaz bude v teorii míry a integrálu 2. □

Poznámka. Pro Lebesgue-Stieltjesovu míru příslušnou k funkci F platí:

1. $\mu((a, b]) = F(b) - F(a)$.

2. $\mu((a,b)) = F(b^-) - F(a)$.
3. $\mu([a,b)) = F(b^-) - F(a^-)$.
4. $\mu([a,b]) = F(b) - F(a^-)$.

kde $-\infty < a < b < \infty$. Toto je důsledkem následujících rovností:

1. $(a,b] = (-\infty,b] \setminus (-\infty,a]$.
2. $(a,b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(a, b-\frac{1}{n}\right]$.
3. $[a,b) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(a-\frac{1}{n}, b\right)$.
4. $[a,b] = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(a-\frac{1}{n}, b\right]$.

Definice 16.64. Je-li F distribuční funkce konečné borelovské míry μ a $A \subset \mathbb{R}$ je borelovská množina, pak definujeme:

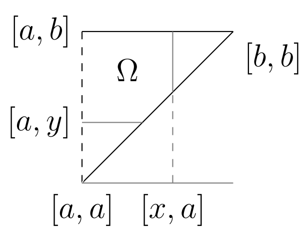
$$\int_A f \, \mathrm{d}F = \int_A f \, \mathrm{d}\mu,$$

má-li pravá strana smysl. Tomuto říkáme Lebesgue-Stieltjesův integrál.

Věta 16.65 (Per partes pro Lebesgue-Stieltjesův integrál)**.** Jestliže F, G jsou distribuční funkce a $-\infty < a < b < \infty$, pak:

$$F(b)G(b) - F(a)G(a) = \int_{(a,b]} F(x) \, \mathrm{d}G(x) + \int_{(a,b]} G(x^-) \, \mathrm{d}F(x).$$

Důkaz. Nechť $\Omega = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2, a < x \leq y \leq b\}$. Použitím Fubiniovy věty k výpočtu $(\mu_F \otimes \mu_G)(\Omega)$ obdržíme (k tomu nám pomůže obrázek):



$$\begin{aligned}(\mu_F \otimes \mu_G)(\Omega) &= \int_{(a,b]} \left(\int_{[x,b]} \mathrm{d}G(y) \right) \mathrm{d}F(x) = \int_{(a,b]} (G(b) - G(x^-)) \, \mathrm{d}F(x) \\ &= G(b)(F(b) - F(a)) - \int_{(a,b]} G(x^-) \, \mathrm{d}F(x).\end{aligned}$$

Dále:

$$\begin{aligned}(\mu_F \otimes \mu_G)(\Omega) &= \int_{(a,b]} \left(\int_{(a,y]} \mathrm{d}F(x) \right) \mathrm{d}G(y) = \int_{(a,b]} (F(y) - F(a)) \, \mathrm{d}G(y) \\ &= \int_{(a,b]} F(y) \, \mathrm{d}G(y) - F(a)(G(b) - G(a)).\end{aligned}$$

Odečtením těchto dvou rovnic dostaneme:

$$0 = G(b)F(b) - G(b)F(a) - \int_{(a,b]} G(x^-)\,\mathrm{d}F(x) - \int_{(a,b]} F(y)\,\mathrm{d}G(y) + F(a)G(b) - F(a)G(a),$$

z čehož ihned dostáváme dokazovanou rovnost. □

Lemma (O $\mu \ll \lambda^1$)**.** Nechť μ je konečná borelovská míra na $\mathbb{R}$. Jestliže $F_\mu \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, pak $\mu \ll \lambda^1$ a $\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\lambda^1} = F'_\mu$. Tedy $\mu(A) = \int_A F'_\mu(A)\,\mathrm{d}\lambda^1\ \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Důkaz. Nechť $\mathscr{S}$ je systém, který se skládá z $\varnothing$ a všech intervalů $(a,b]$, kde $-\infty < a < b < \infty$. Pak $\mathscr{S}$ je π-systém. Nechť ν je míra daná předpisem $\nu(A) = \int_A F'_\mu\,\mathrm{d}\lambda^1\ \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Pak $\mu = \nu$ na $\mathscr{S}$, neboť $\mu(\varnothing) = 0 = \nu(\varnothing)$ a

$$\mu((a,b]) = F_\mu(b) - F_\mu(a) = \int_a^b F'_\mu(x)\,\mathrm{d}x = \int_{(a,b]} F'_\mu\,\mathrm{d}\lambda^1 = \nu((a,b]).$$

Dále platí $X_n = (-n,n] \in \mathscr{S}$ a $X_n \nearrow X = \mathbb{R}$. $\forall n \in \mathbb{N}$ je $\mu(X_n) < \infty$. Podle věty o jednoznačnosti míry platí $\mu = \nu$ na $\sigma\mathscr{S} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Tedy $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ platí:

$$\mu(A) = \nu(A) = \int_A F'_\mu\,\mathrm{d}\lambda^1,$$

což znamená, že $\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\lambda^1} = F'_\mu$. □

Poznámka. Předpoklad $F_\mu \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ z předchozího lemmatu je příliš silný. Lze ho nahradit předpokladem, že F_μ je absolutně spojitá funkce. Tento pojem budeme definovat později.

16.8 Konvergence podle míry

Definice 16.66. Nechť $(X,\mathcal{A},\mu)$ je prostor s mírou a f, f_n, $n \in \mathbb{N}$, jsou měřitelné funkce na X. Řekneme, že funkce f_n konvergují k funkci f podle míry μ, značíme $f_n \xrightarrow{\mu} f$, jestliže platí:

$$\forall \varepsilon > 0\colon\ \lim_{n\to\infty} \mu(\{x \in X, |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) = 0.$$

Poznámka. Obecně neplatí tato implikace:

$$f_n \xrightarrow{\mu} f \Rightarrow f_n \to f\ \mu\text{–skoro všude}.$$

Neplatí ani:

$$f_n \to f\ \mu - \text{skoro všude} \Rightarrow f_n \xrightarrow{\mu} f.$$

Tato tvrzení budou dokázána v následujících příkladech.

Příklad. Nechť $(X,\mathcal{A},\mu) = (\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda^1)$ a $f_n = \chi_{(n,\infty)}\ \forall n \in \mathbb{N}$. Pak $f_n(x) \to 0\ \forall x \in \mathbb{R}$, a tedy $f_n \to 0$ λ^1-skoro všude, ale neplatí $f_n \xrightarrow{\lambda^1} 0$, neboť $\forall \varepsilon \in (0,1)$ máme $\lambda^1(\{x \in X, |f_n(x) - 0| \geq \varepsilon\}) = \lambda^1((n,\infty)) = +\infty\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Příklad. Nechť $(X,\mathcal{A},\mu)=(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda^1)$. Definujme $f_1=\chi_{[0,1)}$, $f_2=\chi_{\left[0,\frac{1}{2}\right)}$, $f_3=\chi_{\left[\frac{1}{2},1\right)}$, $f_4=\chi_{\left[0,\frac{1}{4}\right)}$, $f_5=\chi_{\left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)}$, $f_6=\chi_{\left[\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)}$, $f_7=\chi_{\left[\frac{3}{4},1\right)}$ a obecně $f_n=\chi_{\left[\frac{j}{2^k},\frac{j+1}{2^k}\right)}$, kde $n=2^k+j$, $j\in\{0,1,\dots,2^k-1\}$. Pak $f_n\xrightarrow{\lambda^1}0$, ale neplatí $f_n\to 0$ λ^1-skoro všude, protože $\forall x\in[0,1)$ posloupnost $f_n(x)$ obsahuje nekonečně mnoho nul a jedniček.

Lemma (Čebyševova nerovnost)**.** Je-li $1\le p<+\infty$, $f\in L^p(\mu)$ a $c\in(0,\infty)$, pak:

$$\mu(\{x\in X,|f(x)|\ge c\})\le\left(\frac{\|f\|_{L^p}}{2}\right)^p.$$

Důkaz. Zřejmě:

$$\mu(\underbrace{\{x\in X,|f(x)|\ge c\}}_{M})=\int_M 1\,\mathrm{d}\mu\le\int_M\left(\frac{|f|}{c}\right)^p\mathrm{d}\mu\le\int_X\left(\frac{|f|}{c}\right)^p\mathrm{d}\mu=\left(\frac{\|f\|_{L^p}}{c}\right)^p.$$

□

Věta 16.67 (Vztah mezi konvergencí v $L^p(\mu)$ a konvergencí podle míry)**.** Je-li $1\le p\le+\infty$ a $f,f_n\in L^p(\mu)$ $\forall n\in\mathbb{N}$, pak:

$$f_n\to f \text{ v } L^p(\mu)\Rightarrow f_n\xrightarrow{\mu}f.$$

Důkaz. Je-li $1\le p<+\infty$, pak tvrzení plyne z předchozího lemmatu. Je-li $p=+\infty$, $f_n\to f$ v $L^p(\mu)$ a $\varepsilon>0$, tak existuje $n_0\in\mathbb{N}$ tak, že $\forall n\ge n_0$ platí $\|f_n-f\|_{L^\infty}<\varepsilon$. Tím pádem $\mu(\{x\in X,|f_n(x)-f(x)|\ge\varepsilon\})=0$ $\forall n\ge n_0$. Z toho dostáváme, že $f_n\xrightarrow{\mu}f$. □

Věta 16.68 (První vztah mezi konvergencí podle míry a konvergencí skoro všude)**.** Jestliže $(X,\mathcal{A},\mu)$ je prostor s mírou a $f_n\xrightarrow{\mu}f$, pak existuje vybraná podposloupnost $\{f_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ tak, že $f_{n_k}\to f$ μ-skoro všude.

Důkaz. $\forall\varepsilon>0$ platí:

$$\lim_{n\to\infty}\mu(\{x\in X,|f_n(x)-f(x)|\ge\varepsilon\})=0.$$

Tím pádem můžeme konstruovat posloupnost čísel $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tak, že platí:

$$\mu(\{x\in X,|f_{n_1}(x)-f(x)|\ge 1\})\le\frac{1}{2}$$

a zbývající složky posloupnosti $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ určit induktivně tak, aby $n_k>n_{k-1}$ a:

$$\mu\left(\left\{x\in X,|f_{n_k}(x)-f(x)|\ge\frac{1}{k}\right\}\right)\le\frac{1}{2^k},$$

kde $k\in\{2,3,\dots\}$. Definujme množiny A_k, $k\in\mathbb{N}$, předpisem

$$A_k=\left\{x\in X,|f_{n_k}(x)-f(x)|\ge\frac{1}{k}\right\}$$

a $A = \bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{k \geq j} A_k$. Jestliže $x \notin A$, pak existuje $j \in \mathbb{N}$ tak, že $x \notin \bigcup_{k \geq j} A_k$. Pak $\forall k = j, j+1, \dots$ je $|f_{n_k}(x) - f(x)| < \frac{1}{k}$, a tedy $\{f_{n_k}\}_k$ konverguje k f $\forall x \notin A$. Dále $\forall j \in \mathbb{N}$ platí:

$$\mu(A) \leq \mu\left(\bigcup_{k \geq j} A_k\right) \leq \sum_{k=j}^{\infty} \mu(A_k) \leq \sum_{k=j}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^j} \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^{j-1}}.$$

Tím pádem $\mu(A) = 0$. □

Důsledek. Nechť $1 \leq p \leq +\infty$ a $f_n \to f$ v $L^p(\mu)$, pak existuje $\{f_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ tak, že $f_{n_k} \to f$ μ-skoro všude.

Důkaz. $f_n \to f$ v $L^p(\mu)$ implikuje, že $f_n \xrightarrow{\mu} f$. Z toho dle předešlé věty máme dokazované tvrzení. □

Věta 16.69 (Druhý vztah mezi konvergencí podle míry a konvergencí μ-skoro všude)**.** Jestliže $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s konečnou mírou a $f_n \to f$ μ-skoro všude, pak $f_n \xrightarrow{\mu} f$.

Důkaz. Chceme dokázat, že $\forall \varepsilon > 0$ platí:

$$\lim_{n \to \infty} \mu(\{x \in X, |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) = 0.$$

Nechť $\varepsilon > 0$. Definujeme množiny A_n, B_n, $n \in \mathbb{N}$, předpisem

$$A_n = \{x \in X, |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}, \ B_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} A_n.$$

Pak $B_1 \supset B_2 \supset \dots$ a platí:

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n \subset \{x \in X, f_n(x) \not\to f(x)\}.$$

Tedy $\mu\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) = 0$, což dává $\lim_{n \to \infty} \mu(B_n) = 0$. Neboť $A_n \subset B_n$, tak $\lim_{n \to \infty} \mu(A_n) = 0$, čímž jsme větu dokázali. □

Věta 16.70 (Jegorova věta)**.** Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou, $\varepsilon > 0$ a f, f_n, $n \in \mathbb{N}$, jsou měřitelné funkce splňující $f_n \to f$ μ-skoro všude. Pak existuje $B \in \mathcal{A}$, $\mu(B^c) < \varepsilon$ tak, že $f_n \rightrightarrows f$ na B.

Důkaz. Nechť $\varepsilon > 0$. Položme $g_n = \sup_{j \geq n} |f_j - f|$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Pak $g_n \to 0$ μ-skoro všude, a tedy dle předchozí věty $g_n \xrightarrow{\mu} 0$. Proto $\forall k \in \mathbb{N}$ existuje $n_k \in \mathbb{N}$ tak, že platí:

$$\mu\left(\left\{x \in X, g_{n_k}(x) \geq \frac{1}{k}\right\}\right) \leq \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Definujme množiny $B_1, B_2, \dots$ předpisem

$$B_k = \left\{x \in X, g_{n_k}(x) < \frac{1}{k}\right\}$$

a nechť $B = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} B_k$. Pak:

$$\mu(B^c) = \mu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k^c\right) \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(B_k^c) < \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon.$$

Nechť $\delta > 0$ a $k \in \mathbb{N}$ takové číslo, že $\delta > \frac{1}{k}$. Pak

$$\forall x \in X \ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_k \colon |f_n(x) - f(x)| \leq g_{n_k}(x) < \frac{1}{k} < \delta,$$

a tedy $f_n \rightrightarrows f$ na B. $\square$

17 Obyčejné diferenciální rovnice

V této kapitole se budeme více věnovat diferenciálním rovnicím. Mějme $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ otevřenou množinu, $I \subset \mathbb{R}$ interval, $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ spojitou funkci a budeme se zabývat rovnicí $x' = f(x,t)$, kterou budeme značit (DR), s počáteční podmínkou $x(t_0) = x_0$.

17.1 Základní definice a existence řešení

Definice 17.1. Funkce $x\colon I \to \mathbb{R}^n$ je řešením (DR), jestliže:

1. $\forall t \in I$ platí $(x(t),t) \in \Omega$.
2. $\forall t \in I$ existuje vlastní derivace $x'(t)$.
3. $\forall t \in I$ platí $x'(t) = f(x(t),t)$.

Typicky má (DR) nekonečně mnoho řešení. Přidáme počáteční podmínku: $t_0 \in I$, $(x_0,t_0) \in \Omega$, $x(t_0) = x_0$.

Připomeňme následující věty, které zobecníme:

Věta 17.2 (O převodu na integrální tvar)**.** Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ je otevřená, $I \subset \mathbb{R}$ je otevřený interval, $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ je spojitá, $(x_0,t_0) \in \Omega$, $t_0 \in I$ a $x\colon I \to \mathbb{R}^n$ je spojitá tak, že graf x leží v Ω. Pak x je řešení (DR) na I s počáteční podmínkou $x(t_0) = x_0$ právě tehdy, když $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x(s),s)\,\mathrm{d}s\ \forall t \in I$.

Důkaz. Začneme pravou implikací. $x \in \mathcal{C}^1(I)$, a tedy můžeme psát:

$$\int_{t_0}^{t} x'(s)\,\mathrm{d}s = x(t) - x_0.$$

Dále:

$$\int_{t_0}^{t} x'(s)\,\mathrm{d}s = \int_{t_0}^{t} f(x(s),s)\,\mathrm{d}s = x(t) - x_0.$$

Snadnou úpravou dostáváme požadovanou rovnost. Nyní se zaměřme na opačnou implikaci. Jelikož je pravá strana rovnosti $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x(s),s)\,\mathrm{d}s$ diferencovatelná, musí být diferencovatelná i levá strana. Ihned dostáváme $x'(t) = f(x(t),t)$. Je velmi snadné ověřit, že $x(t_0) = x_0$. □

Věta 17.3 (Arzela-Ascoli)**.** Nechť $A \subset \mathcal{C}(K,\mathbb{R}^n)$, kde K je kompaktní. Pak $\overline{A}$ je kompaktní právě tehdy, když jsou funkce z A stejně omezené a stejně spojité.

Důkaz. Důkaz byl proveden v jednodušší verzi v desáté kapitole. Bylo by možné jej analogicky zobecnit s využitím diagonální metody. □

Nyní zformulujeme a dokážeme Peanovu větu o existenci:

Věta 17.4 (Peanova věta o existenci)**.** Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ je otevřená, $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ je spojitá a $(x_0,t_0) \in \Omega$. Potom existuje $\delta > 0$ a funkce $x\colon (t_0-\delta, t_0+\delta) \to \mathbb{R}^n$, která je řešením (DR) a splňuje počáteční podmínku $x(t_0) = x_0$.

Důkaz. *Krok 1.* Rozmysleme si, že řešení stačí hledat na intervalu $[t_0, t_0+\varepsilon]$. Mějme totiž vyřešenou tuto úlohu. Pak lze uvažovat úlohu $x' = -f(x,-t)$, $x(-t_0) = x_0$. Je-li $\phi(t)$ řešením takové úlohy na intervalu $[-t_0, -t_0+\varepsilon_2]$ a $\psi(t)$ řešením úlohy $x' = f(x,t)$ na $[t_0, t_0+\varepsilon_1]$ s počáteční podmínkou $\psi(t_0) = x_0$, pak:

$$x(t) = \begin{cases} \phi(-t), & t \in [t_0 - \varepsilon_2, t_0], \\ \psi(t), & t \in [t_0, t_0 + \varepsilon_1], \end{cases}$$

je řešením $x' = f(x,t)$ splňující $x(t_0) = x_0$.
Krok 2. Nechť $a, b > 0$ tak, že:

$$K = [t_0, t_0 + a] \times \overline{B}(x_0, b) \subset \Omega.$$

K je kompaktní, a tedy zobrazení f je na K stejnoměrně spojité a omezené. Tedy existuje $L > 0$ tak, že $\|f(y,t)\| \le L$, kde $t \in [t_0, t_0+a]$ a $y \in \overline{B}(x_0, b)$. Položme $c = \min\left\{a, \frac{b}{L}\right\}$, $I = [t_0, t_0 + c]$ a:

$$\mathscr{F} = \{y\colon I \to \mathbb{R}^n \colon (y(t_0) = x_0) \wedge (\|y(t) - y(s)\| \le L|t-s|), t, s \in I\}.$$

Krok 3. Všimneme si, že $\mathscr{F}$ se skládá z L-lipschitzovských zobrazení, a tedy se jedná o stejně spojitou množinu. Dále $\forall y \in \mathscr{F}$ a $\forall t \in I$ platí:

$$\|y(t) - x_0\| = \|y(t) - y(t_0)\| \le L|t - t_0| \le Lc \le b.$$

Tedy $\mathscr{F}$ je omezená v $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n)$. Snadno bychom ukázali, že je tato množina i uzavřená. Tím pádem je kompaktní.
Krok 4. Definujme $F\colon \mathscr{F} \to [0, \infty)$ jako:

$$F(y) = \max_{t \in I} \left\| y(t) - x_0 - \int_{t_0}^{t} f(y(s), s) \, \mathrm{d}s \right\| = \left\| y(t) - x_0 - \int_{t_0}^{t} f(y(s), s) \, \mathrm{d}s \right\|_\infty$$

Toto zobrazení je dobře definované, neboť $s \mapsto f(y(s), s)$ je spojité na I, a tedy je spojité i zobrazení $t \mapsto y(t) - x_0 - \int_{t_0}^t f(y(s), s) \, \mathrm{d}s$. Dále norma je spojité zobrazení, a tedy i $t \mapsto \left\| y(t) - x_0 - \int_{t_0}^t f(y(s), s) \, \mathrm{d}s \right\|$ je spojité.
Krok 5. Ukážeme, že F je spojité na $\mathscr{F}$. Nechť $\varepsilon > 0$. f je stejnoměrně spojitá na K, a tedy existuje $\delta \in (0, \varepsilon)$ tak, že $\forall [t, z], [t', z'] \in K$ platí:

$$(|t - t'| < \delta \wedge \|z - z'\| < \delta) \Rightarrow \|f(z,t) - f(z', t')\| < \varepsilon.$$

Nechť $y_1, y_2 \in \mathscr{F}$ a $\|y_1 - y_2\|_\infty < \delta$. Pak máme $\sup_{\delta \in I} \|y_1(s) - y_2(s)\| < \delta$, a tím pádem:

$$\begin{aligned} |F(y_1) - F(y_2)| &= \left\| y_1(t) - \int_{t_0}^t f(y_1(s), s) \, \mathrm{d}s - \left(y_2(t) - \int_{t_0}^t f(y(s), s) \, \mathrm{d}s \right) \right\|_\infty \\ &\le \|y_1(t) - y_2(t)\|_\infty + \sup_{t \in I} \int_{t_0}^t \|f(y_1(s), s) - f(y_2(s), s)\| \, \mathrm{d}s \\ &\le \varepsilon + \int_{t_0}^{t_0 + c} \varepsilon \, \mathrm{d}s = \varepsilon(1 + c). \end{aligned}$$

Ukázali jsme, že F je spojitá.
Krok 6. F je spojitá na kompaktní množině, což znamená, že zde nabývá svého minima v nějakém $x \in \mathscr{F}$. Budeme ověřovat, že $F(x) = 0$.
Krok 7. Zkonstruujeme funkce $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ v $\mathscr{F}$ splňující $F(x_k) \to 0$. K tomuto účelu vezměme $k \in \mathbb{N}$ pevné. Induktivně sestrojíme zobrazení $x_k \colon I \to \overline{B}(x_0, b)$ takové, že $x_k \in \mathscr{F}$ a $F(x_k) \leq \frac{Lc}{k}$. Položme nejprve $x_k(t) = x_0$, $t \in \left[t_0, t_0 + \frac{c}{k}\right]$. Dále definujme:

$$x_k(t) = x_0 + \int_{t_0+\frac{c}{k}}^{t} f\left(s - \frac{c}{k}, x_k\left(s - \frac{c}{k}\right)\right) \mathrm{d}s,$$

kde $t \in \left(t_0 + \frac{c}{k}, t_0 + \frac{2c}{k}\right]$. Předpokládejme nyní, že pro nějaké $j \in \{2, \dots, k-1\}$ je zobrazení x_k definované na $\left[t_0, t_0 + \frac{jc}{k}\right]$ a splňuje:

$$x_k(t) = x_0 + \int_{t_0+\frac{c}{k}}^{t} f\left(s - \frac{c}{k}, x_k\left(s - \frac{c}{k}\right)\right) \mathrm{d}s,$$

kde $t \in \left(t_0 + \frac{c}{k}, \frac{jc}{k}\right]$. Pak máme:

$$\begin{aligned}\|x_0 - x_k(t)\| &= \left\|\int_{t_0+\frac{c}{k}}^{t} f\left(s - \frac{c}{k}, x_k\left(s - \frac{c}{k}\right)\right) \mathrm{d}s\right\| \leq \int_{t_0+\frac{c}{k}}^{t} \left\|f\left(s - \frac{c}{k}, x_k\left(s - \frac{c}{k}\right)\right)\right\| \mathrm{d}s \\ &\leq L\left(t - t_0 - \frac{c}{k}\right) \leq Lc \leq b,\end{aligned}$$

kde $t \in \left(t_0 + \frac{c}{k}, \frac{jc}{k}\right]$. Tedy je zobrazení $s \mapsto f\left(s - \frac{c}{k}, x_k\left(s - \frac{c}{k}\right)\right)$ dobře definované na $\left(t_0 + \frac{jc}{k}, t_0 + \frac{(j+1)c}{k}\right]$ a můžeme položit:

$$x_k(t) = x_k\left(t_0 + \frac{jc}{k}\right) + \int_{\frac{jc}{k}}^{t} f\left(s - \frac{c}{k}, x_k\left(s - \frac{c}{k}\right)\right) \mathrm{d}s,$$

kde $t \in \left(\frac{jc}{k}, \frac{(j+1)c}{k}\right]$. Pak zřejmě:

$$x_k(t) = x_0 + \int_{t_0+\frac{c}{k}}^{t} f\left(s - \frac{c}{k}, x_k\left(s - \frac{c}{k}\right)\right) \mathrm{d}s,$$

kde $t \in \left(\frac{jc}{k}, \frac{(j+1)c}{k}\right)$. Tím je konstrukce zobrazení dokončena na celém intervalu $[t_0, t_0 + c]$. Z konstrukce vyplývá rovnost:

$$x_k(t) = \begin{cases} x_0, & t \in \left[t_0, t_0 + \frac{c}{k}\right] \\ x_0 + \int_{t_0+\frac{c}{k}}^{t} f\left(s - \frac{c}{k}, x_k\left(s - \frac{c}{k}\right)\right) \mathrm{d}s, & t \in \left(t_0 + \frac{c}{k}, t_0 + c\right]. \end{cases}$$

Po substituci $s - \frac{c}{k} = u$ obdržíme:

$$x_k(t) = \begin{cases} x_0, & t \in \left[t_0, t_0 + \frac{c}{k}\right] \\ x_0 + \int_{t_0}^{t-\frac{c}{k}} f\left(u, x_k(u)\right) \mathrm{d}s, & t \in \left(t_0 + \frac{c}{k}, t_0 + c\right]. \end{cases}$$

Krok 8. Ukážeme, že $x_k \in \mathscr{F}$. K tomu je třeba ověřit L-lipschitzovskost x_k. Mějme $t, s \in [t_0, t_0 + c]$ splňující $t < s$. Pokud $t, s \in \left[t_0, t_0 + \frac{c}{k}\right]$, pak nerovnost $\|x_k(s) - x_k(t)\| \leq L(s-t)$ je zřejmá. Pokud $t_0 + \frac{c}{k} \leq t$, pak máme odhad:

$$\|x_k(s) - x_k(t)\| \leq \int_t^s \left\| f\left(u - \frac{c}{k}, x_k\left(u - \frac{c}{k}\right)\right)\right\| \mathrm{d}u \leq L(s-t).$$

Pokud $t \leq t_0 + \frac{c}{k} \leq s$, pak:

$$\|x_k(s) - x_k(t)\| \leq \int_{t_0 + \frac{c}{k}}^s \left\| f\left(u - \frac{c}{k}, x_k\left(u - \frac{c}{k}\right)\right)\right\| \mathrm{d}u \leq L\left(s - t_0 - \frac{c}{k}\right) \leq L(s-t).$$

Tedy skutečně $x_k \in \mathscr{F}$.
Krok 9. Ověříme, že $F(x_k) \leq \frac{Lc}{k}$. Nechť $t \in [t_0, t_0 + c]$ je dáno. Pokud $t \in \left[t_0, t_0 + \frac{c}{k}\right]$, pak:

$$\left\| x_k(t) - x_0 - \int_{t_0}^t f(s, x_k(s))\,\mathrm{d}s \right\| \leq \int_{t_0}^t \|f(s, x_k(s))\|\,\mathrm{d}s \leq \frac{Lc}{k}.$$

Pokud $t \in \left(t_0 + \frac{c}{k}, t_0 + c\right]$, pak:

$$\begin{aligned}\left\| x_k(t) - x_0 - \int_{t_0}^t f(s, x_k(s))\,\mathrm{d}s \right\| &\leq \left\| \int_{t_0}^{t - \frac{c}{k}} f(s, x_k(s))\,\mathrm{d}s - \int_{t_0}^t f(s, x_k(s))\,\mathrm{d}s \right\| \\ &\leq \int_{t - \frac{c}{k}}^t \|f(s, x_k(s))\|\,\mathrm{d}s \leq \frac{Lc}{k}.\end{aligned}$$

Tedy:

$$F(x_k) = \max_{t \in I} \left\| x_k(t) - x_0 - \int_{t_0}^t f(s, x_k(s))\,\mathrm{d}s \right\| \leq \frac{Lc}{k}.$$

Funkce x tedy splňuje $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s))\,\mathrm{d}s$, čímž pádem na intervalu I řeší naší rovnici s počáteční podmínkou $x(t_0) = x_0$. □

Uvedeme ještě jeden důkaz této věty:

Důkaz. Krok 1. Nejprve uvedeme následující pomocné tvrzení: Pokud $\Omega = \mathbb{R}^{n+1}$ a f je spojitá a omezená na Ω, pak $\forall T > 0$ existuje řešení (DR) $x\colon [t_0 - T, t_0 + T] \to \mathbb{R}^n$ splňující počáteční podmínku $x(t_0) = x_0$. K dokázání tohoto pomocného tvrzení definujme pro $\lambda > 0$:

$$x_\lambda(t) = \begin{cases} x_0, & t \in [t_0 - \lambda, t_0], \\ x_0 + \int_{t_0}^t f(x_\lambda(s - \lambda), s)\,\mathrm{d}s, & t \in (t_0, \infty). \end{cases}$$

Taková funkce existuje. Když je totiž x_λ definovaná na $[t_0 - \lambda, t_0]$, pak je dána hodnotou x_0. Pro $t \in (t_0, t_0 + \lambda]$ je $s \in (t_0, t_0 + \lambda]$, a tedy $s - \lambda \in (t_0 - \lambda, t_0]$. Analogicky, na $(t_0 + k\lambda, t_0 + (k+1)\lambda]$ je $s - \lambda \in (t_0 + (k-1)\lambda, t_0 + k\lambda]$, které jsme definovali v předchozím kroku. Vezměme $\lambda = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Nyní definujme:

$$M = \left\{ x_{\frac{1}{n}}, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Ověříme, že M splňuje předpoklady Arzela-Ascoliho věty. Jistě:

$$\|x_\lambda(t)\| \leq \|x_0\| + \int_{t_0}^{t} \|f(x_\lambda(x-\lambda), s)\| \,\mathrm{d}s \leq \|x_0\| + \|f\|_\infty |t-t_0| \leq \|x_0\| + \|f\|_\infty |T-t_0|.$$

Tímto jsme ověřili stejnou omezenost. Dále $\forall \varepsilon > 0$ existuje $\delta = \frac{\varepsilon}{\|f\|_\infty}$ tak, že $\forall t, \tau \in [t_0, t_0+T]$ a $\forall n \in \mathbb{N}$ platí, že pokud $|t-\tau| < \delta$, pak:

$$\|x_\lambda(t) - x_\lambda(\tau)\| = \left\| \int_{\tau}^{t} f(x_\lambda(s-\lambda), s) \,\mathrm{d}s \right\| \leq \|f\|_\infty |t-\tau| = \varepsilon.$$

Dostáváme stejnou spojitost. M je tím pádem relativně kompaktní. Můžeme tedy z $x_{\frac{1}{n}}$ vybrat konvergentní podposloupnost. $x_{\frac{1}{n_k}}$ konverguje stejnoměrně k nějaké funkci x na $[t_0, t_0+T]$. Ukážeme, že x řeší rovnici $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x(s), s) \,\mathrm{d}s$. Víme, že $x_{\frac{1}{n_k}}$ konverguje k x, dále x_0 jistě konverguje k x_0. Musíme ukázat, že $\int_{t_0}^{t} f\left(x_{\frac{1}{n_k}}\left(s - \frac{1}{n_k}\right), s\right) \mathrm{d}s$ konverguje k $\int_{t_0}^{t} f(x(s), s) \,\mathrm{d}s$. Zřejmě:

$$\begin{aligned} &\left\| \int_{t_0}^{t} f(x_{\lambda_k}(s-\lambda_k), s) \,\mathrm{d}s - \int_{t_0}^{t} f(x(s), s) \,\mathrm{d}s \right\| \\ &\leq \int_{t_0}^{t} \|f(x_{\lambda_k}(s-\lambda_k), s) - f(x_{\lambda_k}(s), s)\| + \|f(x_{\lambda_k}(s), s) - f(x(s), s)\| \,\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

Jistě $\forall \varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pokud $\|x-y\| < \delta$, pak $\|f(x,s) - f(y,s)\| < \varepsilon$, protože f je na kompaktu stejnoměrně spojitá. Existuje totiž nějaká kompaktní množina $K \subset \mathbb{R}^{n+1}$ taková, že $(x_{\lambda_k}(s-\lambda_k), s) \in K$, $(x_{\lambda_k}(s), s) \in K$ a $(x(s), s) \in K$, a to $\forall s \in [t_0, t_0+T]$, protože x_λ je stejně omezená. Dále $\forall \delta > 0$ existuje $k_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $\forall k \geq k_0$ platí $\|x_{\lambda_k}(s-\lambda_k) - x(s-\lambda_k)\| < \delta$ $\forall s \in [t_0, t_0+T]$, což máme ze stejnoměrné konvergence. Ze stejné spojitosti pak máme, že $\forall \delta > 0$ existuje $k_1 \in \mathbb{N}$ tak, že $\forall k \geq k_1$ platí $\|x_{\lambda_k}(s-\lambda_k) - x_{\lambda_k}(s)\| < \delta$ $\forall s \in [t_0, t_0+T]$. Nyní $\forall k \geq k_0, k_1$ platí:

$$\begin{aligned} &\int_{t_0}^{t} \|f(x_{\lambda_k}(s-\lambda_k), s) - f(x_{\lambda_k}(s), s)\| + \|f(x_{\lambda_k}(s), s) - f(x(s), s)\| \,\mathrm{d}s \\ &\leq 2\varepsilon |t_0 - t| \leq 2T\varepsilon. \end{aligned}$$

Ukázali jsme, že x je řešení integrální rovnice na $[t_0, t_0+T]$. Analogicky bychom našli řešení na $[t_0-T, t_0]$. Řešení bychom slepili a dostali řešení na $[t_0-T, t_0+T]$.
Krok 2. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ otevřená, $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ spojitá a $(x_0, t_0) \in \Omega$. Vezmeme $K_1, K_2 \subset \Omega$ otevřené a omezené tak, aby $\overline{K}_1 \subset \overline{K_2} \subset \Omega$ a $x_0 \in K_1$. Definujme:

$$\Phi(x,t) = \begin{cases} 1, & (x,t) \in K_1, \\ 0, & (x,t) \in \Omega \setminus \overline{K_2}, \\ \text{spojitá mezi.} & \end{cases}$$

Definujme dále:

$$\tilde{f}(x,t) = \begin{cases} \Phi(x,t)f(x,t), & (x,t) \in \Omega, \\ 0, & (x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \Omega. \end{cases}$$

Je zřejmé, že $\tilde{f}$ je omezená, protože je nulová na $\Omega \setminus \overline{K}_2$. Dále f je omezená na $\overline{K}_2$, protože $\overline{K}_2$ je kompaktní a f je spojitá funkce. Dle prvního kroku existuje řešení $\tilde{x}(t)$, $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$ (DR). Protože $\tilde{x}$ je spojitá, tak existuje $\delta > 0$ tak, že graf $\tilde{x}$ na $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ leží v K_1. Tedy $\forall t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ platí $\tilde{x}'(t) = \tilde{f}(\tilde{x}(t), t) = f(\tilde{x}(t), t)$. To znamená, že $\tilde{x}$ řeší (DR) na $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$. Tím jsme důkaz dokončili. □

17.2 Jednoznačnost řešení

Definice 17.5. Řekneme, že (DR) má vlastnost:

- lokální jednoznačnosti, jestliže platí: Máme-li řešení (x, I), (y, J), $t_0 \in I \cap J$ a $x(t_0) = y(t_0)$, pak existuje $\delta > 0$ tak, že $\forall t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ platí $x(t) = y(t)$.
- globální jednoznačnosti, jestliže platí: Máme-li řešení (x, I), (y, J), $t_0 \in I \cap J$ a $x(t_0) = y(t_0)$, pak $\forall t \in I \cap J$ platí $x(t) = y(t)$.

Věta 17.6. (DR) má v Ω vlastnost globální jednoznačnosti právě tehdy, když zde má vlastnost lokální jednoznačnosti.

Důkaz. Pravá implikace je zřejmá. Levou implikaci nyní dokážeme. Mějme dvě řešení (x, I) a (y, J), $x(t_0) = y(t_0)$. Chceme dokázat, že $x(t) = y(t)$ na $I \cap J = (a, b)$. Nechť:

$$M = \{c \in \mathbb{R} \colon c > t_0, x(t) = y(t) \text{ na } [t_0, c]\}.$$

Z lokální jednoznačnosti víme, že M je neprázdná. Označme $s = \sup M$. Chceme, aby $s = b$. Pro spor předpokládejme, že $s < b$. Jistě existuje posloupnost t_n tak, že $t_n \to s$ a $x(t_n) = y(t_n)$. x a y jsou řešení, a tedy jsou spojité, z čehož plyne, že $x(s) = y(s)$. Z lokální jednoznačnosti dostáváme, že $x(t) = y(t)$ na $(s - \delta, s + \delta)$, což je spor s tím, že s je supremum. □

Věta 17.7. Nechť f je lipschitzovská vzhledem k x. Pak (DR) má v Ω vlastnost lokální jednoznačnosti.

Důkaz. Mějme dvě řešení (x, I), (y, J), $t_0 \in I \cap J$ a $x(t_0) = y(t_0)$. Chceme ukázat, že se rovnají na nějakém deltovém okolí. Vezměmě $\varepsilon > 0$ a $L > 0$ tak, že f je L-lispchitzovská na $U = B(x_0, \varepsilon) \times (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$. Vezmeme $\delta > 0$ tak malé, aby grafy x a y na $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ ležely v U, $(t_0 - \delta, t_0 + \delta) \subset I \cap J$ a $\delta < \frac{1}{2L}$. Označme $\gamma = \sup_{t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)} \{|x(t) - y(t)|\}$. Vezměme $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ libovolné:

$$\|x(t) - y(t)\| = \left\| \int_{t_0}^{t} f(x(s), s) - f(y(s), s) \, \mathrm{d}s \right\| \le \left| \int_{t_0}^{t} L \|x(s) - y(s)\| \, \mathrm{d}s \right| \le L\gamma\delta < \frac{1}{2}\gamma.$$

Dostali jsme, že $\gamma < \frac{1}{2}\gamma$, a tedy $\gamma = 0$, což dává $x(t) = y(t)$ $\forall t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$. □

Důsledek (Lokální Picardova věta)**.** Je-li f lokálně lipschitzovská v Ω vzhledem k x a $(x_0, t_0) \in \Omega$, pak existuje $\delta > 0$ a právě jedno $x\colon (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \to \mathbb{R}^n$, které řeší (DR) s počáteční podmínkou $x(t_0) = x_0$.

Důkaz. Existence plyne z Peanovy věty. Jednoznačnost pak z předchozí věty. □

Věta 17.8. Pokud jsou $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ spojité v Ω, $i = 1, \ldots, n$, pak f je lokálně lipschitzovská v Ω vzhledem k x.

Důkaz. Volme $(x_0, t_0) \in \Omega$. Nechť $\delta > 0$ takové, že $M = \overline{B}(x_0, \delta) \times [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \subset \Omega$. Tato množina je kompaktní, a tedy $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ jsou na této množině omezené konstantou K. Pro $(x, t), (y, t) \in M$ máme:

$$\begin{aligned} \|f(x,t) - f(y,t)\| &= \|f(x + 0 \cdot (y - x), t) - f(x + 1 \cdot (y - x), t)\| \\ &= \|[f(x + s(y - x), t)]_0^1\| = \left\| \int_0^1 \frac{\partial}{\partial s} f(x + s(y - x), t)\, \mathrm{d}s \right\|. \end{aligned}$$

Nyní dle řetízkového pravidla máme:

$$\frac{\partial}{\partial s} f(x + s(y - x), t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x + s(y - x), t)(y_i - x_i).$$

Dále:

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^1 \frac{\partial}{\partial s} f(x + s(y - x), t)\, \mathrm{d}s \right\| &\le \int_0^1 \sum_{i=1}^{n} K|y_i - x_i|\, \mathrm{d}s \le \sum_{i=1}^{n} K \max_{i=1,\ldots,n} |y_i - x_i| \\ &= nK \max_{i=1,\ldots,n} |y_i - x_i| \le nK\|y - x\|. \end{aligned}$$

Dostali jsme lokální lipschitzovskost s konstantou nK. □

17.3 Maximální řešení

Definice 17.9. Řešení $(\tilde{x}, \tilde{I})$ je prodloužením řešení (x, I), jestliže $I \subset \tilde{I}$ a $\forall t \in I$ platí $x(t) = \tilde{x}(t)$. Řešení je maximální, pokud neexistuje netriviální prodloužení.

K důkazu následující věty budeme potřebovat Zornovo lemma:

Zornovo lemma. Nechť M je libovolná neprázdná množina částečně uspořádaní relací $<$. Nechť každý řetězec v M je shora omezený. Pak v M existuje maximální prvek.

Věta 17.10. Nechť (x, I) je řešení (DR). Pak (x, I) má alespoň jedno maximální prodloužení.

Důkaz. Nechť M je množina všech prodloužení (x, I). Řekneme, že $(x_1, I_1) < (x_2, I_2)$, jestliže (x_2, I_2) je prodloužením (x_1, I_1). Pak $<$ je zřejmě částečné uspořádání. Nechť N je řetězec v M. Vezměme $I_0 = \bigcup_{(\tilde{x}, \tilde{J}) \in N} \tilde{J}$. Definujme $x_0(t) = \tilde{x}(t)$, $t \in I_0$, a tedy existuje $\tilde{J}$ tak, že $(\tilde{x}, \tilde{J}) \in N$ a $t \in \tilde{J}$. Ověříme, že je tato definice korektní, tedy že x_0 nezávisí na volbě $\tilde{J}$ a $\tilde{x}$. Mějme t a $\tilde{x}_1$, $\tilde{x}_2$ definované v t. Protože $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \in N$ a N je řetězec, tak jedno z $\tilde{x}_1$, $\tilde{x}_2$ je prodloužením toho druhého. Tedy pro $t \in \tilde{J}_1 \cap \tilde{J}_2$ platí $\tilde{x}_1(t) = \tilde{x}_2(t)$. Definice je korektní. Dále $(x_0, I_0) > (\tilde{x}, \tilde{J})\ \forall(\tilde{x}, \tilde{J}) \in N$. x_0 je navíc řešení, neboť $x_0 = \tilde{x}$ na okolí t a $\tilde{x}$ je řešení. Tedy můžeme psát, že $(x_0, I_0) \in M$. N je tím pádem shora omezená prvkem (x_0, I_0) a dle Zornova lemmatu existuje maximální prvek v M. Maximální prvek M je právě maximálním řešením (DR). $\square$

Lemma. Nechť (x, I) je řešení (DR) a $I = (a, b)$. Pak řešení x lze prodloužit za bod b právě tehdy, když platí:

1. $b < \infty$,
2. existuje $\lim_{t \to b^-} x(t) = x_0$,
3. $(x_0, b) \in \Omega$.

Důkaz. Pravá implikace je zřejmá. Dokážeme levou. Vezměme bod (x_0, b) jako novou počáteční podmínku. Dle Peanovy věty existuje $\tilde{x}\colon (b - \delta, b + \delta) \to \mathbb{R}^n$, které řeší (DR). Definujme:

$$x_1(t) = \begin{cases} x(t), & t \in (a, b), \\ \tilde{x}(t), & t \in [b, b + \delta). \end{cases}$$

Ukážeme, že x_1 je řešení, tedy prodloužení x. x_1 jistě splňuje (DR) $\forall t \in (a, b)$, neboť x je řešení, a $\forall t \in (b, b + \delta)$, protože $\tilde{x}$ je řešení. Zbývá ověřit, že $x_1'(b) = f(x_1(b), b)$. x_1 je spojitá v b, protože $\lim_{t \to b^-} x(t) = x_0$ a $\lim_{t \to b^+} x_1(t) = \lim_{t \to b^+} \tilde{x}(t) = \tilde{x}(b) = x_0$. Pak existují následující limity:

$$\lim_{t \to b^-} x_1'(t) = \lim_{t \to b^-} f(x(t), t) = f(x_0, b).$$
$$\lim_{t \to b^+} x_1'(t) = \lim_{t \to b^+} f(\tilde{x}(t), t) = f(\tilde{x}(b), b) = f(x_0, b).$$

Ukázali jsme, že x_1 je řešením (DR) a je prodloužením x. $\square$

Věta 17.11 (O opuštění kompaktu)**.** Nechť (x, I) je maximální řešení (DR). Nechť $K \subset \Omega$ je kompaktní a existuje $t_0 \in I$ tak, že $(x(t_0), t_0) \in K$. Pak existuje $t_1 > t_0$, $t_1 \in I$, takové, že $x(t_1), t_1) \notin K$. Analogicky existuje $t_2 < t_0$, $t_2 \in I$, takové, že $(x_2(t_2), t_2) \notin K$.

Důkaz. Označme $I = (a, b)$. Dokážeme sporem. Předpokládejme, že takové t_1 neexistuje, tedy $\forall t_1 \in (a, b)$ platí, že $(x(t_1), t_1) \in K$. Jistě $b < \infty$, protože kompaktní množina K je omezená. Dále spojitá funkce f je na K omezená nějakou konstantou C. Ukážeme, že $\lim_{t \to b^-} x(t)$ existuje pomocí BC podmínky. Nechť $\varepsilon > 0$. Volme $\delta = \frac{\varepsilon}{C}$. Pak $\forall s, t \in (b - \delta, b), s > t$ platí:

$$\|x(s) - x(t)\| = \|x'(\xi)\||s - t| = \|f(x(\xi), \xi)\||s - t| \le C|s - t| < \varepsilon,$$

kde jsme využili Lagrangeovu větu pro $\xi \in (s, t)$. Tedy existuje $\lim_{t \to b^-} x(t) = x_0$. Nakonec potřebujeme ukázat, že $(x_0, b) \in \Omega$. Platí, že $(x(t), t) \to (x_0, b)$ a $(x(t), t) \in K$. Jelikož nemůžeme vykonvergovat z kompaktu, tak dostáváme, že $(x_0, b) \in K \subset \Omega$. Tímto jsme ověřili všechny podmínky předchozího lemmatu, a tedy (x, I) lze prodloužit, čímž dostáváme spor s maximalitou řešení (x, I). $\square$

17.4 Závislost řešení na počáteční podmínce a parametrech

Definice 17.12. Nechť f je v Ω lokálně lipschitzovská vzhledem k x. Řešící funckí (DR) nazveme funkci $\varphi\colon G \subset \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}^n$ definovanou předpisem $\varphi(t, t_0, x_0) = x(t)$, kde x je maximální řešení (DR) splňující $x(t_0) = x_0$.

Lemma (Gronwallova nerovnost)**.** Nechť g, w jsou spojité nezáporné funkce na I, $t_0 \in I$ a $K \geq 0$. Nechť $\forall t \in I$ platí:

$$w(t) \leq K + \left| \int_{t_0}^{t} w(s)g(s) \, \mathrm{d}s \right|.$$

Potom $\forall t \in I$ platí:

$$w(t) \leq K \mathrm{e}^{\left| \int_{t_0}^{t} g(s) \, \mathrm{d}s \right|}.$$

Důkaz. Bez újmy na obecnosti $t \geq t_0$. Volme $\varepsilon > 0$ a definujme:

$$\Phi(t) = K + \int_{t_0}^{t} w(s)g(s) \, \mathrm{d}s + \varepsilon.$$

Pak $w(s) \leq \Phi(s)$ a $\forall s \geq t_0$ platí $\Phi'(s) = w(s)g(s)$. Tedy:

$$\frac{\Phi'(s)}{\Phi(s)} = \frac{w(s)g(s)}{\Phi(s)} \leq g(s).$$

Integrací dostaneme:

$$\int_{t_0}^{t} \frac{\Phi'(s)}{\Phi(s)} \, \mathrm{d}s \leq \int_{t_0}^{t} g(s) \, \mathrm{d}s.$$

Pak:

$$\ln(\Phi(t)) - \ln(\Phi(t_0)) \leq \int_{t_0}^{t} g(s) \, \mathrm{d}s.$$

Navíc $\ln(\Phi(t)) - \ln(\Phi(t_0)) = \ln\left(\frac{\Phi(t)}{\Phi(t_0)}\right) = \ln\left(\frac{\Phi(t)}{K+\varepsilon}\right)$. Tedy $\forall \varepsilon > 0$ máme:

$$w(t) \leq \Phi(t) \leq (K + \varepsilon) \mathrm{e}^{\left(\int_{t_0}^{t} g(s) \, \mathrm{d}s \right)}.$$

Jelikož toto platí $\forall \varepsilon > 0$, tak dostáváme požadovanou nerovnost. □

Důsledek. Nechť f je globálně lipschitzovská vzhledem k x a s konstantou L. Nechť x a y jsou dvě řešení (DR) na I s počáteční podmínkou $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$, $t_0 \in I$. Pak $\forall t \in I$ platí:

$$\|x(t) - y(t)\| \leq \|x_0 - y_0\| \mathrm{e}^{L|t-t_0|}.$$

Důkaz. Definujme $w(t) = \|x(t) - y(t)\|$. Zřejmě:

$$\begin{aligned}
w(t) &= \left\| x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x(s), s) \, \mathrm{d}s - y_0 - \int_{t_0}^{t} f(y(s), s) \, \mathrm{d}s \right\| \\
&\leq \underbrace{\|x_0 - y_0\|}_{\leq K} + \left\| \int_{t_0}^{t} f(x(s), s) - f(y(s), s) \, \mathrm{d}s \right\| \\
&\leq K + \underbrace{L}_{:=g(s)} \left| \int_{t_0}^{t} \underbrace{\|x(s) - y(s)\|}_{=w(s)} \, \mathrm{d}s \right|.
\end{aligned}$$

Použitím Gronwallovy nerovnosti dostaneme:

$$w(t) \leq \|x_0 - y_0\| \mathrm{e}^{\left|\int_{t_0}^t L \, \mathrm{d}s\right|} = \|x_0 - y_0\| \mathrm{e}^{L|t-t_0|}.$$

Tím je důkaz hotov. □

Věta 17.13. Nechť G je množina z definice řešící funkce a f je lokálně lipschitzovská. Pak G je otevřená a φ je spojitá na G.

Důkaz. Vezměme $(t, t_0, x_0) \in G$ a nechť x je maximální řešení s počáteční podmínkou $x(t_0) = x_0$. Pak $\mathcal{D}_x \supset [t_0, t]$. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $t \geq t_0$. Definujme:

$$K_\delta = \{[s, y] \in \mathbb{R}^{n+1}, s \in [t_0 - \delta, t + \delta], \|y(s) - x(s)\| \leq \delta\}.$$

Pro δ dost malé je $K_\delta \subset \Omega$. Navíc K_δ je kompaktní. Protože f je lokálně lipschitzovská na Ω, je f globálně lipschitzovská na K_δ s nějakou konstantou L. Volme $\varepsilon < \frac{\delta}{2(1+C_0)\mathrm{e}^{L(t-t_0+2\delta)}}$, kde C_0 je maximum $\|f\|$ na K_δ. Nechť $\|y_0 - x_0\| < \varepsilon$, $|s_0 - t_0| < \varepsilon$ a nechť y je maximální řešení (DR) s počáteční podmínkou $y(s_0) = y_0$. Chceme ukázat, že y je definované na celém intervalu $[s_0, t + \delta]$. Pak $\forall s \in (t - \varepsilon, t + \varepsilon)$ je $y(s)$ definované, a tedy $(s, s_0, y_0) \in G$. Maximální řešení y musí opustit kompakt K_δ. Ukážeme, že ho nemůže opustit shora, ani zdola, a tedy zbývá pouze možnost opuštění bokem, což bude znamenat, že y je definované až do $t + \delta$. Pomocí odhadů a Lagrangeovy věty pro $\xi \in (t_0, s_0)$ dostaneme:

$$\|y(s_0) - x(s_0)\| \leq \underbrace{\|y(s_0) - x(t_0)\|}_{=\|y_0 - x_0\|} + \|x(t_0) - x(s_0)\| \leq \varepsilon + \underbrace{\|x'(\xi)\|}_{=\|f(x(\xi),\xi)\|} |t_0 - s_0| \leq (1 + C_0)\varepsilon.$$

Nechť $s \geq t_0$, $s \in [t_0 - \delta, t + \delta]$. Pak:

$$\|x(s) - y(s)\| \leq \|x(s_0) - y(s_0)\| \mathrm{e}^{L|s-s_0|},$$

což platí z předchozího důsledku. Dále:

$$\|x(s) - y(s)\| \leq (1 + C_0)\varepsilon \mathrm{e}^{L(t-t_0+2\delta)} \leq \frac{\delta}{2}.$$

Tímto jsme dokázali, že G je otevřená, neboť existuje koule, kterou G obsahuje. Zbývá dokázat spojitost funkce φ. Nechť $(t, t_0, x_0), (s, s_0, y_0) \in K_\delta$. Jistě:

$$\begin{aligned}
\|\varphi(t, t_0, x_0) - \varphi(s, s_0, y_0)\| &\leq \|\varphi(t, t_0, x_0) - \varphi(s, t_0, x_0)\| + \|\varphi(s, t_0, x_0) - \varphi(s, s_0, y_0)\| \\
&= \|x(t) - x(s)\| + \|x(s) - y(s)\| \\
&\leq C_0|s - t| + \|x(s_0) - y(s_0)\| \mathrm{e}^{L|s-s_0|} \\
&\leq C_0|s - t| + (1 + C_0)\mathrm{e}^{LT} \|x_0 - y_0\|.
\end{aligned}$$

Z tohoto již hned plyne spojitost. □

Věta 17.14. Nechť f je třídy $\mathcal{C}^2$ vzhledem k x a nechť φ je řešící funkce (DR). Potom $\forall (t, t_0, x_0) \in G$ a $\forall w \in \mathbb{R}^n$ existuje derivace φ podle x_0 ve směru w v bodě (t, t_0, x_0), tedy:

$$D_w \varphi(t, t_0, x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} (\varphi(t, t_0, x_0 + hw) - \varphi(t, t_0, x_0)).$$

Označíme-li pro pevné $(t_0, x_0) \in G$ $x(t) = \varphi(t, t_0, x_0)$ a $u(t) = D_w\varphi(t, t_0, x_0)$, pak platí:

$$u'(t) = (\nabla_x f(t, x(t)))u(t), \ \ u(t_0) = w.$$

Tuto rovnici označíme (V) a říkáme, že u splňuje rovnici ve variacích.

Důkaz. Nechť $(x_0, t_0) \in \Omega$. Definujme $x(t) = \varphi(t, t_0, x_0)$ na maximálním možném intervalu. Nechť $w \in \mathbb{R}^n$ a definujme u jako řešení (V). (V) je lineární rovnice tvaru $u'(t) = A(t)n(t)$ a jak uvidíme později, existuje právě jedno maximální řešení, které je navíc definované na celém intervalu, kde je definováno $A(t)$. Zbývá dokázat, že $u(t) = D_w\varphi(t, t_0, x_0)$. Nechť t je pevné a h dostatečně malé. Pak $\varphi(t, t_0, x_0 + hw)$ je definováno, neboť G je otevřená. Označme y_h řešení s počáteční podmínkou $y(t_0) = x_0 + hw$. Zřejmě:

$$\eta_h(t) = \frac{1}{h}[\varphi(t, t_0, x_0 + hw) - \varphi(t, t_0, x_0)] - u(t) = \frac{1}{h}(y_h(t) - x(t)) - u(t).$$

Chceme ukázat, že $\lim_{h\to 0} \eta_h(t) = 0$. Zřejmě:

$$\eta_h'(t) = \frac{1}{h}(y_h'(t) - x'(t)) - u'(t) = \frac{1}{h}(f(y_h(t), t) - f(x(t), t)) - (\nabla_x f(x(t), t))u(t).$$

Dále užitím Taylora pro vhodné ξ ležící na úsečce xy dostaneme:

$$f(y, t) = f(x, t) + \nabla_x f(x, t)(y - x) + \frac{1}{2}(y - x)^T \nabla_x^2 f(\xi, t)(y - x).$$

Dosadíme:

$$\eta_h'(t) = \frac{1}{h}\left((\nabla_x f(x(t), t)(y_h(t) - x(t)) + \underbrace{\frac{1}{2}(y_h(t) - x(t))^T \nabla_x^2 f(\xi, t)(y_h(t) - x(t)))}_{z_h(t)}\right)$$
$$- \nabla_x f(x(t), t)u(t).$$

Tedy:

$$\eta_h'(t) = \nabla_x f(x(t), t)\eta_h(t) + \frac{1}{h}z_h(t).$$

Tuto rovnici označme $(*)$. Dále:

$$\|z_h(t)\| \leq \frac{1}{2}\underbrace{\|y_h(t) - x(t)\|}_{\leq \mathrm{e}^{L(t-t_0)}\|hw\|^2}\underbrace{\max\|\nabla_x^2 f\|}_{=M} \leq Ch^2.$$

Integrováním rovnice $(*)$ dostaneme:

$$\eta_h(t) - \eta_h(t_0) = \int_{t_0}^t \nabla_x f(x(s), s)\eta_h(s) + \frac{z_h(s)}{h}\,\mathrm{d}s.$$

Z definice η_h a počátečních podmínek x, y_h, u plyne, že $\eta_h(t_0) = 0$. Nyní:

$$\|\eta_h(t)\| \leq \int_{t_0}^t Ch\,\mathrm{d}s + \int_{t_0}^t \|\nabla_x f(x(s), s)\|\|\eta_h(s)\|\,\mathrm{d}s.$$

Využitím Gronwallovy nerovnosti získáme:

$$\eta_h(t) \leq Ch(T - t_0)\mathrm{e}^{\int_{t_0}^t \|\nabla_x f(x(s), s)\|\,\mathrm{d}s} \leq Kh.$$

Pro $h \to 0$ vidíme, že $\eta_h(t) \to 0$. □

17.5 Lineární ODR

Budeme se nyní zabývat rovnicí $x'(t) = A(t)x(t) + b(t)$, kde $A\colon (\alpha, \beta) \to M(n \times n)$ a $b\colon (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}^n$ jsou spojité (A je matice). Tuto rovnici budeme značit (LR). Jedná se o speciální případ (DR), kde $f(x, t) = A(t)x(t) + b(t)$.

Věta 17.15. Nechť $t_0 \in (\alpha, \beta)$ a $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Pak existuje právě jedno maximální řešení (LR) s počáteční podmínkou $x(t_0) = x_0$. Toto řešení je definováno na celém (α, β).

Důkaz. Z Peanovy věty víme, že řešení existuje na nějakém malém okolí. Platí:

$$\|f(x,t) - f(y,t)\| = \|A(t)(x-y)\| \leq \|A(t)\|\|x-y\| \leq \max_{t \in (t_0-\sigma, t_0+\sigma)} \|A(t)\|\|x-y\|.$$

Funkce je tedy lokálně lipschitzovská, čímž pádem existuje právě jedno maximální řešení z lokální Picardovy věty. Ukážeme, že toto řešení je definováno na celém (α, β). Důkaz budeme vést sporem. Nechť je maximální řešení definováno jen na nějakém podintervalu (γ, δ), $\delta < \beta$. Víme, že b a A jsou definované na $[t_0, \delta]$ a jsou zde spojité. Uzavřený interval je kompaktní, a tedy jsou tyto zobrazení omezené, znamenaje $\|b(t)\| \leq K$, $\|A(t)\| \leq K$ $\forall t \in [t_0, \delta]$, kde $K > 0$. Dále:

$$\begin{aligned}\|x(t)\| &\leq \left\| x_0 + \int_{t_0}^t A(s)x(s) + b(s)\,\mathrm{d}s \right\| \leq \|x_0\| + \int_{t_0}^t \|b(s)\|\,\mathrm{d}s + \int_{t_0}^t \|A(s)\|\|x(s)\|\,\mathrm{d}s \\ &\leq \|x_0\| + K(\delta - t_0) + \int_{t_0}^t K\|x(s)\|\,\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

Použitím Gronwallova lemmatu dostaneme:

$$\|x(t)\| \leq (\|x_0\| + K(\delta - t_0))\mathrm{e}^{K|t-t_0|} := g(t).$$

Označme $M = \{(y,t)\colon t \in [t_0, \delta], \|y\| \leq g(t)\}$. Řešení x musí opustit kompaktní množinu M, což znamená, že existuje $t_1 > t_0$ tak, že $(x(t_1), t_1) \notin M$. Dostáváme spor s tím, že $\delta < \beta$. □

V případě, že $b(t) = 0$ $\forall t$ dostaneme rovnici $x'(t) = A(t)x(t)$. Tuto rovnici budeme nazývat homogenní a označíme ji (HR).

Věta 17.16. Množina všech maximálních řešení (HR) je vektorový prostor dimenze n.

Důkaz. Je snadné ověřit, že se jedná o vektorový prostor. Ověříme, že má dimenzi n. Mějme řešení $\varphi^1, \dots, \varphi^n$ splňující (HR) s počátečními podmínkami $\varphi^j(t_0) = \mathbf{e}^j$, $j \in \{1, \dots, n\}$, kde $\mathbf{e}^j$ je j-tý vektor kanonické báze. Ukážeme, že $\varphi^1, \dots, \varphi^n$ tvoří bázi prostoru všech řešení. Nejprve musíme ověřit lineární nezávislost. Pokud $\sum_{i=1}^n \lambda_1 \varphi^i \equiv 0$, pak jistě $\sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi^i(t_0) = 0$. Z tohoto plyne, že $\sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{e}^i = 0$, a tedy $\lambda_i = 0$ $\forall i$. Dokázali jsme lineární nezávislost. Ukážeme, že tyto řešení generují vektorový prostor. Vezměme libovolné řešení z rovnice (HR). $z(t_0) = \sum_{i=1}^n z_i(t_0)\mathbf{e}^i$. Položme $\varphi(t) = \sum_{i=1}^n z_i(t_0)\varphi^i(t)$. Pak φ je řešení (HR), protože je lineární kombinací funkcí φ^i, které jsou řešeními. Dále $\varphi(t_0) = z(t_0)$. φ a z obě řeší (HR) s počáteční podmínkou $z(t_0)$, a tedy $\varphi(t) = z(t)$ $\forall t$. Tedy z je lineární kombinací φ^i, $i = 1, \dots, n$. Jedná se tím pádem o bázi. □

Definice 17.17. Fundamentálním systémem rovnice (HR) nazveme libovolnou bázi prostoru všech řešení rovnice (HR). Je-li $\varphi^1, \dots, \varphi^n$ fundamentální systém, pak maticovou funkci $\Phi(t)\colon (\alpha,\beta) \to M(n \times n)$, $\Phi(t) = (\varphi^1(t), \dots, \varphi^n(t))$, $t \in (\alpha, \beta)$, nazveme fundamentální maticí.

Definice 17.18. Wronského determinant (wronskián) rovnice (HR) je $w(t) = \det(\Phi(t))$, kde $\Phi(t)$ je fundamentální matice (HR).

Věta 17.19 (Liouville)**.** Platí $w(t) = w(t_0)\mathrm{e}^{\left(\int_{t_0}^t \operatorname{trace}(A(s))\,\mathrm{d}s\right)}$, kde $\operatorname{trace}(A) = \sum_{i=1}^n A_{ii}$ je stopa matice A.

Důkaz. Dokazovaná rovnost je ekvivalentní $w'(t) = \operatorname{trace}(A(t))w(t)$, kterou nyní budeme dokazovat. Nechť $\Phi(t) = (\varphi^1(t), \dots, \varphi^n(t))$ a $w(t) = \det(\Phi(t))$. Zřejmě:

$$w'(t) = (\det(\Phi(t)))' = \left(\sum_\pi (-1)^{\operatorname{sgn}(\pi)} \varphi^1_{\pi(1)}(t) \dots \varphi^n_{\pi(n)}(t)\right)' = \sum_{k=1}^n \det(D_k(t)),$$

kde $D_k(t) = \Phi(t)$ s k-tým řádkem zderivovaným. Tedy:

$$D_k(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1^1(t) & \dots & \varphi_1^n(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\varphi_k^1)'(t) & \dots & (\varphi_k^n)'(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_n^1(t) & \dots & \varphi_n^n(t) \end{pmatrix}.$$

Víme, že φ^j řeší (HR). Jistě $(\varphi_k^j)'(t) = \sum_{i=1}^n A_{ki}(t)\varphi_i^j(t)$. Tím pádem můžeme napsat $\varphi_k'(t) = \sum_{i=1}^n A_{ki}(t)\varphi_i(t)$, což je lineární kombinace řádků matice Φ. Podle pravidel pro počítání determinantu je možné dostat následující:

$$\det D_k = \det \begin{pmatrix} \varphi_1^1(t) & \dots & \varphi_1^n(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{kk}(t)\varphi_k^1(t) & \dots & A_{kk}(t)\varphi_k^n(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_n^1(t) & \dots & \varphi_n^n(t) \end{pmatrix} = A_{kk}(t)\det(\Phi(t)).$$

Když totiž od řádkového vektoru $\varphi_k'(t)$ odečteme příslušné násobky prvního, druhého,..., $(k-1)$-ho, $(k+1)$-ho,...,n-tého řádku, tak se determinant nezmění. Dostáváme, že $w'(t) = \det(\Phi(t))\sum_{k=1}^n A_{kk}(t) = w(t)\operatorname{trace}(A(t))$. □

Věta 17.20 (Variace konstant)**.** Řešení rovnice (LR) s počáteční podmínkou $x(t_0) = x_0$ je dáno předpisem:

$$x(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)x_0 + \Phi(t)\int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s)b(s)\,\mathrm{d}s,$$

kde Φ je libovolná fundamentální matice (HR).

Důkaz. Víme, že $\Phi'(t) = A(t)\Phi(t)$. Nyní:

$$\begin{aligned}
x'(t) &= \Phi'(t)\Phi^{-1}(t_0)x_0 + \Phi'(t)\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)b(s)\,\mathrm{d}s + \Phi(t)\Phi^{-1}(t)b(t) \\
&= A(t)\left(\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)x_0 + \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)b(s)\,\mathrm{d}s\right) + b(t) = A(t)x(t) + b(t).
\end{aligned}$$

Navíc zřejmě platí, že $x(t_0) = x_0$. Tím je důkaz hotov. □

Poznámka. Pokud je Φ fundamentální matice, tak ΦC, kde C je libovolná regulární matice $n \times n$, je také fundamentální matice. To můžeme relativně snadno nahlédnout. Mějme $\Phi(t) = (\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$. První sloupec matice $\Phi(t)C$ je lineární kombinací sloupců matice $\Phi(t)$ s koeficienty reprezentovanými prvním sloupcem matice C:

$$c_{11}\varphi_1(t) + c_{21}\varphi_2(t) + \cdots + c_{n1}\varphi_n(t).$$

Analogicky pro ostatní sloupce.

17.6 Lineární rovnice s konstantními koeficienty

Budeme zkoumat rovnici $x'(t) = Ax(t) + b(t)$, převážně pak rovnici $x'(t) = Ax(t)$, kterou si označíme (HRK).

Definice 17.21. Pro matici $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ definujmeme $\|A\| = \sup_{\|x\|\le 1}\{\|Ax\| \colon x \in \mathbb{R}^n\}$.

Věta 17.22. Nechť $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Potom platí:

1. $\|A\| \ge 0$, $\|A\| = 0$ právě tehdy, když $A = 0$.
2. $\|\lambda A\| = |\lambda|\|A\|\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$.
3. $\|A + B\| \le \|A\| + \|B\|$.
4. $\|AB\| \le \|A\|\|B\|$.
5. $\|Ay\| \le \|A\|\|y\|\ \forall y \in \mathbb{R}^n$.
6. $\|Ay\| \ge \|A^{-1}\|^{-1}\|y\|\ \forall y \in \mathbb{R}^n$, je-li A regulární.

Důkaz. První dvě tvrzení jsou zřejmé. Třetí tvrzení dokážeme snadno:

$$\begin{aligned}
\|A + B\| &= \sup_{\|x\|\le 1}\{\|(A+B)x\|\} \le \sup_{\|x\|\le 1}\{\|Ax\| + \|Bx\|\} \le \sup_{\|x\|\le 1}\|Ax\| + \sup_{\|x\|\le 1}\|Bx\| \\
&= \|A\| + \|B\|.
\end{aligned}$$

Nyní se podíváme na páte trvezní. Pro $y = 0$ je toto tvrzení zřejmé. Pro $y \ne 0$ definujme $x = \frac{y}{\|y\|}$. Pak $\|x\| = 1$. Tedy:

$$\|Ay\| = \|A(x\|y\|)\| = \|y\|\|Ax\| \le \|y\|\|A\|.$$

Této vlastnosti využijeme pro důkaz čtvrtého tvrzení. Zřejmě:

$$\|ABx\| \le \|A\|\|Bx\| \le \|A\|\|B\|\|x\|.$$

Aplikujeme supremum na obě strany a dostaneme požadovanou nerovnost. K důkazu šestého tvrzení položme $v = Ay$. Jistě $\|A^{-1}v\| \le \|A^{-1}\|\|v\|$, a tedy $\|y\| \le \|A^{-1}\|\|Ay\|$. □

Poznámka. Platí, že pokud $\sum_{k=0}^{\infty} \|B_k\|$ konverguje, pak konverguje i $\sum_{k=0}^{\infty} B_k$.

Věta 17.23. Funkce $U(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k A^k$, $t \in \mathbb{R}$, $A^0 = I$, $t^0 = 1$, je fundamentální matice problému (HRK) a platí $U(0) = I$.

Důkaz. Nejprve ukážeme, že řada konverguje. Jistě:

$$\left\| \frac{1}{k!} t^k A^k \right\| \leq \frac{1}{k!} |t|^k \|A\|^k.$$

Není těžké ukázat, že $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (|t| \|A\|)^k$ konverguje, například dle podílového kritéria. Tím pádem i $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k A^k$ konverguje z předchozí poznámky. Označme:

$$[U(t)]_{ij} = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{k!} [A^k]_{ij}}_{a_k} t^k,$$

což je mocninná řada s poloměrem konvergence $R = \infty$. Můžeme ji derivovat člen po členu:

$$\frac{\partial}{\partial t} [U(t)]_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} [A^k]_{ij} k t^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} [A^k]_{ij} t^{k-1}.$$

Dále tedy platí:

$$\frac{\partial}{\partial t} U(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} A^k t^{k-1} = A \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k t^k = AU(t),$$

kde prohození matice a limity je možné, protože násobení maticí A je spojitá funkce. Dále ihned vidíme, že $U(0) = I$. □

Poznámka. Funkci $U(t)$ budeme značit e^{tA}. Brzy ukážeme, že $\mathrm{e}^{-A} = (\mathrm{e}^{A})^{-1}$ a další vlastnosti této funkce. Speciálně této vlastnosti využijeme v následujícím důsledku.

Důsledek. Řešení úlohy $x'(t) = Ax(t) + b(t)$, $x(t_0) = x_0$, lze napsat ve tvaru:

$$x(t) = \mathrm{e}^{tA} \left(\mathrm{e}^{-t_0 A} x_0 + \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{-sA} b(s) \, \mathrm{d}s \right).$$

Důkaz. Plyne z předchozí věty a z věty o variaci konstant. □

Věta 17.24. Pro $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ definujeme $\mathrm{e}^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$. Platí:

1. $\mathrm{e}^{\lambda I} = \mathrm{e}^{\lambda} I$.
2. Pokud $AB = BA$, pak $\mathrm{e}^{A+B} = \mathrm{e}^A \mathrm{e}^B$.
3. Pro každou regulární matici C platí $\mathrm{e}^{C^{-1}AC} = C^{-1} \mathrm{e}^A C$.
4. $\mathrm{e}^{-A} = (\mathrm{e}^A)^{-1}$, speciálně platí, že e^A je vždy regulární.

Důkaz. První tvrzení plyne snadno z definice. K důkazu druhého nejrpve dokážeme, že platí $B\mathrm{e}^{tA} = \mathrm{e}^{tA}B$. Jistě:

$$B\mathrm{e}^{tA} = B\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}A^k t^k = \sum_{k=0}^{\infty}B\frac{1}{k!}A^k t^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}A^k B t^k = \left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}A^k t^k\right)B = \mathrm{e}^{tA}B.$$

Definujme nyní $U(t) = \mathrm{e}^{tA}\mathrm{e}^{tB}$. Platí:

$$U'(t) = (\mathrm{e}^{tA})'\mathrm{e}^{tB} + \mathrm{e}^{tA}(\mathrm{e}^{tB})' = A\mathrm{e}^{tA}\mathrm{e}^{tB} + \mathrm{e}^{tA}B\mathrm{e}^{tB} = (A+B)U(t).$$

$U(t)$ řeší rovnici $U'(t) = (A+B)U(t)$, $U(0) = I$, ale $\overline{U}(t) = \mathrm{e}^{t(A+B)}$ řeší tu samou rovnici se stejnou počáteční podmínkou. Z jednoznačnosti řešení plyne, že $U(t) = \overline{U}(t)$, čímž dostáváme, co jsme chtěli. K důkazu třetího tvrzení položme $B = C^{-1}AC$. Pak $B^k = C^{-1}A^kC$. Tedy:

$$\mathrm{e}^{C^{-1}AC} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{k!}C^{-1}A^kC = C^{-1}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}A^k\right)C = C^{-1}\mathrm{e}^{A}C.$$

Pro důkaz posledního tvrzení využijeme faktu, že pro $B = -A$ dle druhého tvrzení platí, že $I = \mathrm{e}^{A-A} = \mathrm{e}^{A}\mathrm{e}^{-A}$, čímž je důkaz hotov. □

Nyní si ukážeme, jak počítat e^{At} prakticky. Každou matici můžeme zapsat ve tvaru $A = C^{-1}JC$, kde C je regulární matice a J je matice v Jordanově kanonickém tvaru:

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & J_2 & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & J_k \end{pmatrix},$$

kde J_i, $i \in \{1,\dots,k\}$ jsou Jordanovy buňky. Můžeme psát, že $\mathrm{e}^{At} = C^{-1}\mathrm{e}^{Jt}C$, kde:

$$\mathrm{e}^{Jt} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{J_1t} & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \mathrm{e}^{J_2t} & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \mathrm{e}^{J_kt} \end{pmatrix}.$$

Stačí uvažovat e^{J_1t}, kde $J_1 = \lambda I + L$ a:

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & 0 & 1 & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Dále $e^{J_1 t} = e^{\lambda I t} e^{Lt} = e^{\lambda t} I e^{Lt}$. Snadno z lineární algebry bychom dostali:

$$L^k = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 1 & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & 0 & 1 & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

kde je prvních k sloupců nulových. Je-li rozměr matice m, pak $L^m = 0$. Můžeme psát:

$$e^{Lt} = I + tL + \frac{t^2}{2} L^2 + \dots + \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} L^{m-1} = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \dots & \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} \\ \vdots & 1 & t & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & 1 & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix} := P(t).$$

Závěrem dostaneme:

$$e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & e^{\lambda_2 t} & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & e^{\lambda_k t} \end{pmatrix} P(t).$$

TODO

Důsledek. Důsledkem našeho povídání výše je následující: Nechť $a = \max\{\operatorname{Re}\lambda \colon \lambda \in \sigma(A)\}$, kde $\sigma(A)$ je spektrum matice A. Nechť dále m je velikost největší Jordanovy buňky příslušné vlastnímu číslu λ s $\operatorname{Re}\lambda = a$. Pak existuje $M > 0$ tak, že $\|e^{tA}\| \le M t^{m-1} e^{ta}$ $\forall t \ge 0$. Speciálně $\forall \tilde{a} > a$ existuje $\tilde{M} > 0$ tak, že $\|e^{tA}\| \le \tilde{M} e^{t\tilde{a}}$ $\forall t \ge 0$. Podobně pro $t \le 0$ máme, že existuje $M > 0$ tak, že $\|e^{tA}\| \le M|t|^{m-1} e^{\overline{a}t}$, kde $\overline{a} = \min\{\operatorname{Re}\lambda \colon \lambda \in \sigma(A)\}$ a $\overline{m}$ je velikost největší Jordanovy buňky příslušné k $\operatorname{Re}\lambda = \overline{a}$.

Definice 17.25.

$$\sigma^+(A) = \{\lambda \in \sigma(A) \colon \operatorname{Re}\lambda > 0\},$$
$$\sigma^-(A) = \{\lambda \in \sigma(A) \colon \operatorname{Re}\lambda < 0\},$$
$$\sigma^c(A) = \{\lambda \in \sigma(A) \colon \operatorname{Re}\lambda = 0\},$$
$$V^+ = \mathrm{LO}\{v \in \mathbb{R}^n \colon v \text{ je zobecněný vlastní vektor příslušná nějakému } \lambda \in \sigma^+(A)\},$$

(Nestabilní prostor)

$$V^- = \mathrm{LO}\{v \in \mathbb{R}^n \colon v \text{ je zobecněný vlastní vektor příslušný nějakému } \lambda \in \sigma^-(A)\},$$

(Stabilní prostor)

$$V^c = \mathrm{LO}\{v \in \mathbb{R}^n \colon v \text{ je zobecněný vlastní vektor příslušný nějakému } \lambda \in \sigma^c(A)\}.$$

(Centrální podprostor)

Věta 17.26. Platí:

1. (stabilní směry): existuje $c > 0$, $\alpha > 0$ tak, že $\forall x_0 \in X^-$ platí $|\mathrm{e}^{tA}x_0| \leq c\mathrm{e}^{-\alpha t}|x_0|$ $\forall t \geq 0$.

2. (nestabilní směry): existuje $c > 0$, $\beta > 0$ tak, že $\forall x_0 \in X^+$ platí $|\mathrm{e}^{tA}x_0| \geq c\mathrm{e}^{\beta t}|x_0|$ $\forall t \leq 0$.

3. (centralní směry): $\forall \varepsilon > 0$ existuje $c > 0$ tak, že $\forall x_0 \in X^c$ platí $|\mathrm{e}^{tA}x_0| \leq c\mathrm{e}^{\varepsilon|t|}$ $\forall t \in \mathbb{R}$.

Důkaz. Zde bude důkaz □

18 Stabilita řešení

Jednoduše řečeno stabilita znamená, že malá porucha počáteční podmínky se příliš nezvětší, nebo dokonce zmizí, pro $t \to \infty$.

Poznámka. Mějme $\overline{x}(t)$ řešení rovnice $x'(t) = f(x(t), t)$ a nechť $y(t)$ je jiné řešení této rovnice. Definujme $u(t) = y(t) - \overline{x}(t)$. Pak $u'(t) = y'(t) - \overline{x}'(t) = f(u(t) + \overline{x}(t), t) - f(\overline{x}(t), t) = g(u(t), t)$. To znamená, že hledání stability $\overline{x}$ je ekvivalentní hledání stability $u = 0$. Bez újmy na obecnosti tedy vždy studujeme stabilitu nulového řešení.

19 Teoretické příklady

Příklad. Dokažte, že platí:

$$||a| - |b|| \leq |a - b|.$$

Řešení. Z trojúhleníkové nerovnosti snadno dostaneme:

$$|a - b| \geq |a| - |b| \wedge |b - a| \geq |b| - |a|.$$

Tedy máme:

$$-|a - b| \leq |a| - |b| \leq |a - b|,$$

což je ekvivalentní dokazovanému tvrzení.

Příklad. Nechť M je neprázdná množina a $f\colon M \to \mathbb{R}$ a $g\colon M \to \mathbb{R}$ jsou funkce. Dokažte, že:

$$\sup(f + g)(M) \leq \sup(f(M)) + \sup(g(M)).$$

Řešení. Zřejmě platí:

$$\forall x \in M : f(x) \leq \sup(f(M)),$$
$$\forall x \in M : g(x) \leq \sup(g(M)).$$

Tedy:

$$\forall x \in M : f(x) + g(x) \leq \sup(f(M)) + \sup(g(M)).$$

Jelikož je supremum nejmenší horní závora, tak můžeme psát:

$$\sup(f(M) + g(M)) \leq \sup(f(M)) + \sup(g(M)).$$

Podobně platí následující nerovnost i pro infimum.

Příklad. Dokažte ekvivalenci následujících výroků:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : |a_n - A| < \varepsilon,$$
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : |a_n - A| < K\varepsilon,$$

kde $K > 0$.

Řešení. Začneme pravou implikací. Nechť $\lim_{n\to\infty} a_n = A$. Pak druhá nerovnost platí pro $K = 1$ z definice limity. Nyní přejděme k levé implikaci. Nechť $K \in \mathbb{R}$ a $K > 0$ splňuje druhou podmínku příkladu. Nechť $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{K}$. Dle druhé podmínky příkladu k tomuto ε' najdeme $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $\forall n \geq n_0$ platí $|a_n - A| < K\varepsilon' = \varepsilon$. Tím je důkaz hotov.

Příklad. Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení:

$$\exists \lim_{n\to\infty} a_n \Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} |a_n|,$$
$$\exists \lim_{n\to\infty} |a_n| \Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Řešení. První implikace platí. Dokážeme rovnou z definice limity. Nechť $\varepsilon > 0$. Pak existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $\forall n \geq n_0$ je $|a_n - A| < \varepsilon$. Využijeme nerovnosti z prvního příkladu a dostaneme:

$$||a_n| - |A|| \leq |a_n - A| < \varepsilon.$$

Implikace tedy platí. Druhá implikace ale neplatí. Můžeme snadno nalézt protipříklad. $\lim_{n\to\infty} |(-1)^n|$ existuje, ale $\lim_{n\to\infty}(-1)^n$ nikoliv.

Příklad. Dokažte následující tvrzení:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{A},$$

kde A je nezáporné.

Řešení. Snadno spočítáme:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} - \sqrt{A} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{a_n} - \sqrt{A})(\sqrt{a_n} + \sqrt{A})}{\sqrt{a_n} + \sqrt{A}} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n - A}{\sqrt{a_n} + \sqrt{A}} = 0,$$

protože jmenovatel je nezáporný a $a_n - A = 0$ pro $n \to \infty$. Tedy:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} - \sqrt{A} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{A}.$$

Příklad. Dokažte, že platí:

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) \leq \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n.$$

Řešení. Využijeme definice a napíšeme:

$$A_k = \sup\{a_n, n \geq k\} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} A_k = \limsup_{n\to\infty} a_n,$$
$$B_k = \sup\{b_n, n \geq k\} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} B_k = \limsup_{n\to\infty} b_n.$$

Dále zvolme C_k následovně:

$$C_k = \sup\{(a_n + b_n), n \geq k\} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} C_k = \limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n).$$

Zřejmě $\forall n \geq k$ platí:

$$a_n + b_n \leq A_k + B_k.$$

Tedy můžeme psát:

$$C_k = \sup\{(a_n + b_n), n \geq k\} \leq A_k + B_k.$$

Ze druhého příkladu víme, že toto platí. Tím je tedy důkaz hotov.

Příklad (Stolzova věta)**.** Dokažte: Nechť $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou posloupnosti, přičemž $\{b_n\}$ je ostře rostoucí nade všechny meze. Nechť dále existuje limita:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = A.$$

Potom také existuje $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = A$.

Řešení. Položme $a_0 = b_0 = 0$. Předpokládejme, že $A > -\infty$. Zvolme $\alpha < A, \alpha \in \mathbb{R}$. K němu nalezneme $k_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\forall k \geq k_0, k \in \mathbb{N}$ platí:

$$\frac{a_k - a_{k-1}}{b_k - b_{k-1}} > \alpha.$$

Nechť $n > k_0, n \in \mathbb{N}$. Poté platí:

$$\frac{a_n}{b_n} = \sum_{k=1}^{k_0} \frac{a_k - a_{k-1}}{b_n} + \sum_{k=k_0+1}^{n} \frac{a_k - a_{k-1}}{b_n}.$$

Pro sčítanec na pravé straně rovnosti můžeme použít následující odhad:

$$\sum_{k=k_0+1}^{n} \frac{a_k - a_{k-1}}{b_n} = \sum_{k=k_0+1}^{n} \frac{b_k - b_{k-1}}{b_n} \frac{a_k - a_{k-1}}{b_k - b_{k-1}} \geq \alpha \frac{b_n - b_{k_0}}{b_n}.$$

Toto platí, protože když si sumu rozepíšeme, zůstanou nám pouze členy b_n a $-b_{k_0}$. Podle věty o aritmetice limit a z předpokladu, že $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ dostaneme:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{k_0} \frac{a_k - a_{k-1}}{b_n} = 0.$$

Navíc také platí:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n - b_{k_0}}{b_n} = 1.$$

Tedy můžeme psát:

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \geq \alpha \geq A.$$

Tato rovnost platí pro všechna $A \in \mathbb{R}^*$, protože pro $A = -\infty$ je triviální. Anologicky bychom ukázali, že:

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \leq A.$$

Tedy platí:

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \liminf_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = A.$$

Tím je důkaz hotov.

Příklad. Dokažte, že platí:

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x\to a^+} f(x) = A \wedge \lim_{x\to a^-} f(x) = A.$$

Řešení. Postupně dokážeme pravou a levou implikaci:

1. Pravá implikace: Předpokládejme, že $\lim_{x\to a} f(x) = A \in \mathbb{R}^*$. Nechť $\varepsilon > 0$. Pak nalezneme $\delta > 0$ tak, že $\forall x \in P(a, \delta)$ platí:

$$f(x) \in B(A, \varepsilon).$$

Pak ale také $\forall x \in P_+(a,\delta)$ platí:

$$f(x) \in B(A,\varepsilon),$$

protože je zřejmé, že:

$$P_+(a,\delta) \subset P(a,\delta).$$

Obdobně dokážeme pro $P_-(a,\delta)$. Pravá implikace tedy platí.

2. Levá implikace: Předpokládejme, že $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = A \in \mathbb{R}^*$. Nechť $\varepsilon > 0$. Pak nalezneme $\delta_1 > 0$ takové, že $\forall x \in P_+(a,\delta_1)$ platí:

$$f(x) \in B(A,\varepsilon).$$

Obdobně nalezneme $\delta_2 > 0$ takové, že $\forall x \in P_-(a,\delta_2)$ platí:

$$f(x) \in B(A,\varepsilon).$$

Zvolme $\delta = \min\{\delta_1,\delta_2\}$. Poté platí:

$$P(a,\delta) \subset P_+(a,\delta_1) \cup P_-(a,\delta_2).$$

Tedy $\forall x \in P(a,\delta)$ platí:

$$f(x) \in B(A,\varepsilon).$$

Levá implikace tedy platí.

Tím je tvrzení dokázáno.

Příklad. Dokažte, že platí následující: Nechť máme posloupnosti $\{a_n\},\{b_n\}$, přičemž $\forall n$ platí, že $b_n > 0$. Dále pro $A \in \mathbb{R}^*, A > 0$ máme $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ a $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$. Navíc existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\forall n \geq n_0$ máme $b_n > 0$. Pak platí:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty.$$

Řešení. Předpokládejme nejprve, že $A \in \mathbb{R}, A > 0$. Zvolme $K \in \mathbb{R}$. Položme $\varepsilon = \frac{A}{2}$. K tomuto ε najdeme $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že $\forall n \geq n_1$ platí:

$$a_n > A - \varepsilon = \frac{A}{2}.$$

Položme $L = \max\{1, K\}$. Pak existuje $n_2 \in \mathbb{N}$ takové, že $\forall n \geq n_2$ platí:

$$b_n < \frac{A}{2L}.$$

Poté $\forall n \geq \max\{n_0, n_1, n_2\}$ platí:

$$\frac{a_n}{b_n} > \frac{\frac{A}{2}}{\frac{A}{2L}} = L \geq K,$$

což jsme chtěli dokázat.

Definice 19.1. Limes superior pro funkce je definován následovně:

$$\limsup_{x\to a} f(x) = \lim_{\delta\to 0} \sup f(P(a,\delta)).$$

Analogicky limes inferior pro funkce je:

$$\liminf_{x\to a} f(x) = \lim_{\delta\to 0} \inf f(P(a,\delta)).$$

Příklad. Dokažte, že platí:

$$\limsup_{x\to a}(f(x)+g(x)) \le \limsup_{x\to a} f(x) + \limsup_{x\to a} g(x).$$

Řešení. Označme $b_1 = \limsup_{x\to a} f(x)$ a $b_2 = \limsup_{x\to a} g(x)$. Nechť $b' \in \mathbb{R}$ je libovolné číslo větší než $b_1 + b_2$. Nalezneme čísla b'_1 a b'_2 taková, že $b_1 < b'_1$, $b_2 < b'_2$ a $b'_1 + b'_2 < b'$. Z definice nalezneme $\delta_1, \delta_2 > 0$ tak, že:

$$\begin{aligned} \sup f(P(a,\delta_1)) &< b'_1 \\ \sup g(P(a,\delta_2)) &< b'_2. \end{aligned}$$

Položme $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Pak z příkladu 2 můžeme psát:

$$\begin{aligned} \sup(f+g)(P(a,\delta)) &\le \sup f(P(a,\delta)) + \sup g(P(a,\delta)) \\ &\le \sup f(P(a,\delta_1)) + \sup g(P(a,\delta_2)) \\ &< b'_1 + b'_2 < b'. \end{aligned}$$

Tedy jistě platí:

$$\limsup_{x\to a}(f(x)+g(x)) = \lim_{\delta\to 0} \sup(f+g)(P(a,\delta)) < b'.$$

Nakonec můžeme psát:

$$\limsup_{x\to a}(f(x)+g(x)) \le b_1 + b_2.$$

Tvrzení tedy platí.

Příklad. Dokažte, že platí:

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \Leftrightarrow \limsup_{x\to a} f(x) = A \wedge \liminf_{x\to a} f(x) = A.$$

Řešení. Dokážeme nejprve pravou implikaci. Nechť $\lim_{x\to a} f(x) = A$. Označíme-li si $\limsup_{x\to a} f(x) = C$ a $\liminf_{x\to a} f(x) = D$, pak pro $a < b$ a $\delta > 0$ platí:

$$\inf f(P(a,\delta)) \le C < D \le \sup f(P(a,\delta)).$$

Nechť $C', D' \in \mathbb{R}$ a $C < C' < D' < D$. Dále nechť $\varepsilon > 0$ tak, že množina $B(A,\varepsilon)$ neprotíná alespoň jeden z intervalů $(-\infty, C')$ a (D', ∞). Z definice limity najdeme $\delta > 0$ tak, že $f(P(a,\delta)) \subset B(A,\varepsilon)$. Jenže pro toto δ dostaneme:

$$f(P(a,\delta)) \cap (-\infty, C') \cap (D', \infty) \subset B(A,\varepsilon) \cap (-\infty, C') \cap (D', \infty) = \varnothing.$$

Z tohoto sporu dostáváme, že $C = D$. Pro opačnou implikaci uvažujeme jednak rovnost $\limsup_{x\to a} f(x) = \liminf_{x\to a} f(x) = A$ a také budeme muset zvážit několik případů. Pro $A = +\infty$. Pak pro $\varepsilon > 0$ najdeme $\delta > 0$ tak, že $\inf f(P(a,\delta)) > \frac{1}{\varepsilon}$. Tedy:

$$f(P(a,\delta)) \subset B(A,\varepsilon).$$

Tím pádem $\lim_{x\to a} f(x) = A$. Důkaz by byl analogický pro $A = -\infty$. Pro $A \in \mathbb{R}$ zvolme $\varepsilon > 0$ a k němu $\delta_1, \delta_2 > 0$ tak, že platí:

$$\begin{aligned} A - \varepsilon &< \inf f(P(a,\delta_1)), \\ A + \varepsilon &> \sup f(P(a,\delta_2)). \end{aligned}$$

Položme $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Pak:

$$A - \varepsilon < \inf f(P(a,\delta)) \leq \sup f(P(a,\delta)) < A + \varepsilon.$$

Tedy:

$$f(P(a,\delta)) \subset B(A,\varepsilon) \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x) = A.$$

Tím je důkaz hotov.

Příklad. Nechť $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je monotónní funkce. Dokažte, že množina:

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid f \text{ není spojitá v bodě } x\}.$$

je spočetná.

Řešení. Bez újmy na obecnosti budeme předpokládat, že je f neklesající. Víme, že monotónní funkce má v každém bodě $x \in \mathbb{R}$ limitu zleva a zprava. Zřejmě $\forall x \in \mathbb{R}$ platí:

$$\lim_{y\to x^-} f(y) \leq f(x) \leq \lim_{y\to x^+} f(y).$$

Tedy můžeme psát:

$$D = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \lim_{y\to x^-} f(y) < \lim_{y\to x^+} f(y) \right\}.$$

Nyní $\forall x \in D$ označíme $a_x = \lim_{y\to x^-} f(y)$ a $b_x = \lim_{y\to x^+} f(y)$. Nechť $x, y \in D$ a $x < y$. Pak platí:

$$a_x < b_x \leq a_y < b_y.$$

Tím pádem je systém otevřených intervalů

$$\{(a_x, b_x),\ x \in D\}$$

disjunktní, a tedy spočetný. Tedy je i množina D spočetná a důkaz je hotov.

Definice 19.2. Řekneme, že funkce f má v bodě x odstranitelnou nespojitost, jestliže existuje vlastní limita funkce f v bodě x. Pokud taková limita neexistuje, pak říkáme, že f má v bodě x neodstranitelnou nespojitost. Existují-li vlastní jednostranné limity v bodě x, pak má f v x neodstranitelnou nespojitost prvního druhu. Pokud je jedna nebo obě z limit nevlastní, nebo jedna z nich, popřípadě obě neexistují, jedná se o neodstranitelnou nespojitost druhého druhu.

Příklad. Dokažte, že množina $\{x \in \mathbb{R} \mid f \text{ má v } x \text{ odstranitelnou nespojitost}\}$ je spočetná.

Řešení. Stačí dokázat, že množiny

$$M = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \lim_{y \to x} f(y) < f(x) \right\},$$
$$N = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \lim_{y \to x} f(y) > f(x) \right\}$$

jsou spočetné. Dokážeme pouze pro množinu M, pro množinu N je důkaz analogický. Nyní $\forall x \in M$ najdeme $r_x \in \mathbb{Q}$ tak, že platí:

$$\lim_{y \to x} f(y) < r_x < f(x).$$

Pak množina $M = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} M_r$, kde $M_r = \{x \in M,\ r_x = r\}$, je sjednocením spočetně mnoha množin, a tedy stačí dokázat, že M_r je spučetná množina. Nechť tedy $r \in \mathbb{Q}$ je pevné a $\forall x \in M_r$ zvolme $\delta_x > 0$ tak, že $\forall y \in P(y, \delta_x)$ platí $f(y) < r$. Systém intervalů $\mathcal{J} = \left\{ \left(x - \frac{1}{2}\delta_x, x + \frac{1}{2}\delta_x \right),\ x \in M_r \right\}$ je disjunktní. Vezmeme-li totiž $x, y \in M_r, x \neq y$ a $\left(x - \frac{1}{2}\delta_x, x + \frac{1}{2}\delta_x \right) \cap \left(y - \frac{1}{2}\delta_y, y + \frac{1}{2}\delta_y \right) \neq \varnothing$, kde $\delta_x \leq \delta_y$, tak pak platí:

$$|x - y| < \frac{1}{2}\delta_x + \frac{1}{2}\delta_y \leq \delta_y.$$

Tedy $f(x) < r$ díky δ_y a $f(x) > r_x = r$, což je spor. Systém intervalů J je tedy spočetný, a proto i množina M_r je spočetná.

Příklad (Zlomkové kritérium)**.** Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou řady s kladnými členy a nechť od jistého $n_0 \in \mathbb{N}$ pro $n \geq n_0$ platí:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}.$$

Pak pokud $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, tak i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. Naopak pokud $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje, tak i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverguje. Dokažte.

Řešení. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že pro $\forall n \geq 1$ platí rovnost nahoře. Potom:

$$a_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_2}{a_1} a_1 \leq \frac{b_n}{b_{n-1}} \frac{b_{n-1}}{b_{n-2}} \cdots \frac{b_2}{b_1} b_1 = b_n \frac{a_1}{b_1}.$$

Z toho dostáváme, že $a_n \leq C b_n$, kde C je kladné reálné číslo. Použijeme srovnávací kritérium pro konvergenci řad a důkaz bude hotov.

Příklad (Raabeho kritérium)**.** Dokažte: Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ má kladné členy. Pak platí:

1. Jestliže $\limsup_{n \to \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) > 1$, pak je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní.

2. Jesltliže existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$ platí $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \leq 1$, pak je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentní.
3. Jestliže $\limsup_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) < 1$, pak je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentní.

Řešení. Dokážeme postupně jednotlivá tvrzení:

1. Nalezneme $q \in (0, \infty)$ a $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, aby $\forall n \geq n_0$ platí:
$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \geq q.$$
Tedy:
$$na_n - (n+1)a_{n+1} \geq (q-1)a_{n+1}.$$
Pak $\forall n > n_0$ platí:
$$n_0 a_{n_0} > n_0 a_{n_0} - n a_n = \sum_{k=n_0}^{n-1} (ka_k - (k+1)a_{k+1}) \geq (q-1) \sum_{k=n_0}^{n-1} a_{k+1}.$$
Dostáváme:
$$\sum_{k=n_0+1}^{n} a_k = \sum_{k=n_0}^{n-1} a_{k+1} \leq \frac{n_0 a_{n_0}}{q-1}.$$
Posloupnost částečných součtů je tedy omezená, a tedy řada konverguje.
2. Existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $\forall n \geq n_0$ platí:
$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \leq 1 + \frac{1}{n} = \frac{n+1}{n}.$$
Tedy:
$$a_{n+1} \geq \frac{n}{n+1} a_n \geq \frac{n}{n+1} \frac{n-1}{n} a_{n-1} = \frac{n-1}{n+1} a_{n-1} \geq \cdots \geq \frac{n_0}{n+1} a_{n_0}.$$
Řada $\sum_{k=n_0}^{\infty} \frac{n_0}{k+1} a_{n_0}$ je divergentní, a tím pádem ze srovnávacího kritéria dostáváme, že i řada $\sum_{k=n_0+1}^{\infty} a_{k+1}$ je divergentní. Diverguje tedy i řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.
3. Tvrzení plyne z dokázaného druhého tvrzení.

Tím je důkaz hotov.

Definice 19.3. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel. $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ nazýváme nekonečným součinem. Pokud existuje $\lim_{m\to\infty} \prod_{n=1}^{m} a_n$, pak $\prod_{n=1}^{\infty}$ označuje také její hodnotu. Je-li tato hodnota reálné nenulové číslo, pak říkáme, že nekonečný součin konverguje.

Příklad. Dokažte, že dostačující, nikoliv však nutná, podmínka konvergence nekonečného součinu je $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$.

Řešení. Označme:

$$\lim_{m\to\infty}\prod_{n=1}^{m} a_n = s.$$

Nechť $s_n = a_1a_2\dots a_n$, a tedy $\lim_{n\to\infty} s_n = s$. Pak $a_n = \frac{s_n}{s_{n-1}}$. Tedy platí:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{s_n}{s_{n-1}} = \frac{s}{s} = 1.$$

Tvrzení je tímto dokázáno.

Příklad. Dokažte, že $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ konveruje právě tehdy, když $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(a_n)$ koverguje.

Řešení. Nejprve předpokládejme, že nekonečný součin konverguje. Označme:

$$\lim_{m\to\infty}\prod_{n=1}^{m} a_n = s.$$

Dále nechť $s_n = a_1a_2\dots a_n$ a $\lim_{n\to\infty} s_n = s$. Označme S_n jako částečný součet řady. Pak:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(\ln(a_1)+\ln(a_2)+\dots+\ln(a_n)) = \lim_{n\to\infty}\ln(a_1a_2\dots a_n) = \lim_{n\to\infty}\ln(s_n) = \ln(s).$$

Řada tedy konverguje. Opačná implikace je zcela analogická.

Příklad. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost s kladnými členy. Pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje právě tehdy, když $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ konverguje.

Řešení. Začneme levou implikací. Posloupnost $\{\prod_{n=1}^{k} a_n\}_{k=1}^{\infty}$ je rostoucí a $\forall k\in\mathbb{N}$ platí:

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n) \ge \prod_{n=1}^{k}(1+a_n) \ge 1+\sum_{n=1}^{k} a_n \ge \sum_{n=1}^{k} a_n.$$

Řada tedy jistě konverguje. Pro opačnou implikaci si opět uvědomme, že posloupnost $\{\prod_{n=1}^{k} a_n\}_{k=1}^{\infty}$ je rostoucí, a proto má limitu. Využijeme nerovnosti $\ln(1+x)\le x$, a tedy $\forall x\in(0,\infty)$ platí:

$$\ln\left(\prod_{n=1}^{k}(1+a_n)\right) = \sum_{n=1}^{k}\ln(1+a_n) \le \sum_{n=1}^{k} a_n \le \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Z toho pak dostaneme:

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n) \le \mathrm{e}^{\sum_{n=1}^{\infty} a_n},$$

kde řada konverguje, a tedy i součin konverguje.

Definice 19.4. Nechť $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Oscilací funkce f na množině $M\subset\mathbb{R}$ rozumíme:

$$\operatorname{osc}(f,M) = \sup f(M) - \inf f(M).$$

Oscilací funkce f v bodě $x_0\in\mathbb{R}$ rozumíme:

$$\operatorname{osc}(f,x_0) = \lim_{\delta\to 0^+}\operatorname{osc}(f,B(x_0,\delta)).$$

Příklad. Zformulujte a dokažte ekvivalentní tvrzení na základě pojmu oscilace pro BC podmínku pro posloupnosti.

Řešení. Ekvivalentní tvrzení BC podmínce je:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \colon \ \operatorname{osc}(\{a_n\}_{n=n_0}^{\infty}) < \varepsilon.$$

Dokážeme nejprve, že z BC podmínky plyne tvrzení výše. Označme $\lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}$. Nechť $\varepsilon > 0$ a nechť exsituje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $\forall n \geq n_0$ platí:

$$|a_n - A| < \varepsilon.$$

Pak jistě také platí:

$$A - \varepsilon < A < A + \varepsilon \Rightarrow \inf(\{a_n\}_{n=n_0}^{\infty}) \geq A - \varepsilon \ \wedge \ \sup(\{a_n\}_{n=n_0}^{\infty}) \leq A + \varepsilon.$$

Tím pádem:

$$\operatorname{osc}(\{a_n\}_{n=n_0}^{\infty}) = \sup(\{a_n\}_{n=n_0}^{\infty}) - \inf(\{a_n\}_{n=n_0}^{\infty}) \leq 2\varepsilon.$$

Nyní zbývá dokázat opačnou implikaci. Nyní předpokládáme, že $\forall \varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $\operatorname{osc}(\{a_n\}_{n=n_0}^{\infty}) < \varepsilon$. Nechť $\varepsilon > 0$. Pak $\forall m, n \geq n_0$ platí:

$$\inf(\{a_n\}_{n=n_0}^{\infty}) \leq a_m \leq \sup(\{a_n\}_{n=n_0}^{\infty}),$$
$$\inf(\{a_n\}_{n=n_0}^{\infty}) \leq a_n \leq \sup(\{a_n\}_{n=n_0}^{\infty}).$$

Pak:

$$|a_m - a_n| \leq \sup(\{a_n\}_{n=n_0}^{\infty}) - \inf(\{a_n\}_{n=n_0}^{\infty}) < \varepsilon.$$

BC podmínka tedy platí. Důkaz je tímto hotov.

Příklad. Dokažte: Předpokládejme, že $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ je omezená a na $[a, r]$ Riemannovsky integrovatelná pro $a < r < b$. Pak $f \in \mathcal{R}[a, b]$ a platí:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{r\to b^-} \int_a^r f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Zřejmě existuje takové $M > 0$, že $f \leq |M|$ na $[a, b]$. Pro $\varepsilon = 0$ zvolme $r = b - \frac{\varepsilon}{4M}$. $f \in \mathcal{R}[a, r]$, a tedy jsme schopni najít dělení D tak, že platí:

$$S(f, D) - s(f, D) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Označme $D_1 = D \cup \{b\}$, což je dělení $[a, b]$, kde poslední interval je $[r, b]$. f je omezená, a tedy jistě:

$$\sup_{[r,b]} f - \inf_{[r,b]} f \leq |2M|.$$

Pak platí:

$$S(f, D_1) - s(f, D_1) = S(f, D) - s(f, D) + (\sup_{[r,b]} f - \inf_{[r,b]} f)(b - r) < \frac{\varepsilon}{2} + 2M(b - r) = \varepsilon.$$

Funkce f je tedy na $[a, b]$ Riemannovsky integrovatelná. Důsledkem tohoto tvrzení a linearity integrálu je, že omezená funkce na $[a, b]$ s konečně mnoha nespojitostmi je Riemannovsky integrovatelná.

Příklad. Dokažte: Mějme f spojitou a nezápornou na (a, ∞). Nechť $\lim_{x\to\infty} f(x) = A > 0$. Pak $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = +\infty$.

Řešení. Najdeme $x_0 \in (a, \infty)$ tak, že $\forall x \geq x_0$ platí, že $0 < \frac{A}{2} \leq f(x)$. Pak:

$$\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_{x_0}^\infty \frac{A}{2}\,\mathrm{d}x = +\infty.$$

Tím jsme toto tvrzení dokázali.

Příklad. Nechť $f \in \mathcal{N}(0,1)$ a f je nezáporná. Pak $\forall k \in \mathbb{N}$ platí, že i $x^k f \in \mathcal{N}(a,b)$.

Řešení. Snadno dostaneme, že $\forall x \in (0,1)$ platí:

$$|x^k f(x)| \leq 1|f(x)|.$$

Ze srovnávacího kritéria tedy máme, že $x^k f \in \mathcal{N}(a,b)$.

Příklad. Nechť f je spojitá funkce na otevřeném intervalu (a,b). Ukažte, že f je stejnoměrně spojitá právě tehdy, když existují vlastní limity v krajních bodech intervalu (a,b).

Řešení. Pokud má f vlastní limity v krajních bodech intervalu (a,b), tak definujme $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ následovně:

$$F(x) = \begin{cases} \lim_{y\to a^+} f(y), & x = a, \\ f(x), & x \in (a,b), \\ \lim_{y\to b^-} f(y), & x = b. \end{cases}$$

F je na $[a,b]$ jistě stejnoměrně spojitá, takže i f je stejnoměrně spojitá na (a,b). Naopak, pokud f je stejnoměrně spojitá na (a,b), tak v obou krajních bodech splňuje BC podmínku pro funkce. Ze stejnoměrné spojitosti pak pro $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že platí:

$$\forall x, y \in I\colon |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Pro $x, y \in P_+(a, \delta)$ máme $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ a BC podmínka je splněna. Limity jsou tedy vlastní.

Příklad. Definujme ϱ na $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ předpisem:

$$\varrho(x,y) = |x - y|,$$

kde $x, y \in \mathbb{R}$. Dokažte, že dvojice $(\mathbb{R}, \varrho)$ tvoří metrický prostor.

Řešení. První dvě podmínky vidíme okamžitě. Třetí také snadno ověříme. Nechť $x, y, z \in \mathbb{R}$. Pak:

$$\varrho(x,z) = |x - z| \leq |x - y| + |y - z| = \varrho(x,y) + \varrho(y,z).$$

Dvojice $(\mathbb{R}, \varrho)$ tedy tvoří metrický prostor.

Příklad. Nechť K_1 a K_2 jsou kompaktní prostory. Dokažte, že $K_1 \cap K_2$ a $K_1 cup K_2$ jsou kompaktní prostory.

Řešení. $K_1 \cap K_2$ je uzavřená, neboť K_1 i K_2 jsou uzavřené, protože jsou kopaktní. Dále $K_1 \cap K_2$ je uzavřená v K_1. Uzavřená podmnožina kompaktu je opět kompakt. Najdeme posloupnost x_n v $K_1 \cup K_2$. Jsme schopni najít podposloupnost x_{n_k} buďto v K_1 nebo K_2. Tedy $K_1 \cup K_2$ je kompaktní.

Příklad. Vyřešte následující příklady:

1. Sestrojte funkci $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, která je parciálně spojitá, ale není spojitá. Parciální spojitost znamená, že $\forall x_0 \in \mathbb{R}$ je $g(y) = f(x_0, y)$ spojitá a $\forall y_0 \in \mathbb{R}$ je $h(x) = f(x, y_0)$ spojitá.
2. Sestrojte funkci $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, která má v $[0, 0]$ derivaci ve všech směrech, ale není v $[0, 0]$ spojitá.
3. Sestrojte spojitou funkci $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, která má v $[0, 0]$ derivaci ve všech směrech, ale neexistuje $Df([0, 0])$.

Řešení. Řešení může vypadat takto:

1.
$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}, & [x, y] \neq [0, 0], \\ 0, & [x, y] = [0, 0]. \end{cases}$$

20 Početní příklady

Příklad. Spočtěte:
$$y' = x^2 y.$$

Řešení. Všimneme si, že $y \equiv 0$ je řešení na $\mathbb{R}$. Dále:
$$\ln|y| = \int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = \int x^2\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} + c.$$

Z toho dostáváme:
$$y(x) = \pm \mathrm{e}^{\frac{x^3}{3}}\mathrm{e}^c = \tilde{c}\mathrm{e}^{\frac{x^3}{3}},$$
kde $\tilde{c} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Toto řešení nelze slepit s $y \equiv 0$, ale můžeme řešení napsat takto:
$$y(x) = K\mathrm{e}^{\frac{x^3}{3}}, K \in \mathbb{R}.$$

Příklad. Spočtěte:
$$y' = \sqrt{1 - y^2}.$$
Všimněme si, že $y \equiv \pm 1$ řeší rovnici na $\mathbb{R}$. Dále:
$$\arcsin y = \int \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1-y^2}} = \int \mathrm{d}x = x + c,$$
kde $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ a $y \in (-1, 1)$. Tedy:
$$y(x) = \sin(x + c)$$
je řešení na $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Řešení lze splepit, a to následovně:
$$y(x) = \begin{cases} -1, & x \in \left(-\infty, -\frac{\pi}{2} - c\right], \\ \sin(x+c), & x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \\ 1, & x \in \left[\frac{\pi}{2} - c, \infty\right). \end{cases}$$

Příklad. Spočtěte:
$$y' = xy + x.$$
Označme $a(x) = x$ a $b(x) = x$. Pak:
$$A(x) = \int a(x)\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}.$$

Dostáváme řešení homogenní rovnice ve tvaru:
$$y_0(x) = K\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}.$$

Nyní hledáme partikulární řešení tvaru $y_p(x) = K(x)\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}$. Víme, že $K'(x) = \mathrm{e}^{-A(x)}b(x)$. Tedy:

$$K(x) = \int x\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}} = -\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}.$$

Partikulární řešení tedy vypadá takto:

$$y_p(x) = -\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}} = -1.$$

Obecné řešení na $\mathbb{R}$ pak vypadá takto:

$$y(x) = -1 + K\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}, K \in \mathbb{R}.$$