

Jméno:

1	2	3	4	Σ

Zkoušková písemka z Matematické analýzy I
10. 9. 2026

Čas: 90 minut.

- *Podepište všechny papíry, které chcete odevzdat. Nemusíte odevzdávat papíry s pomocnými výpočty.*
 - *Můžete psát i na papír se zadáním. Papír se zadáním je nutno podepsat a odevzdat, i když jste na něj nic nenapsali.*
 - *Během písemné části zkoušky nemůžete odcházet ze zkouškové místnosti. Můžete ovšem písemnou část ukončit před časovým limitem.*
 - *Nejsou povoleny kalkulačky, hodinky či jiná elektronika, ani přinesené písemné materiály.*
 - *Své odpovědi musíte zdůvodnit.*
 - *Je-li výsledkem aritmetický výraz, jako třeba $(x - 5)^2 + 10x + \binom{6}{2} - 3$, nemusíte ho zjednodušovat.*
 - *Tvrzení z přednášky můžete používat bez důkazů, pokud není uvedeno jinak. Musíte však uvést, které tvrzení používáte.*
-

1. Uvažujme funkci $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definovanou následujícím předpisem:

$$f(x) = \begin{cases} \exp(x) & \text{pro } x \geq 0 \\ \frac{1 - \exp(-x)}{x} & \text{pro } x < 0. \end{cases}$$

- (a) [3 b.] Je f spojitá v bodě $x = 0$?
- (b) [3 b.] Spočítejte limity funkce f pro $x \rightarrow +\infty$ a pro $x \rightarrow -\infty$.
- (c) [4 b.] Určete, zda má f v bodě $x = 0$ derivaci, případně zda tam má jednostranné derivace. Rozhodněte dále, zda má f v tomto bodě lokální extrém.

2. (a) [3 b.] Definujte formálně, co to znamená, že posloupnost reálných čísel $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je *omezená*.
- (b) [4 b.] Rozhodněte, zda je pravdivé následující tvrzení:

Jestliže $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel, jejíž jediné dva hromadné body jsou $+\infty$ a $-\infty$, pak žádná podposloupnost posloupnosti (a_n) není omezená.

Pokud je tvrzení pravdivé, dokažte ho, a pokud není, tak najděte protipříklad.

- (c) [3 b.] Spočítejte limitu posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ definované vztahem

$$a_n = \frac{\ln(n^2 + 1)}{2n + (-1)^n}.$$

3. (a) [3 b.] Napište, jak je definována *derivace* funkce f v bodě $A \in \mathbb{R}$.
- (b) [3 b.] Zformulujte Lagrangeovu větu o střední hodnotě. Nemusíte ji dokazovat.
- (c) [4 b.] Nechť f a g jsou dvě funkce spojitě na intervalu $I = [0, 1]$, které jsou obě diferencovatelné v každém vnitřním bodě I . Předpokládejme, že $f(0) = g(0)$ a $f(1) = g(1)$. Dokažte, že existuje bod $A \in (0, 1)$ splňující $f'(A) = g'(A)$.
4. (a) [3 b.] Napište, jak je definována horní a dolní Riemannova suma a jak je definován horní a dolní Riemannův integrál.
- (b) [3 b.] Zformulujte tvrzení popisující metodu počítání primitivní funkce pomocí substituce. Znáte-li více verzí tohoto tvrzení, zformulujte kteroukoliv z nich. Nemusíte to tvrzení dokazovat.
- (c) [4 b.] Uvažujme rotační těleso, které vznikne otáčením oblasti pod grafem funkce $f(x) = \frac{\exp(1/x)}{x}$ na intervalu $[1, 3]$ kolem osy x . Spočítejte objem tohoto tělesa.