

MATEMATICKÁ ANALÝZA 3, ZIMNÍ SEMESTR 2025–2026
ZADÁNÍ PÍSEMNÉ ČÁSTI ZKOUŠKY - VARIANTA C

LUBOŠ PICK

Příklad C1. Nalezněte všechna maximální řešení diferenciální rovnice

$$y' = \frac{(1+y^2)(\operatorname{arctg} y)^2}{\sqrt{1-x^2}}, \quad y \geq 0,$$

určete jejich definiční obory a načrtněte jejich grafy. Poté nalezněte maximální řešení uvedené diferenciální rovnice, které splňuje podmínku $y(0) = \sqrt{3}$ a určete jeho definiční obor. **(10 bodů)**

Příklad C2. Uvažujte soustavu diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned}x' &= y + e^{3t} \\ y' &= 6x + y + e^{3t}\end{aligned}$$

pro diferencovatelné funkce x, y proměnné t .

- (a) Nalezněte všechna maximální řešení uvedené soustavy.
- (b) Určete množinu všech $[x_0, y_0] \in \mathbb{R}^2$, pro která platí: tvoří-li dvojice funkcí x, y maximální řešení uvedené soustavy, vyhovující podmínce $x(0) = x_0, y(0) = y_0$, potom jsou funkce $x(t)$ a $y(t)$ omezené na intervalu $t \in (-\infty, 0]$.

(10 bodů)

Příklad C3. Dokažte, že vztahy

$$\begin{aligned}u &= 2 \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) - \cos(\pi xy) \\ v &= e^{x-y} - 2x^2y\end{aligned}$$

definují na okolí bodu $[u, v] = \left[\frac{\pi}{2} + 1, -1\right]$ diferencovatelné funkce x, y proměnných u, v takové, že $x\left(\frac{\pi}{2} + 1, -1\right) = 1$ a $y\left(\frac{\pi}{2} + 1, -1\right) = 1$. Je-li $z(x, y) = \log(x^2 + y^2)$, spočtete $\frac{\partial z}{\partial u}\left(\frac{\pi}{2} + 1, -1\right)$. **(10 bodů)**

Příklad C4. Najděte všechny globální extrémy funkce

$$f(x, y) = x^3 - y^2 + 1$$

na množině $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2, 4x^2 + y^2 \leq 4\}$. Zdůvodněte existenci globálních extrémů. **(10 bodů)**

Příklad C5. Necht' $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ je lineární zobrazení a $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení (tedy buď je dokažte, nebo sestrojte protipříklad):

- (a) f má v bodě $[0, 0]$ všechny parciální derivace $\Rightarrow f \circ F$ má v bodě $[0, 0]$ všechny parciální derivace.
- (b) f má v bodě $[0, 0]$ totální diferenciál $\Rightarrow f \circ F$ má v bodě $[0, 0]$ totální diferenciál.

(10 bodů)

C1 Najděte všechna max. řešená dif. rovnice

$$y' = \frac{(1+y^2)(\operatorname{arctg} y)^2}{\sqrt{1-x^2}}, \quad y \geq 0,$$

určete jejich definiční obory a načrtněte jejich grafy. Poté najděte max. řešená uvedené rovnice splňující $y(0) = \sqrt{3}$ a ukažte jeho def. obor.

Řešení. Položme $g(y) = (1+y^2)(\operatorname{arctg} y)^2$, $y \in \mathbb{R}$,
 $h(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1,1)$,

potom $y' = g(y)h(x)$, g, h spajite!

Jest $D(h) = (-1,1)$, jediný max. ot. interval obsažený v $D(h)$ je $I = (-1,1)$.

Jediným singulárním řešením je $y=0$, $x \in I$.

Platí $D(g) = \mathbb{R}$. Maximální ot. intervaly obsažené v $D(g)$, na nichž je g nenulová, jsou $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$. Ze zadání uvolny plyne, že nás zajímá pouze $J = (0, \infty)$.

Hledáme tedy řešení definovaná někde v I s hodnotami v J .
 Taková řešení y splňují

$$\frac{y'(x)}{(1+y^2) \cdot \operatorname{arctg}^2(y)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

a tedy po integraci vzhledem k x

$$-\frac{1}{\operatorname{arctg} y} \stackrel{c}{=} \operatorname{arcsin} x,$$

tedy řešení y_c závislé na $c \in \mathbb{R}$ splňuje

$$-\frac{1}{\operatorname{arctg} y_c(x)} = \operatorname{arcsin} x + C \quad \text{pro } x \in I_c,$$

kde I_c je max. ot. interval obsažený v množině

$$A_c = \{x \in (-1,1) : \operatorname{arcsin} x + C \in G((0,\infty))\},$$

kde

$$G(y) = \int \frac{dy}{g(y)} = -\frac{1}{\operatorname{arctg} y}.$$

Protože $\arcsin(0, \infty) = (0, \frac{\pi}{2})$, je $G(0, \infty) = (-\infty, -\frac{2}{\pi})$, a tedy

$$A_c = \{ x \in (-1, 1) : \arcsin x + C < -\frac{2}{\pi} \}$$

$$= \{ x \in (-1, 1) : \arcsin x < -C - \frac{2}{\pi} \}.$$

Jestliže $-C - \frac{2}{\pi} \leq -\frac{\pi}{2}$, tedy $C \in [\frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi}, \infty)$, potom $I_c = \emptyset$.

Jestliže $-C - \frac{2}{\pi} \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, tedy $C \in (-\frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi}, \frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi})$, potom

$$I_c = (-1, \sin(-C - \frac{2}{\pi})).$$

Jestliže $-C - \frac{2}{\pi} \in [\frac{\pi}{2}, \infty)$, tedy $C \in (-\infty, -\frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi}]$, potom $I_c = (-1, 1)$.

Tedy pro $C \in (-\infty, \frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi})$ je

$$y_c(x) = \operatorname{tg} \left(\frac{-1}{\arcsin x + C} \right), \quad x \in I_c,$$

kde

$$I_c = \begin{cases} (-1, 1), & \text{pokud } C \in (-\infty, -\frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi}] \\ (-1, \sin(-C - \frac{2}{\pi})), & \text{pokud } C \in (-\frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi}, \frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi}). \end{cases}$$

Spočteme limity řešení y_c v krajních bodech I_c :

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} y_c(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \operatorname{tg} \left(\frac{-1}{\arcsin x + C} \right) = \operatorname{tg} \left(\frac{-1}{-\frac{\pi}{2} + C} \right),$$

jestliže $C \in (-\infty, -\frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi}]$, pak

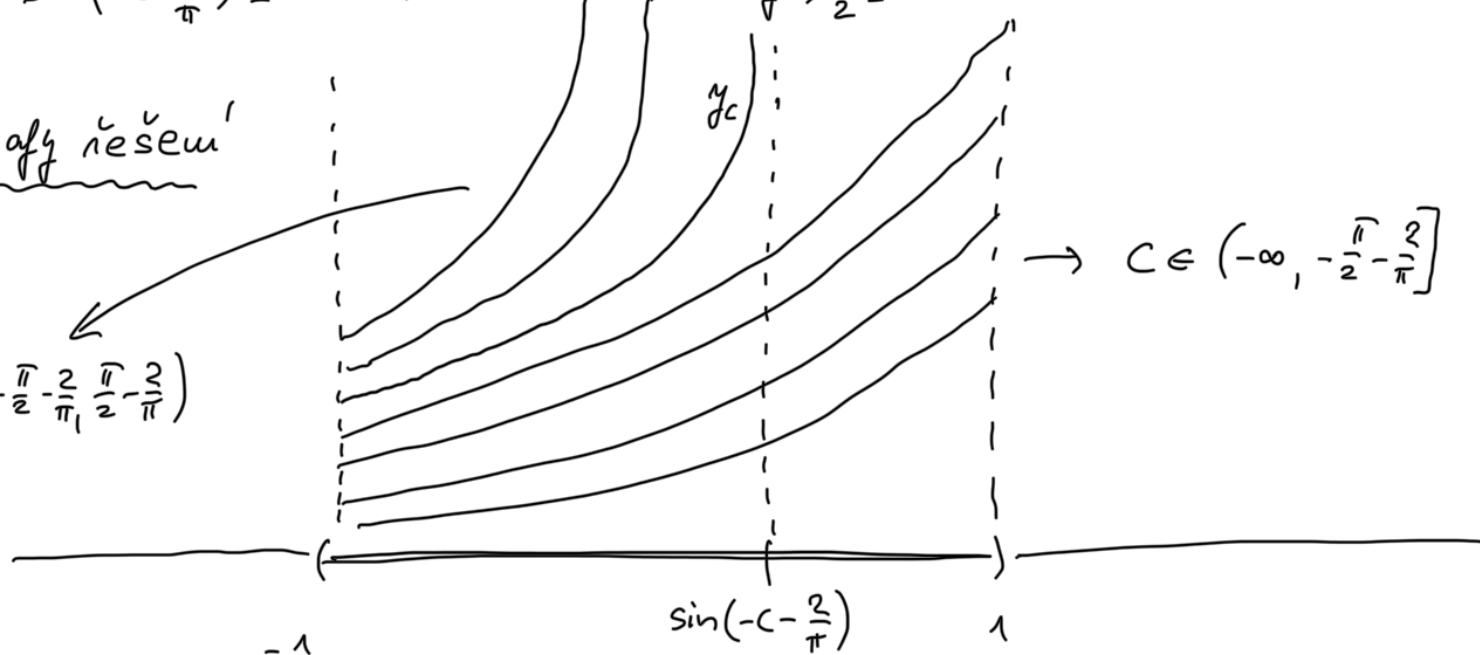
$$\lim_{x \rightarrow 1^-} y_c(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \operatorname{tg} \left(\frac{-1}{\arcsin x + C} \right) = \operatorname{tg} \left(\frac{-1}{\frac{\pi}{2} + C} \right),$$

a jestliže $C \in (-\frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi}, \frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi})$, pak

$$\lim_{x \rightarrow \sin(-C - \frac{2}{\pi})^-} \operatorname{tg} \left(\frac{-1}{\arcsin x + C} \right) = \lim_{y \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \operatorname{tg} y = \infty$$

grafy řešení

$$C \in (-\frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi}, \frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi})$$



partikulární řešení splývající počáteční podmínkou $y(0) = \sqrt{3}$

$$\text{Jest } \sqrt{3} = y_c(0) = \operatorname{tg} \left(\frac{-1}{\arcsin 0 + c} \right) = \operatorname{tg} \left(-\frac{1}{c} \right),$$

$$\text{tedy } -\frac{1}{c} = \frac{\pi}{3}, \quad \text{tedy } c = -\frac{3}{\pi}.$$

$$\text{Protože } -\frac{3}{\pi} > -\frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi} \quad (\text{nebot } \frac{\pi}{2} > \frac{1}{\pi})$$

$$\text{a zároveň } -\frac{3}{\pi} < \frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi} \quad (\text{levá strana je záporná a pravá kladná}),$$

$$\text{platí } c \in \left(-\frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi}, \frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi} \right), \text{ takže } I_c = \left(-1, \sin \left(\frac{3}{\pi} - \frac{2}{\pi} \right) \right) = \left(-1, \sin \frac{1}{\pi} \right).$$

$$\text{Tedy } y_p(x) = \operatorname{tg} \left(\frac{-1}{\arcsin x - \frac{3}{\pi}} \right), \quad x \in \left(-1, \sin \frac{1}{\pi} \right).$$



<u>HODNOCENÍ:</u>	singulární řešení	1
	obecné řešení	1
	definiční obory	3
	limity v krajích	1
	grafy řešení	2
	řešení s poč. podmín.	2

C2 uvažujte soustavu diferenciálních rovnic

$$x' = y + e^{3t}$$

$$y' = 6x + y + e^{3t}$$

pro diferencovatelné funkce x, y proměnné t .

(a) Naleznete všechna maximální řešení!

(b) Určete množinu všech $[x_0, y_0] \in \mathbb{R}^2$ splňujících:

je-li x, y řešením splňujícím $x(0) = x_0, y(0) = y_0$,

potom jsou x, y omezené na $(-\infty, 0]$.

Řešení! Sestavíme λ -matici soustavy:

$$\left(\begin{array}{cc|c} \lambda & -1 & e^{3t} \\ -6 & \lambda-1 & e^{3t} \end{array} \right) \leftarrow \begin{array}{l} \text{upravujeme:} \\ + \left(\frac{1}{6} \cdot \lambda\right) \times \text{druhý řádek} \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 0 & \frac{1}{6}\lambda^2 - \frac{1}{6}\lambda - 1 & \frac{3}{2}e^{3t} \\ -6 & \lambda-1 & e^{3t} \end{array} \right),$$

neboť

$$\left(\frac{1}{6}\lambda\right)(\lambda-1) - 1 = \frac{1}{6}\lambda^2 - \frac{1}{6}\lambda - 1,$$

$$\left(\frac{1}{6}\lambda\right) \left(e^{3t}\right) + e^{3t} = \frac{1}{6} \cdot 3e^{3t} + e^{3t} = \frac{3}{2}e^{3t}$$

Z prvního řádku dostáváme

$$\frac{1}{6}y'' - \frac{1}{6}y' - y = \frac{3}{2}e^{3t}, \quad \text{tedy}$$

$$(1) \quad y'' - y' - 6y = 9e^{3t}.$$

Charakteristický polynom této rovnice jest

$$\lambda^2 - \lambda - 6 = (\lambda - 3)(\lambda + 2), \text{ kořeny } -2, 3,$$

$$\text{tedy } FS = \{e^{-2t}, e^{3t}\}$$

Rovnice má speciální pravou stranu tvaru

$$9e^{3t} = e^{3t} (9 \cdot \cos(0 \cdot t) + 0 \cdot \sin(0 \cdot t)).$$

Protože $3 = 3 + 0 \cdot i$ je jednoduchý kořen char.

polynomu, hledáme partikulární řešení ve tvaru

$$y_p(t) = Ate^{3t}, \quad A \in \mathbb{R},$$

protože $\max\{st \ 9, st \ 0\} = 0$. Derivováním

dostaneme

$$y_p'(t) = Ae^{3t} + At \cdot 3e^{3t} = 3Ate^{3t} + Ae^{3t},$$

$$y_p''(t) = 3Ae^{3t} + 3At \cdot 3e^{3t} + 3Ae^{3t}$$

$$= 9Ate^{3t} + 6Ae^{3t}.$$

Dosažením do rovnice (1) dostaneme

$$9Ate^{3t} + 6Ae^{3t} - 3Ate^{3t} - Ae^{3t} - 6Ate^{3t} = 9e^{3t},$$

$$\text{tedy } 5Ae^{3t} = 9e^{3t}, \text{ takže } A = \frac{9}{5}.$$

Odtud vyplývá, že obecný tvar řešení y je

$$y(t) = \alpha e^{3t} + \beta e^{-2t} + \frac{9}{5} te^{3t}, \quad t \in \mathbb{R}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Z druhého řádku matice (nebo ze zadání) máme

$$6x = y' - y - e^{3t}$$

$$\text{Jest } y' = 3\alpha e^{3t} - 2\beta e^{-2t} + \frac{9}{5}e^{3t} + \frac{27}{5}te^{3t},$$

takže

$$6x = 3\alpha e^{3t} - 2\beta e^{-2t} + \frac{9}{5}e^{3t} + \frac{27}{5}te^{3t} - \alpha e^{3t} - \beta e^{-2t} - \frac{9}{5}te^{3t} - e^{3t}$$

$$= te^{3t} \left(\frac{27}{5} - \frac{9}{5} \right) + e^{3t} \left(3\alpha + \frac{9}{5} - \alpha - 1 \right) - 3\beta e^{-2t}$$

$$= \frac{18}{5}te^{3t} + e^{3t} \left(2\alpha + \frac{4}{5} \right) - 3\beta e^{-2t}$$

Tedy obecné řešení rovnice je tvaru

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} (t) = \begin{pmatrix} \frac{3}{5}te^{3t} + \left(\frac{\alpha}{3} + \frac{2}{15} \right) e^{3t} - \frac{\beta}{2} e^{-2t} \\ \frac{9}{5}te^{3t} + \alpha e^{3t} + \beta e^{-2t} \end{pmatrix}$$

Dosažením $t=0$ dostaneme

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} (0) = \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{3} + \frac{2}{15} - \frac{\beta}{2} \\ \alpha + \beta \end{pmatrix}$$

Z tvaru obecného řešení plyne, že x, y jsou omezené na $(-\infty, 0]$ pouze pro $\beta=0$. Jestliže

$x(0) = x_0$ a $y(0) = y_0$, pak

$$x_0 = \frac{\alpha}{3} + \frac{2}{15} - \frac{\beta}{2}$$

$$y_0 = \alpha + \beta,$$

tedy

$$3x_0 = \alpha + \frac{2}{5} - \frac{3}{2}\beta$$

$$y_0 = \alpha + \beta$$

Odečtením rovnic dostaneme

$$y_0 - 3x_0 = -\frac{2}{5} + \frac{5}{2}\beta$$

tedy

$$\frac{5}{2}\beta = y_0 - 3x_0 + \frac{2}{5}$$

Záměr: Řešení x, y jsou určena právě

tedy, když

$$y_0 - 3x_0 + \frac{2}{5} = 0.$$



Hodnocení

(a)	6
(b)	4

C3 Dokažte, že vztahy

$$u = 2 \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \cos(\pi xy)$$

$$v = e^{x-y} - 2x^2y$$

definují na okolí bodu $[u, v] = [\frac{\pi}{2} + 1, -1]$ diferencovatelné

funkce x, y proměnných u, v takové, že

$$x\left(\frac{\pi}{2} + 1, -1\right) = 1 \quad \text{a} \quad y\left(\frac{\pi}{2} + 1, -1\right) = 1.$$

Je-li $z(x, y) = \log(x^2 + y^2)$, spočítejte $\frac{\partial z}{\partial u}\left(\frac{\pi}{2} + 1, -1\right)$.

Řešení. Označme

$$F(u, v, x, y) = 2 \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \cos(\pi xy) - u,$$

$$G(u, v, x, y) = e^{x-y} - 2x^2y - v.$$

Potom $F, G \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R})$, a tedy

jsou třídy C^1 na okolí bodu $[\frac{\pi}{2} + 1, -1, 1, 1]$ (např.

na kouli s tímto středem a poloměrem $\frac{1}{2}$).

Dále platí

$$F\left(\frac{\pi}{2} + 1, -1, 1, 1\right) = 2 \operatorname{arctg} 1 - \cos \pi - \frac{\pi}{2} - 1 = 0,$$

$$G\left(\frac{\pi}{2} + 1, -1, 1, 1\right) = e^0 - 2 + 1 = 0$$

a konečně

$$\frac{\partial F}{\partial x}(u, v, x, y) = \frac{2}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{-y}{x^2} + \pi y \sin(\pi xy)$$

$$= \frac{-2y}{x^2 + y^2} + \pi y \sin(\pi xy),$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial y}(u, v, x, y) &= \frac{2 \cdot \frac{1}{x}}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} + \pi x \sin(\pi x y) \\ &= \frac{2x}{x^2 + y^2} + \pi x \sin(\pi x y), \end{aligned}$$

$$\frac{\partial G}{\partial x}(u, v, x, y) = e^{x-y} - 4xy,$$

$$\frac{\partial G}{\partial y}(u, v, x, y) = -e^{x-y} - 2x^2,$$

tedy pro $a = \left[\frac{\pi}{2} + 1, -1, 1, 1\right] = [u, v, x, y]$ jest

$$\frac{\partial F}{\partial x}(a) = \frac{2}{1+1} \cdot \frac{-1}{1} + \pi \sin \pi = -1,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(a) = \frac{2}{1+1} + \pi \cdot 1 \cdot \sin \pi = 1,$$

$$\frac{\partial G}{\partial x}(a) = 1 - 4 = -3, \quad \frac{\partial G}{\partial y}(a) = -1 - 2 = -3,$$

takže $\frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)}(a) = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -3 & -3 \end{vmatrix} = 3 + 3 = 6 \neq 0.$

Podle VOIF tedy existují okolí U bodu $[u, v] = \left[\frac{\pi}{2} + 1, -1\right]$ a okolí V bodu $[x, y] = [1, 1]$ taková, že x, y jsou funkce třídy C^∞ proměnných u, v na U s hodnotami ve V .

Podle řetězového pravidla platí

$$\frac{\partial z}{\partial u}(u, v) = \frac{\partial z}{\partial x}(x, y) \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) + \frac{\partial z}{\partial y}(x, y) \frac{\partial y}{\partial u}(u, v),$$

příčemž

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x, y) = \frac{2x}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}(x, y) = \frac{2y}{x^2 + y^2}.$$

Tedy $\frac{\partial z}{\partial x}(1, 1) = 1, \quad \frac{\partial z}{\partial y}(1, 1) = 1.$

Platí (dle KOF)

$$\frac{\partial x}{\partial u}(u, v) = - \frac{\frac{\partial(F, G)}{\partial(u, y)}}{\frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)}} = - \frac{1}{6} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = - \frac{1}{2},$$

$$\frac{\partial y}{\partial u}(u, v) = - \frac{\frac{\partial(F, G)}{\partial(x, u)}}{\frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)}} = - \frac{1}{6} \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}.$$

Celkem tedy

$$\frac{\partial z}{\partial u}\left(\frac{\pi}{2} + 1, -1\right) = 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 \cdot \frac{1}{2} = 0.$$

HODNOCENÍ: ověření předpokladů KOF ... 6
 výpočet $\frac{\partial z}{\partial u}$... 4

C4 Naleznete všechny globální extrémny funkce

$$f(x, y) = x^3 - y^2 + 1$$

na množině

$$M = \{ [x, y] \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + y^2 \leq 4 \}.$$

Zdůvodněte existenci globálních extrémů.

Řešení. Množina M je omezená v \mathbb{R}^2 , neboť pro $[x, y] \in M$ platí

$$\| [x, y] \|^2 = x^2 + y^2 \leq 4x^2 + y^2 \leq 4, \text{ tedy } M \subset \overline{B([0, 0], 2)}.$$

M je uzavřená, neboť položíme-li $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$h(x, y) = 4x^2 + y^2, \text{ pak } h \text{ je spojitá a}$$

$$M = h^{-1}([0, 4]). \text{ Množina } [0, 4] \text{ je}$$

kompaktní, a tedy uzavřená v \mathbb{R} , takže

M je uzavřená v \mathbb{R}^2 .

Protože M je omezená a uzavřená v \mathbb{R}^2 , je kompaktní.

Protože f je spojitá, nabývá na M globálních extrémů.

$$\text{Položíme } g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x, y) = 4x^2 + y^2 - 4.$$

Podle věty o Lagrangeových multiplikaátorech se na ∂M

extrémy nabývají buď v bodech $[x, y]$, kde

$$\nabla g(x, y) = 0$$

nebo ve stacionárních bodech funkce

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y).$$

Protože $\nabla g(x, y) = (8x, 2y)$, rovnost

$\nabla g(x, y) = 0$ nastává pouze pro $[x, y] = [0, 0] \notin \partial M$.

Stacionární body L splňují

$$(1) \quad \frac{\partial L}{\partial x} = 3x^2 + 8\lambda x = 0$$

$$(2) \quad \frac{\partial L}{\partial y} = -2y + 2\lambda y = 0$$

$$(3) \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 4x^2 + y^2 - 4 = 0.$$

Dle (2) platí $y=0$ nebo $\lambda=1$.

Je-li $y=0$, pak dle (3) $x = \pm 1$, tedy dostáváme body $[1, 0]$ a $[-1, 0]$ jako kandidáty na extrém.

Je-li $\lambda=1$, pak dle (1) $x(3x+8)=0$, a tedy $x=0$ nebo $3x+8=0$

Je-li $x=0$, pak dle (3) $y = \pm 2$, tedy dostáváme body $[0, 2]$ a $[0, -2]$

Je-li $3x+8=0$, pak dle (3) $[x, y] \notin M$ pro žádné $y \in \mathbb{R}$, neboť $4\left(\frac{8}{3}\right)^2 > 4$.

Na ∂M tedy stačí posoudit body $[\pm 1, 0]$ a $[0, \pm 2]$.

Ještě $f(1, 0) = 2$, $f(-1, 0) = 0$, $f(0, 2) = -3$, $f(0, -2) = -3$.

Na $\text{Int } M$ se mohou extrémny nacházet pouze ve stacionárních bodech f . Ještě

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -2y,$$

tedy dostáváme bod $[0, 0]$. Platí $f(0, 0) = 1$.

Záměr: Funkce f nabývá na M svého globálního maxima 2 u bodě $[1,0]$ a svého globálního minima -3 u bodech $[0,-2]$ a $[0,2]$.



<u>HODNOCENÍ</u>	zdůvodnění existence extrémů ..	3
	kandidáti $\nabla g = 0$..	1
	$\nabla L = 0$..	3
	mitiček ..	2
	záměr ..	1

C5 Necht $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ je lineární zobrazení a $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

Rozhodněte o platnosti výroků

(a) f má v $[0,0]$ parc. derivace $\Rightarrow f \circ F$ má v $[0,0]$ parc. der.

(b) f má v $[0,0]$ tot. dif. $\Rightarrow f \circ F$ má v $[0,0]$ tot. dif.

Řešení! (a) NEPLATÍ

Položíme $f(x) = \begin{cases} 1, & x=0 \vee y=0 \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$

Potom f má v $[0,0]$ všechny parciální derivace.

Položíme $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x+2y, y).$$

Potom

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{(f \circ F)(0, t) - (f \circ F)(0, 0)}{t} =$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(2t, t) - 1}{t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0 - 1}{t} \quad \text{neexistuje,}$$

tedy $f \circ F$ nemá v $[0,0]$ parciální derivaci podle y .

(ii) PLATI' Důkaz. Víme, že F má na \mathbb{R}^2 tot. dif.

a platí $F'(x,y) = F$ pro každé $[x,y] \in \mathbb{R}^2$.

Naníc z linearitý F plyne, že $F(0,0) = [0,0]$. Protože

existuje $f'(F(0,0)) = f'(0,0)$ a $F'(0,0)$, existuje i

$g'(0,0)$ a platí

$$g'(0,0) = f'(F(0,0)) \circ F'(0,0) = f'(0,0) \circ F.$$

☞

Hodnocení (a) 7

(b) 3