

Zadání písemné zkoušky z Matematické analýzy 2

Matematicko-fyzikální fakulta UK, letní semestr 2025-26

Termín číslo 3, 17. 6. 2026

1. Je dána funkce

$$f(x) = \left(\log(1-x) + \log(1+x) \right)^2 - \sqrt{1+x^4} + 1.$$

Nalezněte Taylorův polynom 4. řádu funkce f v bodě 0. Pomocí získaného rozvoje spočtěte limitu

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^4}.$$

(15 bodů)

2. Vyšetřete konvergenci následující řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(\frac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}+2}\right) \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{\sin n}{n}\right).$$

(15 bodů)

3. Necht $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Uvažujte Newtonův integrál

$$I(\alpha, \beta) = \int_0^{\infty} \frac{x(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})^{\beta}}{(x^2+1)^{\alpha}(x+2)^{\alpha+\beta}} dx.$$

(a) V závislosti na parametrech α, β vyšetřete konvergenci $I(\alpha, \beta)$.

(b) Vypočtěte $I(1, 0)$.

(15 bodů)

4. Necht $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Uvažujte následující tvrzení.

(1) Existuje polynom P nejvýše druhého stupně takový, že $f(x) = P(x) + o(x^2)$, $x \rightarrow 0$.

(2) Funkce f má v bodě 0 vlastní první derivaci.

(3) Funkce f má v bodě 0 vlastní druhou derivaci.

Rozhodněte, které z následujících implikací platí a které neplatí. Uveďte vždy důkaz platnosti implikace nebo protipříklad. Můžete používat věty z přednášek.

(a) (1) $\Rightarrow$ (2)

(b) (1) $\Rightarrow$ (3)

(c) (3) $\Rightarrow$ (1)

(15 bodů)

Řešení úloh

Úloha číslo 1. Je dána funkce

$$f(x) = \left(\log(1 - x + \log(1 + x)) \right)^2 - \sqrt{1 + x^4} + 1.$$

Nalezněte Taylorův polynom 4. řádu funkce f v bodě 0. Pomocí získaného rozvoje spočtěte limitu

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^4}.$$

Řešení. Označme $g(x) = -x + \log(1 + x)$ a $h(x) = (\log(1 + g(x)))^2$.

1. Rozvoj jednotlivých funkcí v bodě 0.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Platí} \\ \\ \text{Platí } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x^2} = -\frac{1}{2}, \text{ a proto podle Věty 6.6(iii) platí} \\ \\ \text{Odtud s pomocí Věty 6.6 dostaneme} \end{array} \right\} \begin{array}{l} g(x) = -x + \log(1 + x) = -x + \left(x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right) \\ \quad = -\frac{1}{2}x^2 + o(x^2). \\ \\ \log(1 + g(x)) = g(x) + o(g(x)) = -\frac{1}{2}x^2 + o(x^2). \\ \\ (\log(1 + g(x)))^2 = \left(-\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right)^2 = \frac{1}{4}x^4 + o(x^4). \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Pro zbývající člen funkce } f \text{ použijeme standardní rozvoj:} \\ \\ \text{Pro funkci } f \text{ pak platí} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \sqrt{1 + x^4} = 1 + \frac{1}{2}x^4 + o(x^5). \\ \\ f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + o(x^4). \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{2. Určení } T_4^{f,0}. \text{ Taylorův polynom 4. řádu funkce } f \text{ v bodě 0 je tedy podle Věty 6.2:} \end{array} \right\} T_5^{f,0}(x) = -\frac{1}{4}x^4.$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Výpočet limity Pomocí získaného rozvoje spočteme limitu:} \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{4}x^4 + o(x^4)}{x^4} = -\frac{1}{4}.$$

Úloha číslo 2. Vyšetřete konvergenci následující řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(\frac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}+2}\right) \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{\sin n}{n}\right).$$

Řešení: Označme

$$a_n = \log\left(\frac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}+2}\right) \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{\sin n}{n}\right).$$

Vyšetříme absolutní konvergenci řady pomocí asymptotického srovnání s vhodnou řadou typu $\sum \frac{1}{n^p}$.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Nejprve upravíme argument logaritmu} \\ \\ \text{Pak dostáváme} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}+2} = \frac{\sqrt{n}+2-1}{\sqrt{n}+2} = 1 - \frac{1}{\sqrt{n}+2}. \\ \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}+2}\right)}{-n^{-1/2}} = 1. \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Pro každé } n \in \mathbb{N} \text{ platí } \left| \frac{\sin n}{n} \right| \leq \frac{1}{n}. \text{ Položme} \\ \\ \text{Potom platí} \end{array} \right\} \begin{array}{l} b_n = \left| \log\left(\frac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}+2}\right) \right| \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{n}\right). \\ \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{n^{-1/2} \cdot n^{-1}} = 1. \end{array}$$

$\left. \begin{array}{l} \text{Řada } \sum_{n=1}^{\infty} n^{-3/2} \text{ je konvergentní, a proto je podle limitního srovnávacího kritéria konvergentní} \\ \text{i řada } \sum_{n=1}^{\infty} b_n. \text{ Poněvadž pro každé } n \in \mathbb{N} \text{ platí } |a_n| \leq b_n, \text{ dostáváme podle srovnávacího kritéria,} \\ \text{že } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje absolutně, a tedy i konverguje.} \end{array} \right\}$

Úloha číslo 3. Necht $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Uvažujte Newtonův integrál

$$I(\alpha, \beta) = \int_0^\infty \frac{x(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})^\beta}{(x^2+1)^\alpha(x+2)^{\alpha+\beta}} dx.$$

(a) V závislosti na parametrech α, β vyšetřete konvergenci $I(\alpha, \beta)$.

(b) Vypočtěte $I(1, 0)$.

Řešení: *Vyšetření konvergence.* Integrand označme jako f . Funkce f je na otevřeném intervalu $(0, \infty)$ spojitá a nezáporná.

^{1b} $\left\{ \begin{array}{l} \text{Chování u bodu } 0. \text{ Integrand je v bodě nula zprava spojitý, a proto je integrál } \int_0^1 f \text{ konvergentní.} \\ \text{pro všechna } \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \end{array} \right.$

^{2b} $\left\{ \begin{array}{l} \text{Chování v } \infty. \text{ Nejprve upravíme rozdíl odmocnin v čitateli rozšířením:} \\ \\ \sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{(x+1) - x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}. \\ \\ \text{Odtud máme} \\ \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \frac{1}{2}. \end{array} \right.$

^{2b} $\left\{ \begin{array}{l} \text{Platí} \\ \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2+1)^\alpha}{x^{2\alpha}} = 1, \\ \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+2)^{\alpha+\beta}}{x^{\alpha+\beta}} = 1. \end{array} \right.$

^{1b} $\left\{ \begin{array}{l} \text{Dohromady dostáváme} \\ \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\frac{x \cdot (\frac{1}{2} x^{-1/2})^\beta}{x^{2\alpha} \cdot x^{\alpha+\beta}}} \in (0, \infty). \end{array} \right.$

^{2b} $\left\{ \begin{array}{l} \text{Newtonův integrál } \int_1^\infty x^{-p} dx \text{ konverguje právě tehdy, když } p > 1. \text{ V našem případě požadujeme} \\ 3\alpha + \frac{3}{2}\beta - 1 > 1. \text{ Integrál konverguje právě tehdy, když } 6\alpha + 3\beta > 4 \end{array} \right.$

^{1b} $\left\{ \begin{array}{l} \text{Výpočet integrálu } I(1, 0). \text{ Dosadíme parametry } \alpha = 1 \text{ a } \beta = 0. \text{ Integrál má tvar} \\ \\ I(1, 0) = \int_0^\infty \frac{x}{(x^2+1)(x+2)} dx \\ \\ \text{Pro integraci racionální lomené funkce použijeme rozklad na parciální zlomky:} \\ \\ \frac{x}{(x^2+1)(x+2)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x+2} \end{array} \right.$

$$\left\{ \begin{array}{l}
\text{Vynásobením společným jmenovatelem dostaneme rovnost:} \\
\\
x = (Ax + B)(x + 2) + C(x^2 + 1) = (A + C)x^2 + (2A + B)x + (2B + C) \\
\\
\text{Porovnáním koeficientů u jednotlivých mocnin } x \text{ získáme soustavu lineárních rovnic:} \\
\\
\begin{array}{l}
x^2 : \quad A + C = 0 \implies C = -A \\
x^1 : \quad 2A + B = 1 \\
x^0 : \quad 2B + C = 0 \implies C = -2B
\end{array} \\
\\
\text{Z toho plyne } -A = -2B \implies A = 2B. \text{ Dosazením do druhé rovnice: } 2(2B) + B = 1 \implies 5B = 1 \implies B = \frac{1}{5}. \text{ Následně } A = \frac{2}{5} \text{ a } C = -\frac{2}{5}. \text{ Rozklad má tvar:} \\
\\
\frac{x}{(x^2 + 1)(x + 2)} = \frac{1}{5} \left(\frac{2x + 1}{x^2 + 1} - \frac{2}{x + 2} \right)
\end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
\text{Nyní integrací jednotlivých členů nalezneme primitivní funkci } F \\
\\
\frac{1}{5} \left(\int \frac{2x}{x^2 + 1} dx + \int \frac{1}{x^2 + 1} dx - 2 \int \frac{1}{x + 2} dx \right) \\
\\
\stackrel{c}{=} \frac{1}{5} (\log(x^2 + 1) + \operatorname{arctg} x - 2 \log(x + 2)).
\end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
\text{Upravíme} \\
\\
F(x) = \frac{1}{5} \log\left(\frac{x^2 + 1}{(x + 2)^2}\right) + \frac{1}{5} \operatorname{arctg} x
\end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
\text{Určitý integrál spočítáme pomocí limitních přechodů v mezích } 0 \text{ a } \infty: \\
\\
\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = \frac{1}{5} \log(1) + \frac{1}{5} \cdot \frac{\pi}{2} = 0 + \frac{\pi}{10} = \frac{\pi}{10}, \\
\\
F(0) = \frac{1}{5} \log\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{5} \cdot 0 = \frac{1}{5} (-2 \log 2) = -\frac{2}{5} \log 2.
\end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
\text{Odečtením dolní meze od horní získáme konečnou hodnotu integrálu:} \\
\\
I(1, 0) = \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) - F(0) = \frac{\pi}{10} - \left(-\frac{2}{5} \log 2\right) = \frac{\pi + 4 \log 2}{10}.
\end{array} \right.$$

Úloha číslo 4. Necht $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Uvažujte následující tvrzení.

- (1) Existuje polynom P nejvýše druhého stupně takový, že $f(x) = P(x) + o(x^2), x \rightarrow 0$.
- (2) Funkce f má v bodě 0 vlastní první derivaci.
- (3) Funkce f má v bodě 0 vlastní druhou derivaci.

Rozhodněte, které z následujících implikací platí a které neplatí. Uveďte vždy důkaz platnosti implikace nebo protipříklad. Můžete používat věty z přednášek.

- (a) (1) $\Rightarrow$ (2)
- (b) (1) $\Rightarrow$ (3)
- (c) (3) $\Rightarrow$ (1)

Řešení:

$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) *Implikace neplatí.* Uvažujme funkci } f \text{ definovanou předpisem} \\ f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x = 0, \\ 0 & \text{pro } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \end{cases} \\ \text{Potom } f \text{ splňuje (1), neboť za } P \text{ lze zvolit nulový polynom. Funkce } f \text{ ale nemá v } 0 \text{ derivaci.} \end{array} \right.$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{(b) *Implikace neplatí.* Lze volit stejnou funkci jako v bodě (a).} \end{array} \right.$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{(c) *Implikace platí.* Tvrzení plyne z Věty 6.2, přičemž za } P \text{ volíme } T_2^{f,a}. \end{array} \right.$