
NMFM301 – Statistika pro finanční matematiky

1. Individuální zápočtová práce 09. 11. 2020

(Bodové hodnocení: 20 bodů)

1. (10 bodů) Uvažujme náhodný výběr $X_1, \dots, X_n$ z exponenciálního rozdělení s parametrem $\lambda > 0$ (tak, že $EX_i = \lambda$).
- (a) Najděte momentový odhad neznámého parametru $\lambda > 0$ a pomocí centrální limitní věty a transformační funkce $g(\lambda) = \log \lambda$ sestrojte intervalový odhad pro tento parametr. [2]
 - (b) Použijte transformaci $Y_i = \exp\{-X_i/\lambda\}$ a pomocí uspořádaného náhodného výběru $Y_{(1)}, \dots, Y_{(n)}$ sestrojte přesný interval spolehlivosti pro neznámý parametr $\lambda > 0$. [2]
 - (c) Nechť $n = 2k$, pro nějaké $k \in \mathbb{N}$. Definujme náhodné veličiny $U_j = \min(X_{2j-1}, X_{2j})$, pro $j = 1, \dots, k$. Určete združené rozdělení náhodného vektoru $(U_1, U_k)^\top$. [2]
 - (d) Pomoci náhodných veličin $U_1, \dots, U_k$ sestrojte přesný interval spolehlivosti pro neznámý parametr $\lambda > 0$. [2]
 - (e) Definujme odhad neznámého parametru $\lambda > 0$ jako $\hat{\lambda}_k = U_1 + U_k$. Vyšetřete nestrannost a konzistenci tohoto odhadu. [2]

2. (10 bodů) Uvažujme náhodný výběr $X_1, \dots, X_n$ z rozdělení, které je dané hustotou

$$f(x) = \frac{\theta}{x^{\theta+1}}, \quad \text{pro } x > 1 \text{ a } \theta > 0.$$

- (a) Najděte maximálně věrohodný odhad neznámého parametru $\theta > 0$ a odvoďte jeho asymptotické rozdělení. [2]
- (b) Pomoci transformace $Y_i = \log X_i$ spočítejte střední hodnotu maximálně věrohodného odhadu. Odhad upravte tak, aby byl nestranný. [2]
- (c) Uvažujte transformaci $Z_i = 1/X_i$ a spočítejte střední hodnotu a rozptyl transformované náhodné veličiny Z_i . [2]
- (d) Pomoci náhodných veličin $Z_1, \dots, Z_n$ sestrojte momentový odhad $\hat{\theta}_M$ pro neznámý parametr $\theta > 0$ a vyšetřete jeho konzistenci a nestrannost. [2]
- (e) Pomoci centrální limitní věty a vhodně definované transformace $g(\theta)$ odvoďte asymptotické rozdělení odhadu $\hat{\theta}_M$. [2]