# I. MECHANIKA

# 3. Energie a silové pole I

# Obsah

- Impuls síly.
- Zákon zachování hybnosti.
- Práce. Výkon.
- Kinetická energie.
- Pole konzervativních sil.
- Práce po uzavřené křivce.
- Potenciální energie, rovnováha (stabilní, vratká, indiferentní)
- Zákon zachování mechanické energie.
- Intenzita pole, potenciál, gradient. Ekvipotenciální plochy, siločáry.
- Nekonzervativní síly, disipace energie.
- Newtonův gravitační zákon.
- Intenzita a potenciál gravitačního pole. Zemské gravitační pole.
- Gravitační a tíhové zrychlení
- Energie při pohybu v centrálním poli.
- Moment sil v centrálním poli. Keplerovy zákony.

# Zákony zachování

**Izolovaná soustava těles** – není vystavena silovému působení z vnějšku

**Volný hmotný bod** - speciální případ izolované soustavy těles

Definice inerciální vztažné soustavy

- nezbytná je „hladkost“ prostoru a času
- tyto atributy prostoru a času mají za následek zachování některých charakteristik pohybu (zákony zachování) v rámci izolovaných soustav těles

Které zákony zachování to jsou?

- absolutní prostor
  - homogenní (stejnorodý)$\rightarrow$ **ZZ hybnosti**
  - izotropní (stejný ve všech směrech) $\rightarrow$ **ZZ momentu hybnosti**
- absolutní čas
  - homogenní $\rightarrow$ **ZZ energie**

# Impuls síly (pro konstantní sílu)

Sledujme časový účinek síly: 2. NZ $\rightarrow \vec{F} = \dfrac{d}{dt}\vec{p} \rightarrow \vec{F}dt = d\vec{p}$

Co to znamená?

Předpokládejme působení konstantní síly $\vec{F}$ po dobu $\Delta t$ .
Na počátku $\vec{p}_1 = m\vec{v}_1$ a na konci $\vec{p}_2 = m\vec{v}_2$ .

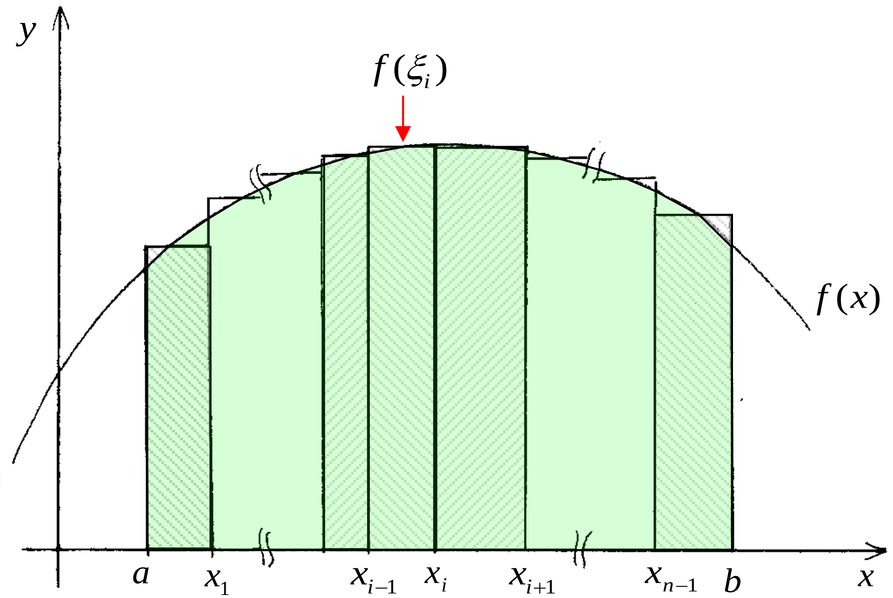
Konstantní síla znamená rovnoměrně zrychlený pohyb $\vec{a} = \dfrac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{\Delta t}$ .

Z 2.NZ musí platit $\vec{F} = m\dfrac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{\Delta t}$ , což lze přepsat do tvaru $\vec{F}\Delta t = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$

neboli $\vec{F}\Delta t = \Delta\vec{p}$ .

Pro posloupnost časových intervalů $\rightarrow \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \Delta t_i = \sum_{i=1}^{N} \Delta\vec{p}_i = \vec{p}_{\mathrm{fin}} - \vec{p}_{\mathrm{ini}}$

# Určitý integrál



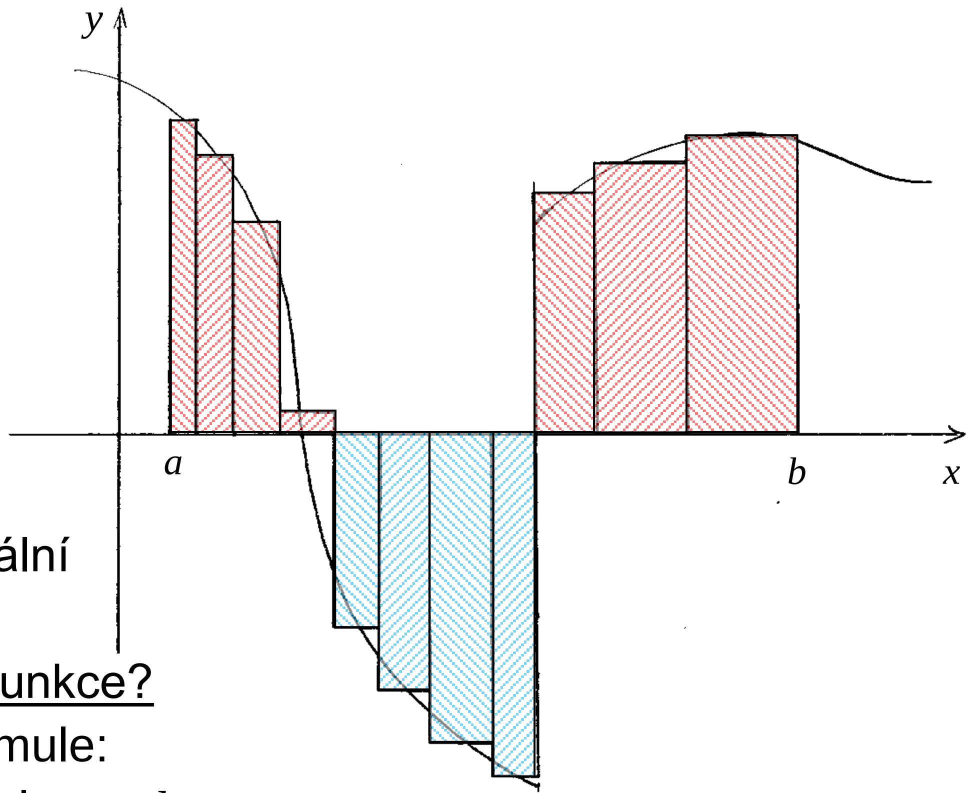

Mějme funkci $f(x)$ definovanou na intervalu $<a,b>$.
Rozdělme interval na *n* úseků mezi body
$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots x_{n-1} < x_n = b$.
Každý úsek reprezentuje jedna z funkčních hodnot $f(\xi_i)$, kde $\xi_i \in < x_{i-1}, x_i >$.

Utvořme tzv. integrální součet $S = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{\Delta x_i}$.

Limitu součtu *S* pro $n \to \infty$ nazveme **určitým (Riemannovým) integrálem** funkce $f(x)$ v intervalu $<a,b>$. Označíme $\int_a^b f(x)\,dx$.

Z definice vidíme, že určitý integrál představuje plochu „pod“ integrovanou křivkou v intervalu $<a,b>$.

# Určitý integrál




Definice obsahuje popis výpočtu integrálu i pro funkce se složitým průběhem (nespojité). Je základem algoritmů pro strojový výpočet. Postup lze aplikovat na experimentální závislosti.

Jak se počítá určitý integrál běžné funkce?

Pomůže Newtonova-Leibnizova formule:

Mám funkci $f(x)$ spojitou na intervalu $<a,b>$ a $F(x)$ je její primitivní funkce, pak platí

$\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$. Toto je tzv. **Newtonův** integrál, který pro spojité funkce dává stejné výsledky jako Riemannův.

Příklad: $\int_a^b dx = [x]_a^b = b - a$

# Impuls síly

Uvažujme časově proměnnou sílu $\vec{F} = \vec{F}(t)$ působící na hmotný bod v časovém intervalu $\langle t_1, t_2 \rangle$.

Analogicky (k součtu přes konečné časové intervaly) platí

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t)dt = \int_{\vec{p}(t_1)}^{\vec{p}(t_2)} d\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 .$$

Integrál $\vec{J} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t)dt$ se nazývá **impuls síly** $\vec{F}$ .

Platí $\vec{J} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \Delta\vec{p}$ , tj. změna hybnosti h.b. se rovná impulsu síly působící na h.b.

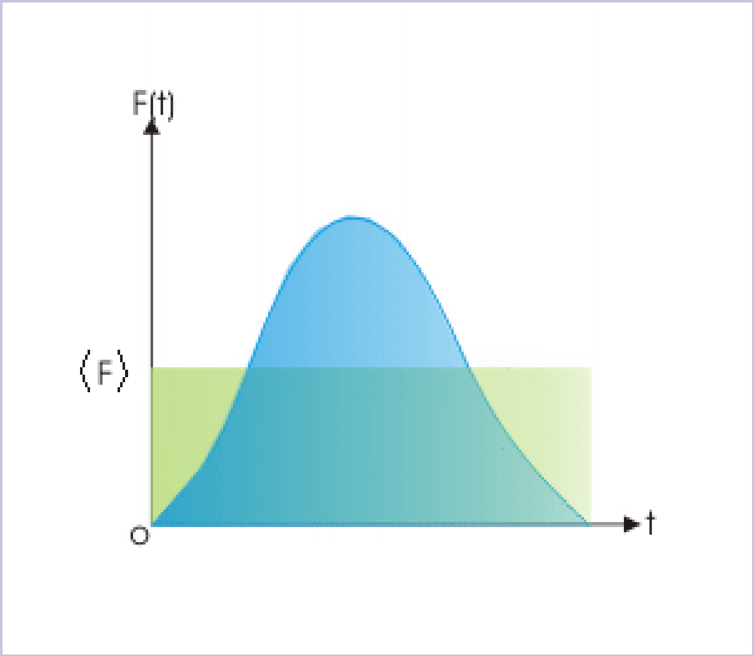
Důležité pro stanovení účinku síly, když není přesně znám její časový průběh.

# Střední (průměrná) síla

**Střední síla** $\langle \vec{F} \rangle$ působící v intervalu $\langle t_1, t_2 \rangle$ zavedena tak, aby jí vyvolaný impuls byl roven impulsu skutečně působící síly

$$\langle \vec{F} \rangle (t_2 - t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t)\,dt$$

$$\rightarrow \qquad \langle \vec{F} \rangle = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t)\,dt$$




Tento způsob se používá pro výpočet (časové) střední hodnoty $\langle \vec{x} \rangle$ libovolné veličiny $\vec{x}$ :

$$\langle \vec{x} \rangle = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \vec{x}(t)\,dt$$

# Impuls momentu síly

Uvažujme časově proměnný moment síly $\vec{M} = \vec{M}(t)$ vzhledem k bodu O působící na hmotný bod v časovém intervalu $\langle t_1, t_2 \rangle$.

Analogicky platí

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{M}(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} \vec{r} \times \vec{F} dt = \int_{t_1}^{t_2} \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} dt = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p}}_{\vec{v} \times m\vec{v} = 0} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} \right\} dt =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left(\vec{r} \times \vec{p}\right) dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\vec{b}}{dt} dt = \int_{\vec{b}(t_1)}^{\vec{b}(t_2)} d\vec{b} = \vec{b}_2 - \vec{b}_1$$

Integrál $\vec{L} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{M}(t)dt$ se nazývá **impuls momentu síly** $\vec{M}$ .

Platí $\vec{L} = \vec{b}_2 - \vec{b}_1 = \Delta\vec{b}$, tj. změna momentu hybnosti h.b. se rovná impulsu momentu síly působící na h.b. vzhledem ke stejnému bodu O.

# Zákon zachování hybnosti

Uvažujme dva hmotné body, které vzájemně interagují.

3.NZ $\rightarrow$ $\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$ (těleso A působí na B silou $\vec{F}_{AB}$; těleso B působí na A silou $\vec{F}_{BA}$)

Doba interakce je dána společným časovým intervalem $\langle t_1, t_2 \rangle$.

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{BA}(t)dt = \vec{p}_A(t_2) - \vec{p}_A(t_1) = \Delta\vec{p}_A$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{AB}(t)dt = \vec{p}_B(t_2) - \vec{p}_B(t_1) = \Delta\vec{p}_B$$

$$\rightarrow \Delta\vec{p}_A = -\Delta\vec{p}_B$$

$$\rightarrow \Delta\vec{p}_A + \Delta\vec{p}_B = 0$$

$$\rightarrow \vec{p}_B(t_1) + \vec{p}_A(t_1) = \vec{p}_A(t_2) + \vec{p}_B(t_2)$$

**zákon zachování hybnosti** v uzavřené soustavě

# Zákon zachování momentu hybnosti

Uvažujme dva hmotné body, které vzájemně interagují.

3.NZ $\rightarrow$ $\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$ (těleso A působí na B silou $\vec{F}_{AB}$; těleso B působí na A silou $\vec{F}_{BA}$)

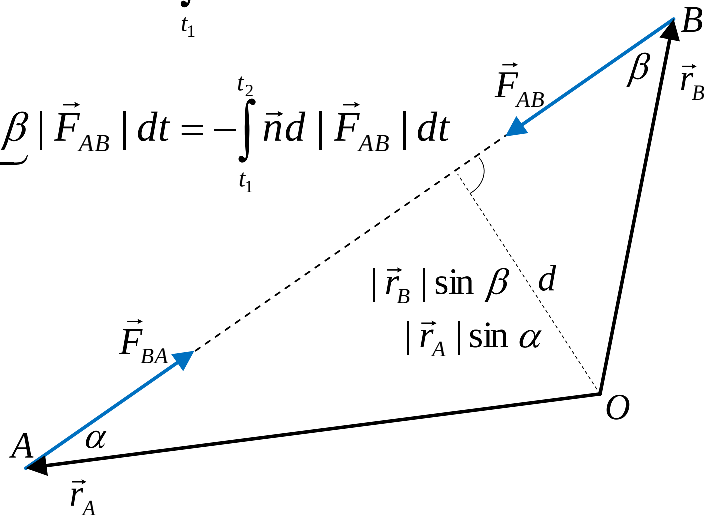
Doba interakce je dána společným časovým intervalem $\langle t_1, t_2 \rangle$.

Analogicky z porovnání momentů síly vůči libovolnému bodu

$$\Delta\vec{b}_A = \vec{b}_A(t_2) - \vec{b}_A(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{M}_{BA}(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} \vec{r}_A \times \vec{F}_{BA} dt = \int_{t_1}^{t_2} \vec{n} \underbrace{|\vec{r}_A| \sin\alpha}_{d} |\vec{F}_{BA}| dt = \int_{t_1}^{t_2} \vec{n} d |\vec{F}_{BA}| dt$$

$$\Delta\vec{b}_B = \vec{b}_B(t_2) - \vec{b}_B(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{M}_{AB}(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} \vec{r}_B \times \vec{F}_{AB} dt = -\int_{t_1}^{t_2} \vec{n} \underbrace{|\vec{r}_B| \sin\beta}_{d} |\vec{F}_{AB}| dt = -\int_{t_1}^{t_2} \vec{n} d |\vec{F}_{AB}| dt$$

$$\rightarrow \boxed{\Delta\vec{b}_A + \Delta\vec{b}_B = 0}$$




**zákon zachování momentu hybnosti**
v uzavřené soustavě

# Zákony zachování ZZH, ZZMH

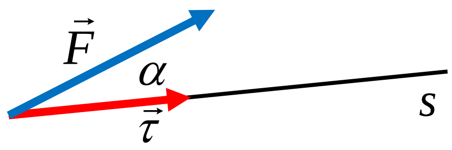
Zákony je možno zobecnit na libovolný počet hmotných bodů v izolované soustavě.

Experimentálně bylo prokázáno, že směr implikace je opačný:

- uvedené ZZ platí i mimo rámec klasické mechaniky
- pokud platí předpoklady pro použití klasické mechaniky (tj. pokud šíření interakce mezi tělesy můžeme považovat za nekonečně rychlé), je důsledkem těchto ZZ také 3.NZ

# Práce (pro konstantní sílu)

sledujme dráhový účinek síly: $\vec{F} \cdot \vec{s}$




Co to znamená?

Předpokládáme působení konstantní síly $\vec{F}$ po přímé dráze délky $s$ , jejíž směr je určen jednotkovým vektorem $\vec{\tau}$ .
Vektor $\vec{F}$ svírá s vektorem $\vec{\tau}$ úhel $\alpha$ .

Součin $|\vec{F}|\, s \cos\alpha$ se označuje jako **práce** $W = |\vec{F}|\, s \cos\alpha$.

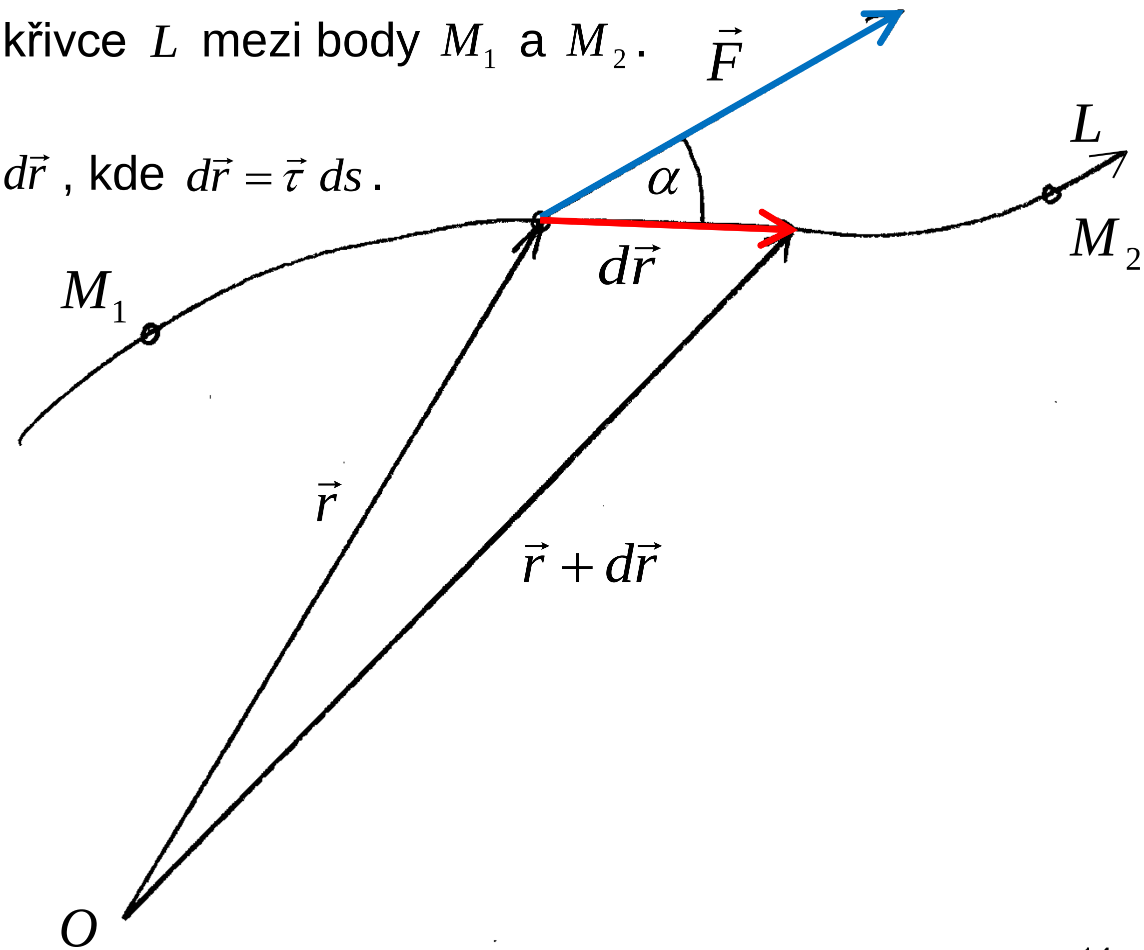
Označíme-li vektor $s\vec{\tau}$ jako vektor posunutí $\vec{s} = s\vec{\tau}$ , lze zapsat $W = \vec{F} \cdot \vec{s}$ .

Pro posloupnost úseků dráhy $\rightarrow \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \Delta\vec{s}_i = \sum_{i=1}^{N} \Delta W_i = W$

# Práce – obecná formulace

Uvažujme časově proměnnou sílu $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$ působící na hmotný bod po orientované křivce $L$ mezi body $M_1$ a $M_2$.

Elementární práce $dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$ , kde $d\vec{r} = \vec{\tau}\, ds$ .




Křivkový integrál

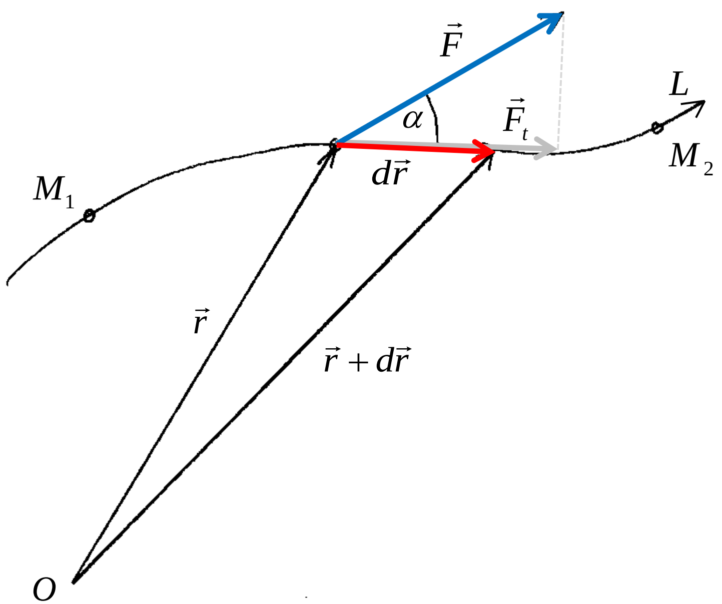
$$W_{12} = \int_{L(M_1)}^{L(M_2)} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

vyjadřuje vykonanou **práci**.

# Práce – vlastnosti

Elementární práci lze zároveň zapsat

$$dW = |\vec{F}| \cdot |d\vec{r}| \cos\alpha = |\vec{F}|\, ds \cos\alpha = \underbrace{(|\vec{F}|\cos\alpha)}_{|\vec{F}_t|} ds$$




Práci koná pouze tečná složka $|\vec{F}_t| = |\vec{F}|\cos\alpha$

Znaménková konvence

- $W > 0$ ... síla urychluje pohyb ($\cos\alpha > 0$)
- $W < 0$ ... síla zpomaluje pohyb ($\cos\alpha < 0$)
- $W = 0$ ... tečná složka síly nulová, tj. působící síla kolmá k vektoru posunutí ($\cos\alpha = 0$)

Vlastnosti integrálu $W$

- závisí na počátečním a koncovém bodu a tvaru dráhy
- nezávisí na rychlosti nebo době trvání
- znaménko se mění se směrem procházení $\quad W_{12} = \int_{L(M_1)}^{L(M_2)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_{L(M_2)}^{L(M_1)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -W_{21}$

# Okamžitý výkon

Časovou derivaci práce $W$ nazýváme **okamžitý výkon.**

Označujeme $P = \dfrac{dW}{dt}$ .

Platí $W_{12} = \int_{t_1}^{t_2} dW = \int_{t_1}^{t_2} dW \dfrac{dt}{dt} = \int_{t_1}^{t_2} \dfrac{dW}{dt} dt = \int_{t_1}^{t_2} P dt$ .

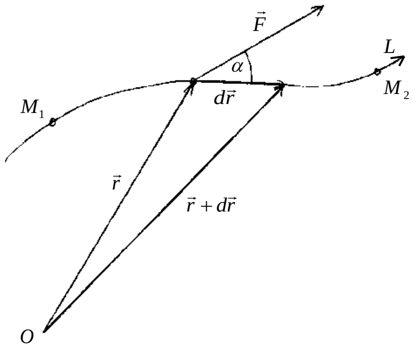
Znaménko výkonu je stejné jako znaménko vykonávané práce.

# Počítání s křivkovým integrálem

Rovnice křivky $L$ parametrizována $\vec{r} = \vec{r}(q)$.

Hodnoty parametru $q_1$ a $q_2$ odpovídají bodům $L(M_1)$ a $L(M_2)$.

Proveďme v integrálu substituci $\vec{r} \to \vec{r}(q)$. Pak $\vec{F}(\vec{r}) = \vec{F}(\vec{r}(q)) = \vec{F}(q)$.




Diferenciál $d\vec{r}$ vyjádříme pomocí derivace $d\vec{r} = \frac{d\vec{r}}{dq} dq$ a dostaneme

$$W_{12} = \int_{L(M_1)}^{L(M_2)} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_{q_1}^{q_2} \left( \vec{F}(q) \cdot \frac{d\vec{r}(q)}{dq} \right) dq = \int_{q_1}^{q_2} F_1 \frac{dx_1}{dq} dq + \int_{q_1}^{q_2} F_2 \frac{dx_2}{dq} dq + \int_{q_1}^{q_2} F_3 \frac{dx_3}{dq} dq \ ,$$

což je součet běžných Riemannových integrálů.

Situace bude názornější, pokud je parametrem čas

$$W_{12} = \int_{L(M_1)}^{L(M_2)} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_{t_1}^{t_2} \left( \vec{F}(t) \cdot \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \right) dt = \int_{t_1}^{t_2} \left( \vec{F}(t) \cdot \vec{v}(t) \right) dt$$

Porovnáním s definicí okamžitého výkonu $W_{12} = \int_{t_1}^{t_2} P\, dt$ je zřejmé, že $P = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$

# Točivý moment a výkon motoru

- motory se charakterizují výkonem a točivým (někdy též krouticím) momentem
- točivý moment je z fyzikálního hlediska moment síly
    - uvažujme kolo poloměru $r$ připojené na výstupní hřídel motoru
    - hřídel se otočí $f$ -krát za sekundu
    - na obvodu kola působí síla $F$ po dobu $\Delta t$
    - moment síly vůči ose otáčení $M = Fr$
    - za tuto dobu kolo vykoná $f\,\Delta t$ otáček
    - síla působí po dráze $s = 2\pi r\, f\,\Delta t$
    - vykonaná práce $\Delta W = F\,2\pi r\, f\,\Delta t = \underbrace{2\pi\, f}_{\omega}\,\underbrace{Fr}_{M}\,\Delta t$
    - výkon motoru $P = \dfrac{\Delta W}{\Delta t} = \omega M$

# Kinetická energie

Výpočet práce vykonané silovým působením po zadané dráze

$$\underbrace{dW = \vec{F}\cdot d\vec{r} \quad \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \quad d\vec{r} = \frac{d\vec{r}}{dt}dt = \vec{v}\ dt}$$

$$dW = m\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v}\ dt = m\frac{1}{2}\underbrace{\frac{d}{dt}(\vec{v}\cdot\vec{v})}_{\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt}}\ dt = \frac{1}{2}md(\vec{v}\cdot\vec{v}) = d\left(\frac{1}{2}m\vec{v}^2\right)$$

Definujme **kinetickou energii** vztahem $E_k = \frac{1}{2}m\vec{v}^2$. Pak platí $dW = dE_k$.

Platí tedy

$$W_{12} = \int_{L(M_1)}^{L(M_2)} dW = \int_{L(M_1)}^{L(M_2)} d\left(\frac{1}{2}m\vec{v}^2\right) = \int_{L(M_1)}^{L(M_2)} dE_k = [E_k]_{M_1}^{M_2} = E_k(M_2) - E_k(M_1) = \frac{1}{2}m\vec{v}_2^2 - \frac{1}{2}m\vec{v}_1^2 = \Delta E_k$$

Přírůstek kinetické energie je roven práci vykonané vnějšími silami na h.b. při přechodu z výchozího do koncového bodu po konkrétní zadané dráze.

# Kinetická energie

- K.E. představuje míru schopnosti těles konat práci
- změna K.E. rovna práci vnějších sil
- závisí na volbě soustavy souřadnic
- znaménková konvence: pokud vnější síly konají kladnou práci, K.E. roste
  - při brzdění působí vnější síla proti pohybu – síla koná zápornou práci (kladnou práci koná těleso a při tom se snižuje jeho K.E.)
  - při urychlování síla pomáhá pohybu – koná kladnou práci a zvyšuje K.E.
- mění-li rychlost jen směr při stejné velikosti, K.E. se zachovává (síla působí kolmo ke směru rychlosti) – příkladem je pohyb po kružnici
- změna K.E. umožňuje zjistit práci sil bez znalosti jejich detailního průběhu

**Historická poznámka**

Podobně jako Descartes a hlavně Newton pokládal za míru pohybu hybnost, považoval Newtonův současník Leibniz za míru pohybu kinetickou energii (resp. veličinu $mv^2$, kterou nazýval *vis viva* neboli „živá síla“).

# Silové pole

- vektorové pole
- určuje sílu působící v každém bodě
- gravitační pole, elmg. pole

**Časově nezávislé pole**

- testovací bod se pohybuje mezi body $M_1$ a $M_2$
- hodnota práce $W_{12}$ vykonané silami pole při pohybu h.b. mezi body $M_1$ a $M_2$ závisí jen na dráze $L$
- při průchodu po stejné dráze opačným směrem je práce $W_{21} = -W_{12}$

**Konzervativní silové pole**

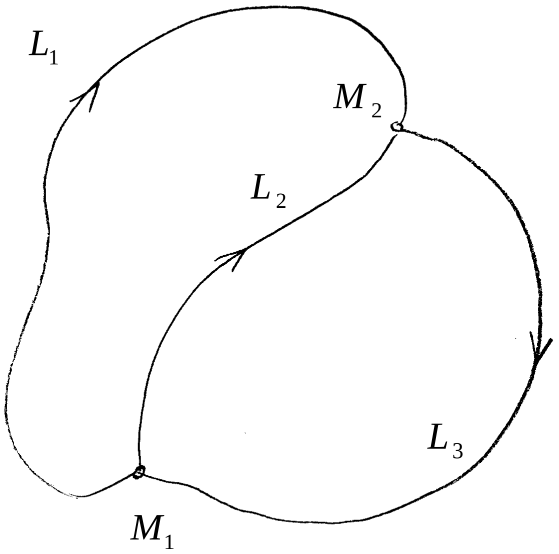
- pole, kde pro libovolnou uzavřenou křivku $L$ platí $\oint_L \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$, se nazývá **konzervativní** nebo též **potenciálové**
- superpozicí dílčích konzervativních polí vznikne opět konzervativní pole

# Konzervativní silové pole

**Ekvivalentní tvrzení**: Pole je konzervativní právě tehdy, když práce vykonaná polem při pohybu h.b. z polohy $M_1$ do $M_2$ nezávisí na tvaru dráhy mezi oběma body.

Uzavřená dráha $L_1$+$L_3$:

$$\oint_{L_1+L_3} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{L_1} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{L_3} \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0 \;\Rightarrow \int_{L_1} \vec{F}\cdot d\vec{r} = -\int_{L_3} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$




Uzavřená dráha $L_2$+$L_3$:

$$\oint_{L_2+L_3} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{L_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{L_3} \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0 \;\Rightarrow \int_{L_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} = -\int_{L_3} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

Z porovnání plyne nezávislost na dráze:

$$\Rightarrow \int_{L_1} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{L_2} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

**Ekvivalentní tvrzení**: Pole $\vec{F}$ je konzervativní právě tehdy, když v celé vyšetřované oblasti platí $\mathrm{rot}\,\vec{F} = \vec{0}$ (důsledek Stokesovy věty).

# Vektorový diferenciální operátor nabla

Připomeňme:

- nejobvyklejším (diferenciálním) operátorem je derivace $\dfrac{d}{dx}$
- derivaci funkce více proměnných se říká parciální a namísto $d$ se užívá symbol $\partial$
- užijeme sčítací konvenci, pokud se ve výrazu vyskytuje stejný index právě dvakrát

Operátor *nabla* definován symbolicky $\nabla = \vec{e}_i \dfrac{\partial}{\partial x_i}$

Je to vektor.

# Gradient

Nabla se aplikuje na skalární funkci *f* takto $\nabla f = \vec{e}_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = \vec{e}_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \vec{e}_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \vec{e}_3 \frac{\partial f}{\partial x_3}$.

Tento operátor se také nazývá **gradient** $\mathrm{grad}\ f = \nabla f$ .

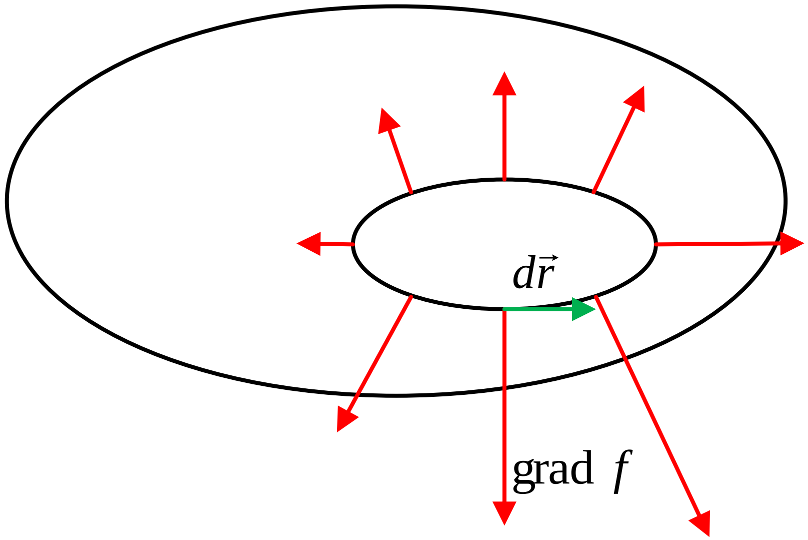
Po složkách $\mathrm{grad}\ f = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3} \right)$.

Názorný význam:

- Čím příkřejší změna hodnoty funkce v závislosti na určité souřadnici, tím větší hodnota příslušné složky gradientu.
- Směr gradientu určuje směr největšího vzrůstu funkce.

# Názorný význam gradientu

- Diferenciál funkce $f(x_1, x_2, x_3)$ lze v okolí zvoleného bodu $\vec{r} = (x_1, x_2, x_3)$ zapsat ve tvaru $df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} dx_3$ neboli $df = \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$, což lze zapsat vektorově $df = d\vec{r} \cdot \mathrm{grad}\ f(\vec{r})$
- Plocha konstantní hodnoty („vrstevnice“) funkce $f$ je v okolí bodu $\vec{r}$ dána podmínkou $df = d\vec{r} \cdot \mathrm{grad}\ f(\vec{r}) = 0$, tedy gradient je kolmý k ploše konstantní hodnoty



# Rotace

Operátor *nabla* je možno aplikovat na vektorovou funkci $\vec{A}$ .

$$\nabla \times \vec{A} = \vec{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \times \vec{e}_j A_j = \vec{e}_i \times \vec{e}_j \frac{\partial A_j}{\partial x_i} = \varepsilon_{ijk} \vec{e}_k \frac{\partial A_j}{\partial x_i}$$

$$\nabla \times \vec{A} = \vec{e}_1 \left( \frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3} \right) + \vec{e}_2 \left( \frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1} \right) + \vec{e}_3 \left( \frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2} \right)$$

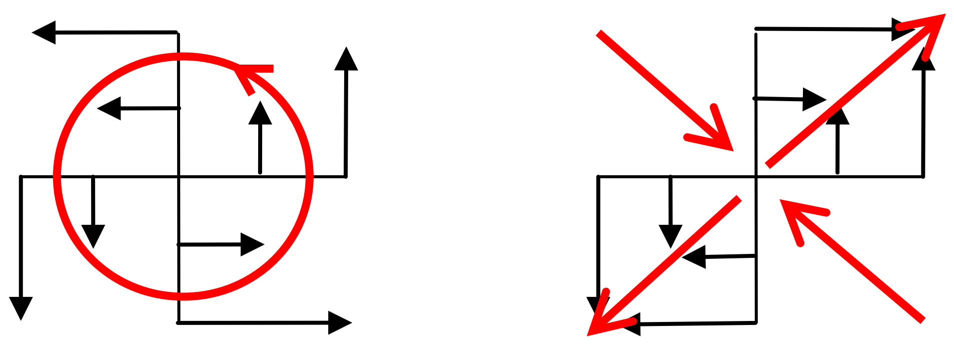
Tento operátor se také nazývá rotace $\mathrm{rot}\,\vec{A} = \nabla \times \vec{A}$, případně se značí $\mathrm{curl}\,\vec{A}$.

Po složkách $\mathrm{rot}\,\vec{A} = \left( \frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3}, \frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1}, \frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2} \right)$.

Platí $\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\, f = \left( \frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial f}{\partial x_3} - \frac{\partial}{\partial x_3}\frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\frac{\partial f}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial f}{\partial x_3}, \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial f}{\partial x_2} - \frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial f}{\partial x_1} \right) = \vec{0}$

# Názorný význam rotace

Zkoumejme vektor rychlosti proudění tekutiny. Veličina $\frac{\partial v_y}{\partial x}$ určuje růst *y*-ové složky rychlosti podél *x*-ové osy, obdobně $\frac{\partial v_x}{\partial y}$ určuje růst *x*-ové složky rychlosti podél *y*-ové osy. Předpokládejme $v_y = kx$ a $v_x = -ky$ (tekutina rotuje), pak příslušná složka vektoru rotace bude rovna $\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = 2k$. Naopak pokud $v_y = kx$ a $v_x = ky$ („hvězdicový“ pohyb), složka vektoru rotace bude nulová.



# Divergence

Jiný způsob aplikace na vektorovou funkci $\vec{A}$

$$\nabla \cdot \vec{A} = \vec{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \cdot \vec{e}_j A_j = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j \frac{\partial A_j}{\partial x_i} = \delta_{ij} \frac{\partial A_j}{\partial x_i} = \frac{\partial A_i}{\partial x_i}.$$

Tento operátor se také nazývá divergence $\operatorname{div} \vec{A} = \nabla \cdot \vec{A}$.

Po složkách $\operatorname{div} \vec{A} = \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3}$.

Názorný význam operátoru divergence:

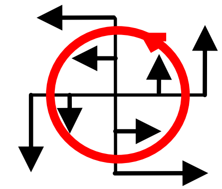
Vyskytuje se ve výrazech popisujících intenzitu vytékání tekutiny, náboje apod.

(lat. divergens = rozbíhající se).

# Názorný význam divergence

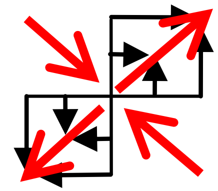
Zkoumáme vektor rychlosti proudění tekutiny.

Jak pro rotační proudění $v_y = kx$ a $v_x = -ky$



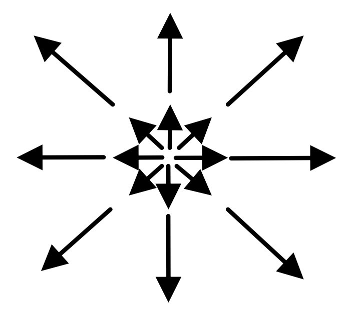
tak pro „hvězdicové“ proudění $v_y = kx$ a $v_x = ky$ vyjde

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0 \wedge \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \Rightarrow \operatorname{div} \vec{v} = 0 .$$



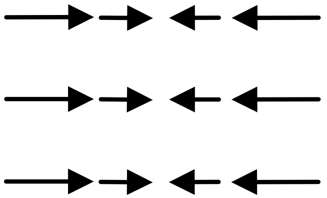
Naopak „zřídlové“ proudění $v_x = kx$ a $v_y = ky$ vede na

nenulovou divergenci $\frac{\partial v_x}{\partial x} = k \wedge \frac{\partial v_y}{\partial y} = k \Rightarrow \operatorname{div} \vec{v} = 2k$ .



Podobně proudění $v_x = -kx$ a $v_y = 0$ vede na nenulovou

divergenci $\frac{\partial v_x}{\partial x} = -k \wedge \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \Rightarrow \operatorname{div} \vec{v} = -k$ .



# Potenciální energie

V konzervativním silovém poli závisí práce jen na

- poloze počátečního bodu $M_1 = \vec{r}_1$ a
- poloze koncového bodu $M_2 = \vec{r}_2$

$\Rightarrow$ možno zavést veličinu $E_p(\vec{r})$ závislou na poloze –

**potenciální (polohovou) energii** – vyhovující vztahu

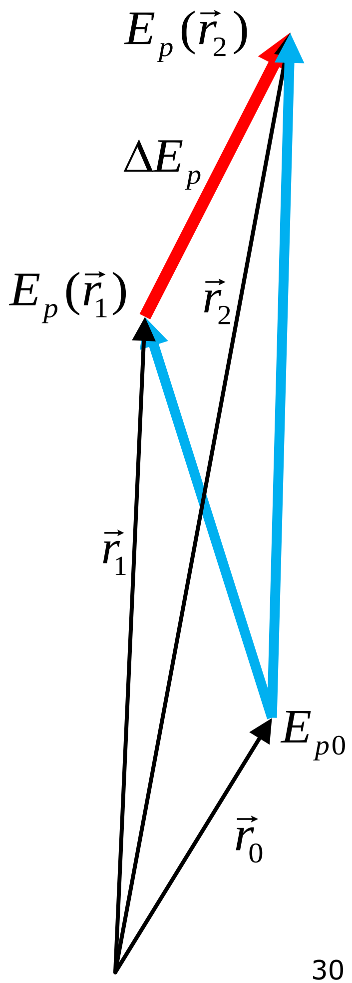
$$-W_{12} = E_p(\vec{r}_2) - E_p(\vec{r}_1) = \Delta E_p$$

Rozdíl potenciální energie dvou bodů v konzervativním poli je s opačným znaménkem roven práci vykonané polem na h.b.

V konzervativním poli lze potenciální energii $E_p(\vec{r})$ zavést

jednoznačně vztahem $E_p(\vec{r}) = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{r}\,') \cdot d\vec{r}\,' + E_{p0}$

(konstanta $E_{p0}$ je hodnota potenciální energie v bodě $\vec{r}_0$)



# Zákon zachování mechanické energie

Práce vykonaná konzervativním silovým polem na hmotném bodu při přechodu mezi dvěma polohami je rovna

- změně kinetické energie $W_{12} = E_{k2} - E_{k1} = \Delta E_k$
- změně potenciální energie se záporným znaménkem

  $W_{12} = -(E_{p2} - E_{p1}) = -\Delta E_p$

Porovnáním získáme **zákon zachování mechanické energie** (ZZME)

$$\Delta E_k = -\Delta E_p$$

případně

$$E_{k1} + E_{p1} = E_{k2} + E_{p2} = \mathrm{konst}.$$

Pohybuje-li se hmotný bod silami konzervativního pole, součet jeho kinetické a potenciální energie (celková mechanická energie) je konstantní, tj. $E_k + E_p = \mathrm{konst}.$

# Nekonzervativní pole

Pro pole nekonzervativních sil platí obecně $\oint_L \vec{F} \cdot d\vec{r} \neq 0$.

To znamená, že na začátku a na konci uzavřené dráhy se hodnota K.E. liší.

Neplatí ZZME.

Pro **pole disipativních sil** platí $\oint_L \vec{F} \cdot d\vec{r} < 0$, to znamená, že v celkové bilanci síla působí proti pohybu.

Příkladem jsou třecí síly.

Dochází k disipaci (rozptylu) energie – k přeměně mechanické energie na jinou formu energie, nejčastěji teplo.

# Změny energie v nekonzervativním poli

Předpokládejme, že vedle konzervativních sil $\vec{F}$ působí také síly nekonzervativní $\vec{F}^*$ a síly vnější $\vec{F}_{\mathrm{ext}}$ .

Práce konzervativních sil $$W_{12} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} \ .$$

Práce nekonzervativních sil $$W_{12}^* = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}^* \cdot d\vec{r} \ .$$

Práce vnějších sil $$W_{12}^{\mathrm{ext}} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}_{\mathrm{ext}} \cdot d\vec{r} \ .$$

Celková práce sil bude rovna změně K.E. $$W_{12} + W_{12}^* + W_{12}^{\mathrm{ext}} = \Delta E_k$$

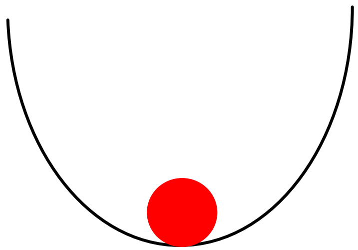
Práce konzervativních sil se rovná změně P.E. $$W_{12} = -\Delta E_p$$

**Celková změna mechanické energie je rovna součtu práce vnějších sil a práce vykonané nekonzervativními silami** $\Delta E = \Delta E_k + \Delta E_p = W_{12}^* + W_{12}^{\mathrm{ext}}$ **.**

# Potenciální energie – rovnováha

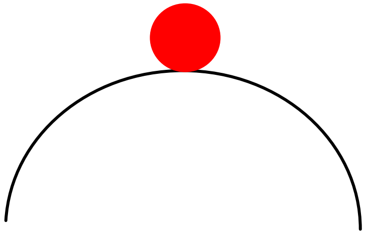
rovnováha stabilní

$$\frac{dE_p}{dx} = 0 \quad \wedge \quad \frac{d^2E_p}{dx^2} > 0$$



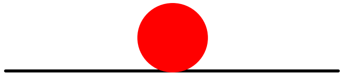
rovnováha vratká

$$\frac{dE_p}{dx} = 0 \quad \wedge \quad \frac{d^2E_p}{dx^2} < 0$$



rovnováha indiferentní

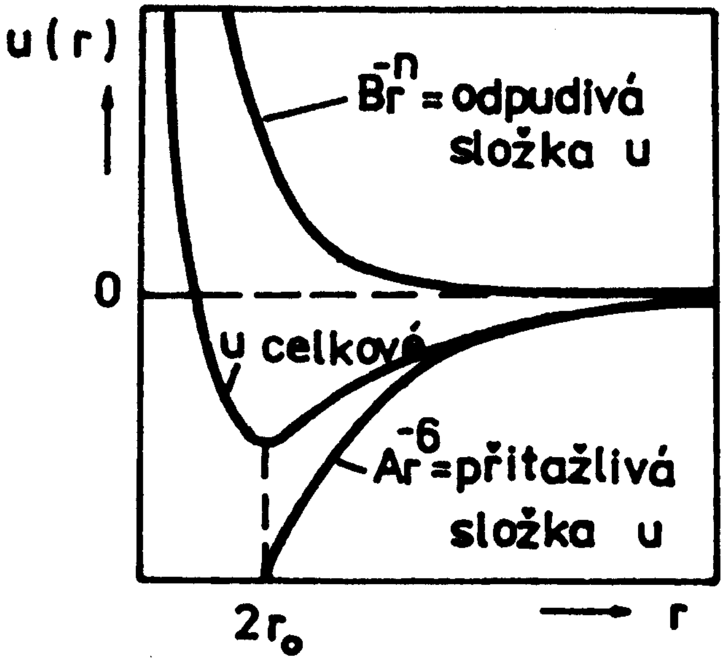
$$\frac{dE_p}{dx} = 0 \quad \wedge \quad \frac{d^2E_p}{dx^2} = 0$$



# Silové působení na atomární úrovni

potenciální energie silového působení mezi částicemi

- síly většinou konzervativní
- různé mocniny vzájemné vzdálenosti
- působení jednotlivých sil se skládá (princip superpozice)
- díky linearitě integrálu resp. derivace se sčítají potenciální energie příslušející jednotlivým konzervativním silovým polím




interakce většího počtu objektů

- potenciální energie celé soustavy (konfigurační energie) = práce všech interakčních sil $E_p = \sum E_p^{ij}$

# Gradient potenciální energie

Hledáme ke vztahu $\vec{F}(\vec{r}) \to E_p(\vec{r})$ vyjádřenému rovnicí $E_p(\vec{r}) = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}' + E_{p0}$

vztah inverzní $E_p(\vec{r}) \to \vec{F}(\vec{r})$ .

PE po složkách $E_p = -\int_{x_{10}}^{x_1} F_1 dx_1' - \int_{x_{20}}^{x_2} F_2 dx_2' - \int_{x_{30}}^{x_3} F_3 dx_3' + E_{p0} = -\int_{x_{i0}}^{x_i} F_i dx_i' + E_{p0}$ .

Diferenciál libovolné funkce $E_p(x_1, x_2, x_3)$ můžeme (při splnění předpokladu spojitosti a existence jednotlivých parciálních derivací) zapsat ve tvaru

$dE_p = \frac{\partial E_p}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial E_p}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial E_p}{\partial x_3} dx_3 = \frac{\partial E_p}{\partial x_i} dx_i$ . Pro integrál dostaneme vztah

$$E_p = \int_{[x_{10},x_{20},x_{30}]}^{[x_1,x_2,x_3]} dE_p = \int_{x_{10}}^{x_1} \frac{\partial E_p}{\partial x_1'} dx_1' + \int_{x_{20}}^{x_2} \frac{\partial E_p}{\partial x_2'} dx_2' + \int_{x_{30}}^{x_3} \frac{\partial E_p}{\partial x_3'} dx_3' + E_{p0} = \int_{x_{i0}}^{x_i} \frac{\partial E_p}{\partial x_i'} dx_i' + E_{p0} .$$

Porovnáním získáme hledané $F_i = -\frac{\partial E_p}{\partial x_i}$ neboli $\vec{F} = -\operatorname{grad} E_p$ resp. $\vec{F} = -\nabla E_p$



povšimněte si souvislostí: $\operatorname{rot} \operatorname{grad} = 0$; $\vec{F} = -\operatorname{grad} E_p$; pole je konzervativní $\Leftrightarrow$ $\operatorname{rot} \vec{F} = 0$

# Intenzita pole. Potenciál.

**Intenzita pole –** síla působící na h.b.jednotkové hmotnosti $\vec{I} = \dfrac{\vec{F}}{m}$

**Potenciál –** potenciální energie h.b. o jednotkové hmotnosti $\varphi = \dfrac{E_p}{m}$

- Platí: $\vec{I} = \dfrac{\vec{F}}{m} = \dfrac{-\nabla E_p}{m} = -\nabla\varphi$ tedy $\vec{I} = -\nabla\varphi$ neboli $I_i = -\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_i}$
- Popis pole pomocí potenciálu je výhodný, protože jde o skalární veličinu.
- V oblasti, kde je konstantní potenciál, je intenzita pole a tedy i síla nulová.

# Ekvipotenciální plochy. Siločáry.

- Gradient určuje směr největšího růstu potenciální energie, směřuje proti vektoru silového pole ($\vec{F} = -\operatorname{grad} E_p$).

- Ekvipotenciální plochy jsou kolmé k vektoru gradientu, protože ekvipotenciální plocha je v okolí bodu $\vec{r}$ dána podmínkou $dE_p = d\vec{r} \cdot \operatorname{grad} E_p(\vec{r}) = 0$.

- Siločáry mají směr normály k ekvipotenciálním plochám, jejich směr v daném bodě je shodný se směrem gradientu $\vec{\nu} = \dfrac{\operatorname{grad} E_p(\vec{r})}{|\operatorname{grad} E_p(\vec{r})|}$.

- Hustotou siločar se často znázorňuje velikost intenzity pole.