

Zkouška Geometrie 1

3. února 2022

1. Početní část (celkem 40 bodů, minimálně je třeba získat 22 bodů)

(a) Uvažujte křivku $c(t) = (3(t - \sin t), 3(1 - \cos t))$, $t \in (0, 2\pi)$.

✓ i. Pro $t = \pi$ spočtete znaménkovou křivost, tečný a normálový vektor.

✓ ii. Pro $t = \pi$ najděte rovnici oskulační kružnice.

✓ iii. Spočtete křivkový integrál 1. druhu: $\int_c \sqrt{2y} ds$.

(b) V $\mathbb{R}^2$ uvažujte přímku $p: 2x + 4y + 1 = 0$ a bod $B = [1, -3]$.

✓ i. Najděte nepřímou shodnost f , která zobrazí p na přímku $f(p): 2x + 4y - 9 = 0$ a bod B na bod $f(B) = [-4, 2]$.

ii. Najděte obraz ve shodnosti f :

✓ • bodu $P = [-2, 1]$,

✓ • přímky $q: 4x + 2y = 0$,

✓ • paraboly $k: x - 2(y - 1)^2 + 3 = 0$.

(c) V $\mathbb{R}^2$ uvažujte body $A[4, -1]$, $B[1, 5]$, $C[7, 2]$.

✓ i. Na přímce AC najděte bod R takový, že $\frac{AR}{RC} = 2$

✓ ii. Ověřte, že $M = (A, B, C)$ je barycentrická soustava souřadnic v $\mathbb{R}^2$ a najděte bod Q , jehož barycentrické souřadnice jsou $[Q]_M = (0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})^T$.

✓ iii. Určete bod $P_2 = RQ \cap AB$ a poměr obsahů trojúhelníků BP_2Q a ABC .

iv. Pokud $X = AQ \cap BR$ a $P_1 = CX \cap AB$, ověřte, že (A, B, P_1, P_2) je harmonická čtveřice.

(d) V $\mathbb{R}^2$ uvažujme kuželosečku s rovnicí

$$3x^2 + 2xy + 2x - 1 = 0$$

✓ i. Ověřte, že je to regulární kuželosečka a určete její afinní typ.

✓ ii. Najděte její střed, pokud existuje, nebo zdůvodněte, proč neexistuje.

✓ iii. Napište obecnou rovnici jejích tečen procházejících bodem $[0, 0]$. Pokud vám některá tečna nebude připadat tak úplně jako tečna, napište, čím ve skutečnosti je. Její obecnou rovnici ale uveďte také.

2. Definice, formulujte je co nejpřesněji (celkem 10 bodů, minimálně je třeba získat 8 bodů):

- (a) Definujte afinní prostor.
- (b) Definujte oskulační, rektifikační a normálovou rovinu prostorové křivky.
- (c) Pro shodné zobrazení definujte samodružné body a samodružné množiny.

3. Věty a důkazy (celkem 30 bodů, minimálně je třeba získat 15 bodů)

- (a) Dokažte větu o volbě projektivních souřadnic (tak aby vhodný počet zadaných bodů měl "hezké" souřadnice).
- (b) Formulujte (přesně) a dokažte větu o souvislosti toho, že křivka leží v rovině a že má nulovou torzi.
- (c) Formulujte a dokažte větu o obsahu trojúhelníku v barycentrických souřadnicích. Formulujte i podmínku pro to, že tři body leží na přímce.

Zkouška Geometrie 1

5. ledna 2022

1. Početní část (celkem 40 bodů, minimálně je třeba získat 22 bodů)

- (a) Křivka c je zadána parametrizací $c(t) = (t, 4 \cosh t)$, $t \in (-\infty, \infty)$. [připomínáme, že $\cosh t = (e^t + e^{-t})/2$].

- Napište rovnici tečny ke křivce v bodě $X = c(\ln 2)$.
- Parametrizujte křivku $\tilde{c}$, která vznikne z c osovou souměrností podle této tečny.
- Najděte bod Y , kde má křivka $\tilde{c}$ největší křivost a tuto křivost určete.

- (b) Najděte projektivní transformaci roviny $\mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ na sebe, která splňuje

$$F((1, 0, 0)) = (4, 0, 3), F((0, 1, 0)) = (-1, -4, -1)$$

$$F((0, 0, 1)) = (4, 6, 6), F((5, 5, -9)) = (1, -1, -1).$$

Určete obraz bodu $(1, 1, 1)$ a projektivní přímky $(1, 1, -1)^*$ v zobrazení F .

- (c) V afinní rovině uvažujme kuželosečku s rovnicí

$$x^2 + 4xy + 4y^2 + 6x + 10y + 6 = 0$$

- Určete afinní typ kuželosečky.
 - Určete rovnice tečen k ní procházejících bodem $[7, -4]$.
- (d) V afinní rovině $\mathbb{R}^2$ uvažujme posloupnost

$$P = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$$

- Ověřte, že P je barycentrická soustava souřadnic.
- Určete barycentrické souřadnice bodu $\begin{pmatrix} 9 \\ -9 \end{pmatrix}$.
- Určete všechny body, které doplní P na rovnoběžník a napište jejich barycentrické souřadnice vůči P .

2. Formulujte je co nejpřesněji (celkem 10 bodů, minimálně je třeba získat 8 bodů):

- Definujte afinní zobrazení.
- Definujte reparametrizaci křivky a reparametrizaci zachovávající orientaci.
- Definujte polárně sdružené body vůči kvadrice.

3. Věty a důkazy (celkem 30 bodů, minimálně je třeba získat 15 bodů)

- Formulujte a dokažte větu o chování normálového a tečného vektoru a znaménkové křivosti při reparametrizaci.
- Formulujte a dokažte formuli o rotaci pomocí jednotkového kvaternionu. Případná pomocná tvrzení využívejte ale nedokazujte.
- Formulujte a dokažte Menelaovu větu.

Zkouška Geometrie 1

13. ledna 2022

1. Početní část (celkem 40 bodů, minimálně je třeba získat 22 bodů)

(a) Uvažujte parametrickou křivku $\mathbf{c}(t) = (2(t - \sin t), 2 - 2 \cos t), t \in (0, 2\pi)$.

- i. Rozhodněte, zda je $\mathbf{c}$ parametrizovaná obloukem.
- ii. Spočtěte délku křivky $\mathbf{c}$.
- iii. Napište rovnici tečny v bodě $\mathbf{c}(\pi)$.
- iv. Najděte osculační kružnici v bodě $\mathbf{c}(\pi)$.

(b) V afinní rovině $\mathbb{R}^2$

- i. najděte afinní zobrazení $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ splňující

$$f([1, 1]) = [0, 10], \quad f([3, -2]) = [-2, 16], \quad \bar{f} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -10 \end{pmatrix}.$$

- ii. Rozhodněte, zda je f afinita a určete inverzní zobrazení, pokud existuje.
 - iii. Spočtěte orientovaný obsah obrazu trojúhelníku ABC při zobrazení f , je-li $A = [1, 1], B = [0, 6], C = [5, 2]$.
- (c) Jsou dány projektivní body $A = (2, 1, 1), B = (-1, -1, 1), C = (1, 0, 2), D = (-1, -2, 4)$ v projektivním rozšíření afinní roviny $\mathbb{R}^2$.
- i. Ověřte, že body leží na společné projektivní přímce.
 - ii. Určete nevlastní bod X této přímky.
 - iii. Spočtěte dvojpoměry (A, B, C, D) a (B, C, A, D) .
 - iv. Najděte bod Y tak, aby (A, B, Y, X) byla harmonická čtveřice.

(d) V rovině $\mathbb{R}^2$

- i. určete parametr $p \in \mathbb{R}$ tak, aby zobrazení $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ splňující $f([0, 1]) = [-1, 1], f([1, -1]) = [1, p - 2], f([2, 2]) = [0, p + 1]$ byla shodnost.
- ii. Určete samodružné body, směry a přímky zobrazení f .
- iii. Pomocí f zobrazte přímku $x - 3y = 2$ a hyperbolu: $x - xy = 1$.

2. Formulujte je co nejpřesněji (celkem 10 bodů, minimálně je třeba získat 8 bodů):

- (a) Definujte elipsu, hyperbolu a parabolu.
- (b) Definujte křivost a torzi.
- (c) Definujte projektivní zobrazení.

3. Věty a důkazy (celkem 30 bodů, minimálně je třeba získat 15 bodů)

- (a) Formulujte a dokažte klasifikaci přímých shodností v $\mathbb{R}^2$.
- (b) Formulujte a dokažte Frenetovy vzorce o chování derivací Frenetova repéru prostorové křivky.
- (c) Dokažte větu o volbě projektivních souřadnic (tak aby vhodný počet zadaných bodů měl "hezké" souřadnice).

Zkouška Geometrie 1

20. ledna 2022

1. Početní část (celkem 40 bodů, minimálně je třeba získat 22 bodů)

(a) Uvažujte parametrickou křivku $\mathbf{c}(t) = (\cos^2(t), \sin^2(2t), \cos(t))$, $t \in (0, \pi)$.

i. V bodě $\mathbf{c}(\frac{\pi}{2})$ spočítejte křivost, torzi a Frenetův repér.

ii. Mějme zobrazení $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$.

$$f(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \mathbf{X} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

V bodě $f(\mathbf{c}(\frac{\pi}{2}))$ určete křivost, torzi a Frenetův repér křivky $\tilde{\mathbf{c}}$, která je obrazem křivky $\mathbf{c}$ při zobrazení f .

(b) V afinním prostoru $\mathbb{R}^3$ uvažujme body

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a afinní podprostory $P_1 = \text{AO}\{A, B, C\}$, $P_2 = D + \text{LO}\{(1, -1, 0)^T\}$.

i. Najděte nějaké rovnicové vyjádření podprostorů P_1 a P_2 .

ii. Najděte průsečík E prostorů P_1 a P_2 .

iii. Najděte na přímce DE bod F takový, že dělicí poměr $\frac{DF}{FE} = \frac{1}{3}$.

(c) Uvažujme kuželosečku v rovině s rovnicí

$$3x^2 - 10xy + 3y^2 + 14x - 2y + 3 = 0$$

i. Ukažte, že je regulární a určete její afinní typ.

ii. Najděte její střed a asymptoty, pokud existují.

iii. Najděte její osy a vrcholy.

(d) V kanonickém projektivním rozšíření reálné afinní přímky $\mathbb{R} \subset \mathbb{P}^1$ mějme body $A = [0]$, $B = [1]$ a nevlastní bod C .

i. Najděte projektivní transformaci F , pro níž $F(A) = B$, $F(B) = C$, $F(C) = A$.

ii. Najděte bod $X \in \mathbb{R}$ takový, že (A, B, C, X) je harmonická čtveřice.

iii. Určete $F(X) \in \mathbb{R}$.

iv. Určete hodnotu dvojpoměru $(B, C, A, F(X))$.

(e) Formulujte je co nejpřesněji (celkem 10 bodů, minimálně je třeba získat 8 bodů):

- i. Definujte shodné zobrazení.
- ii. Pro rovinnou křivku definujte tečnou přímku a oskulační kružnici.
- iii. Definujte afinní kombinaci bodů. Nemusíte nic dokazovat.

(f) Věty a důkazy (celkem 30 bodů, minimálně je třeba získat 15 bodů)

- i. Formulujte a dokažte lemma o tom, jaký tvar mají v parametrizaci obloukem tečný vektor, normálový vektor a křivost prostorové křivky. Pomocné lemmátka dokazovat nemusíte.
- ii. Definujte dvojpoměr. Formulujte a dokažte větu o vyjádření dvojpoměru pomocí dělicích poměrů v případě a) když jsou všechny body vlastní, b) když je jeden z nich nevlastní.
- iii. Formulujte a dokažte Cevovu větu (o přímkách spojujících v trojúhelníku vrcholy a jeden pevný bod).

Zkouška Geometrie 1

27. ledna 2022

1. Početní část (celkem 40 bodů, minimálně je třeba získat 22 bodů)

(a) Křivka c je zadána parametrizací

$$c(t) = (\sin t \cos t, \cos^2 t, \sin t), \quad t \in (-\pi, \pi).$$

Pro parametrickou hodnotu t splňující $c(t) = (0, 1, 0)$

- spočtete křivost a torzi,
- nalezněte Frenetův repér,
- nalezněte rovnici normálové roviny.

(b) V $\mathbb{R}^2$ je dána kuželosečka

$$Q: x^2 + 4xy + 6x + y^2 - 12 = 0.$$

- Určete její afinní typ,
 - nalezněte její střed, jestliže existuje,
 - nalezněte k ní tečnu z bodu $[0, 3]$,
 - nalezněte směr sdružený vzhledem ke Q se směrem $(1, 0)$.
- (c)
- Nalezněte přímou shodnost v $\mathbb{R}^2$, pro kterou je bod $[2, 1]$ samodružný, a která zobrazuje přímku $p_1: x = 1$ na přímku $p_2: y = 2$.
 - Ukažte, že taková shodnost je právě jedna.
 - V této shodnosti zobrazte bod $[0, 0]$ a parabolu $y = x^2$.
- (d) V $\mathbb{R}^2$ jsou zadány body $A[1, 2]$ a $B[3, 4]$.
- Nalezněte nevlastní bod přímky $\overleftrightarrow{AB}$.
 - Určete průsečík C přímky $\overleftrightarrow{AB}$ s osou y .
 - Určete dělicí poměr $\frac{AC}{CB}$.
 - Nalezněte bod D tak, aby (A, B, C, D) tvořily harmonickou čtveřici.

2. Formulujte je co nejpřesněji (celkem 10 bodů, minimálně je třeba získat 8 bodů):

- Definujte křivkový integrál 1. druhu.
- Definujte dělicí poměr. Nic nedokazujte.
- Pro kuželosečku v rovině definujte hlavní směr, vrchol a osu.

3. Věty a důkazy (celkem 30 bodů, minimálně je třeba získat 15 bodů)

- Formulujte a dokažte větu o tom, jak je rovinná křivka určena pomocí funkcí rychlosti a znaménkové křivosti.
- Dokažte, že projektivní zobrazení zachovávají dvojpoměr.
- Formulujte a dokažte isoperimetrickou nerovnost pro uzavřené rovinné křivky. Případná lemmata pouze formulujte, ale nedokazujte.