

Zadání písemné zkoušky z Matematické analýzy 2

Matematicko-fyzikální fakulta UK, letní semestr 2025-26

Termín číslo 4, 24. 6. 2026

1. Je dána funkce

$$f(x) = \sqrt[3]{\cos(\sqrt{3}x)} - \sqrt[5]{\cos(\sqrt{5}x)}.$$

Nalezněte Taylorův polynom 4. řádu funkce f v bodě 0. Pomocí získaného rozvoje spočtěte limitu

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^4}.$$

(15 bodů)

2. V závislosti na parametru $x \in \mathbb{R}$ vyšetřete konvergenci následující řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2n + (-1)^n n}.$$

(15 bodů)

3. Spočtěte Newtonův integrál

$$\int_{-1}^1 \sqrt{\frac{x+1}{x+2}} dx.$$

(15 bodů)

4. Necht $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nerostoucí posloupnost s nezápornými členy. Uvažujte následující tvrzení.

(1) Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

(2) Platí $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = 0$.

(3) Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}}$ konverguje.

Rozhodněte, které z následujících implikací platí a které neplatí. Uveďte vždy důkaz platnosti implikace nebo protipříklad. Můžete používat věty z přednášek.

(a) (1) $\Rightarrow$ (2)

(b) (2) $\Rightarrow$ (1)

(c) (2) $\Rightarrow$ (3)

(15 bodů)

Řešení úloh

Úloha číslo 1. Je dána funkce

$$f(x) = \sqrt[3]{\cos(\sqrt{3}x)} - \sqrt[5]{\cos(\sqrt{5}x)}.$$

Nalezněte Taylorův polynom 4. řádu funkce f v bodě 0. Pomocí získaného rozvoje spočítejte limitu

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^4}.$$

Řešení. *Výpočet Taylorova polynomu.* Využijeme známé rozvoje

$$\begin{aligned}\cos t &= 1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{24}t^4 + o(t^4), \quad t \rightarrow 0, \\ (1+y)^\alpha &= 1 + \alpha y + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}y^2 + o(y^2), \quad y \rightarrow 0.\end{aligned}$$

Všechny další rozvoje budeme uvažovat v bodě 0.

Nejprve funkci $\cos$ složíme s funkcí $x \mapsto \sqrt{3}x$. Jsou zřejmě splněny předpoklady Věty 6.7. Dostaneme

$$\begin{aligned}\cos(\sqrt{3}x) &= 1 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + o((\sqrt{3}x)^4) \\ &\stackrel{\text{Věta 6.6(iii)}}{=} 1 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + o(x^4).\end{aligned}$$

Nyní složíme funkci $y \mapsto (1+y)^{1/3}$ s funkcí $x \mapsto \cos(\sqrt{3}x) - 1$. Opět jsou splněny předpoklady Věty 6.7., tj. $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos(\sqrt{3}x) - 1) = 0$ a pro každé $x \in P(0, \frac{\pi}{2\sqrt{3}})$ platí $\cos(\sqrt{3}x) - 1 \neq 0$. Dostaneme

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{\cos(\sqrt{3}x)} &= 1 + \frac{1}{3}\left(-\frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + o(x^4)\right) - \frac{1}{9}\left(-\frac{3}{2}x^2 + o(x^2)\right)^2 + o((\cos(\sqrt{3}x) - 1)^2) \\ &\stackrel{\text{Věta 6.6(iii)}}{=} 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + o(x^4).\end{aligned}$$

Při aplikaci Věty 6.6(iii) jsme použili fakt

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\sqrt{3}x) - 1}{x^2} \in \mathbb{R}.$$

Podobně obdržíme

$$\sqrt[5]{\cos(\sqrt{5}x)} = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{7}{24}x^4 + o(x^4).$$

Odečtením obou rozvojů získáme Taylorův polynom funkce $f(x)$:

$$\begin{aligned}f(x) &= \left(1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + o(x^4)\right) - \left(1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{7}{24}x^4 + o(x^4)\right) \\ &= \frac{1}{6}x^4 + o(x^4).\end{aligned}$$

Taylorův polynom 4. řádu v bodě 0 je tedy

$$T_4^{f,0}(x) = \frac{1}{6}x^4.$$

Výpočet limity

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{6}x^4 + o(x^4)}{x^4} = \frac{1}{6}.$$

Úloha číslo 2. V závislosti na parametru $x \in \mathbb{R}$ vyšetřete konvergenci následující řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2n + (-1)^n n}.$$

Řešení:

$$5b \left\{ \begin{array}{l} \text{Položme pro } n \in \mathbb{N} \\ \\ \text{Platí} \\ \\ \text{Řada } \sum \frac{1}{n} |x|^n \text{ konverguje pro } |x| < 1 \text{ a pro } |x| > 1 \text{ neplatí } \lim \frac{|x|^n}{3n} = 0 \text{ podle Cauchyova kritéria.} \\ \text{Díky (*) a srovnávacímu kritériu máme} \\ \bullet \text{ pokud } |x| < 1, \text{ pak } \sum |a_n| \text{ konverguje, a tedy } \sum a_n \text{ konverguje,} \\ \bullet \text{ pokud } |x| > 1, \text{ pak } \sum a_n \text{ nesplňuje nutnou podmínku konvergence, a tedy } \sum a_n \text{ diverguje.} \end{array} \right.$$

$$5b \left\{ \begin{array}{l} \text{Případ } x = 1. \text{ Platí } a_n \geq \frac{1}{3n}. \text{ Podle srovnávacího kritéria řada } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ diverguje, neboť } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \\ \text{diverguje.} \end{array} \right.$$

$$5b \left\{ \begin{array}{l} \text{Případ } x = -1. \text{ Je třeba vyšetřit konvergenci řady} \\ \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n + (-1)^n} \\ \\ \text{Pro } k \in \mathbb{N} \text{ platí} \\ \\ b_k := a_{2k-1} + a_{2k} = \frac{-1}{4k - 2 - 2k + 1} + \frac{1}{6k} = \frac{-4k - 1}{(2k - 1)6k} \\ \\ \text{Řada } \sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ diverguje (řadu } \sum_{k=1}^{\infty} (-b_k) \text{ srovnáme s řadou } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}). \text{ Odtud plyne, že řada} \\ \sum_{k=1}^{\infty} (a_{2k-1} + a_{2k}) \text{ diverguje, a tedy } \lim s_{2k} \text{ neexistuje vlastní. Potom také } \lim s_n \text{ neexistuje vlastní} \\ \text{a } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ diverguje.} \end{array} \right.$$

Závěr: Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje právě tehdy, když $|x| < 1$.

Úloha číslo 3. Spočtěte Newtonův integrál

$$\int_{-1}^1 \sqrt{\frac{x+1}{x+2}} dx.$$

Integrál má dva kritické body: u 0 a v ∞ . Označme integrovanou funkci jako $f(x)$.

Řešení:

Řešení úlohy číslo 3

Substituce. Použijeme substituci

$$\varphi(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x+2}}, \quad x \in (-1, 1).$$

Označme $\varphi(x) = z$. Potom pro $x \in (-1, 1)$ platí:

$$\begin{aligned} z^2 &= \frac{x+1}{x+2}, \\ z^2(x+2) &= x+1, \\ x(z^2-1) &= 1-2z^2. \end{aligned}$$

Poněvadž $z \neq \pm 1$, máme

$$\varphi^{-1}(z) = x = \frac{1-2z^2}{z^2-1}, \quad z \in \mathcal{H}(\varphi).$$

Dále platí:

$$(\varphi^{-1})'(z) = \frac{-4z(z^2-1) - (1-2z^2) \cdot 2z}{(z^2-1)^2} = \frac{2z}{(z^2-1)^2} = \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(z))}.$$

Pro $z \in \mathcal{H}(\varphi)$ máme $(\varphi^{-1})'(z) > 0$, $\mathcal{H}(\varphi) = (0, \sqrt{\frac{2}{3}})$. Odtud plyne:

$$\int_{-1}^1 \sqrt{\frac{x+1}{x+2}} dx = \int_0^{\sqrt{\frac{2}{3}}} z \cdot \frac{2z}{(z^2-1)^2} dz = \int_0^{\sqrt{\frac{2}{3}}} \frac{2z^2}{(z^2-1)^2} dz.$$

Vzhledem k úpravě jmenovatele můžeme psát:

$$\int_0^{\sqrt{\frac{2}{3}}} \frac{2z^2}{(z-1)^2(z+1)^2} dz.$$

$$\left. \begin{array}{l}
 \text{Rozklad na parciální zlomky. Provedeme rozklad na parciální zlomky:} \\
 \\
 \frac{2z^2}{(z-1)^2(z+1)^2} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{(z-1)^2} + \frac{C}{z+1} + \frac{D}{(z+1)^2} \\
 2z^2 = A(z-1)(z+1)^2 + B(z+1)^2 + C(z+1)(z-1)^2 + D(z-1)^2 \\
 \\
 z = 1 : \quad 2 = 4B \implies B = \frac{1}{2} \\
 z = -1 : \quad 2 = 4D \implies D = \frac{1}{2} \\
 \\
 \left. \begin{array}{l}
 z^0 : \quad 0 = -A + B + C + D \\
 z^3 : \quad 0 = A + C \implies C = -A
 \end{array} \right\} \implies 0 = -2A + 1 \implies A = \frac{1}{2}, C = -\frac{1}{2} \\
 \\
 \frac{2z^2}{(z-1)^2(z+1)^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{z-1} + \frac{1}{(z-1)^2} - \frac{1}{z+1} + \frac{1}{(z+1)^2} \right) =: g(z)
 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l}
 \text{Dopočet integrálu. Potom platí} \\
 \\
 \int_0^{\sqrt{\frac{2}{3}}} g(z) \, dz = \left[\frac{1}{2} \left(\log|z-1| - \frac{1}{z-1} - \log|z+1| - \frac{1}{z+1} \right) \right]_0^{\sqrt{\frac{2}{3}}} \\
 = \frac{1}{2} \left(\log(1 - \sqrt{\frac{2}{3}}) - \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{3}} - 1} - \log(\sqrt{\frac{2}{3}} + 1) - \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{3}} + 1} \right) - \frac{1}{2} (1 - 1) \\
 = \frac{1}{2} \left(\log \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} - \frac{2\sqrt{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3} - 1} \right) = \frac{1}{2} \log \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} + \frac{\sqrt{\frac{2}{3}}}{\frac{1}{3}} \\
 = -\log(\sqrt{3} + \sqrt{2}) + \sqrt{6}.
 \end{array} \right\}$$

Úloha číslo 4. Necht $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nerostoucí posloupnost s nezápornými členy. Uvažujte následující tvrzení.

- (1) Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.
- (2) Platí $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = 0$.
- (3) Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}}$ konverguje.

Rozhodněte, které z následujících implikací platí a které neplatí. Uveďte vždy důkaz platnosti implikace nebo protipříklad. Můžete používat věty z přednášek.

- (a) (1) $\Rightarrow$ (2)
- (b) (2) $\Rightarrow$ (1)
- (c) (2) $\Rightarrow$ (3)

Řešení:

$$\left. \begin{array}{l} \text{(a) *Implikace platí.* Zvolme } \varepsilon > 0. \text{ Protože } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje, splňuje Bolzanovu-Cauchyovu} \\ \text{podmínku. Nalezneme tedy } n_0 \text{ takové, že pro každé } m \geq n > n_0 \text{ platí } \sum_{k=n}^m a_k < \varepsilon. \text{ Díky nutné} \\ \text{podmínce konvergence řady máme } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0. \text{ S pomocí tohoto pozorování nalezneme } n_1 > n_0 \\ \text{takové, že pro každé } n \geq n_1 \text{ platí } n_0 a_n < \varepsilon. \text{ Zvolme } n > n_1. \text{ Protože je } \{a_j\} \text{ nerostoucí, dostáváme} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \varepsilon > \sum_{k=n_0+1}^n a_k \geq \sum_{k=n_0+1}^n a_n = n a_n - n_0 a_n > n a_n - \varepsilon. \\ \text{Tedy } n a_n < 2\varepsilon. \text{ Odtud plyne } \lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = 0. \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{(b) *Implikace neplatí.* Zvolme posloupnost} \\ a_n = \frac{1}{(n+1) \log(n+1)}, \quad n \in \mathbb{N}. \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Tato posloupnost je nezáporná a nerostoucí. Platí: } \lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{(n+1) \log(n+1)} = 0, \text{ čímž} \\ \text{je splněno tvrzení (2). Avšak řada } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \log(n+1)} \text{ podle integrálního kritéria diverguje} \\ \int_1^{\infty} \frac{1}{(x+1) \log(x+1)} dx = [\log(\log(x+1))]_1^{\infty} = \infty. \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{(c) *Implikace platí.* Řada } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \sqrt{n}} \text{ je konvergentní a platí} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{a_n}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{n \sqrt{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = 0. \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Podle limitního srovnávacího kritéria tedy řada } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}} \text{ konverguje.} \end{array}$$